HZ BOOKS
华章教育

PEARSON

OPTIONS, FUTURES AND OTHER DERIVATIVES

8th Edition

期权、期货及其他衍生产品

（第8版）

[加] 约翰·赫尔（John C.Hull）（多伦多大学）著

[加] 王勇（加拿大皇家银行）索吾林（皇后大学）译



机械工业出版社
China Machine Press

OPTIONS, FUTURES AND OTHER DERIVATIVES

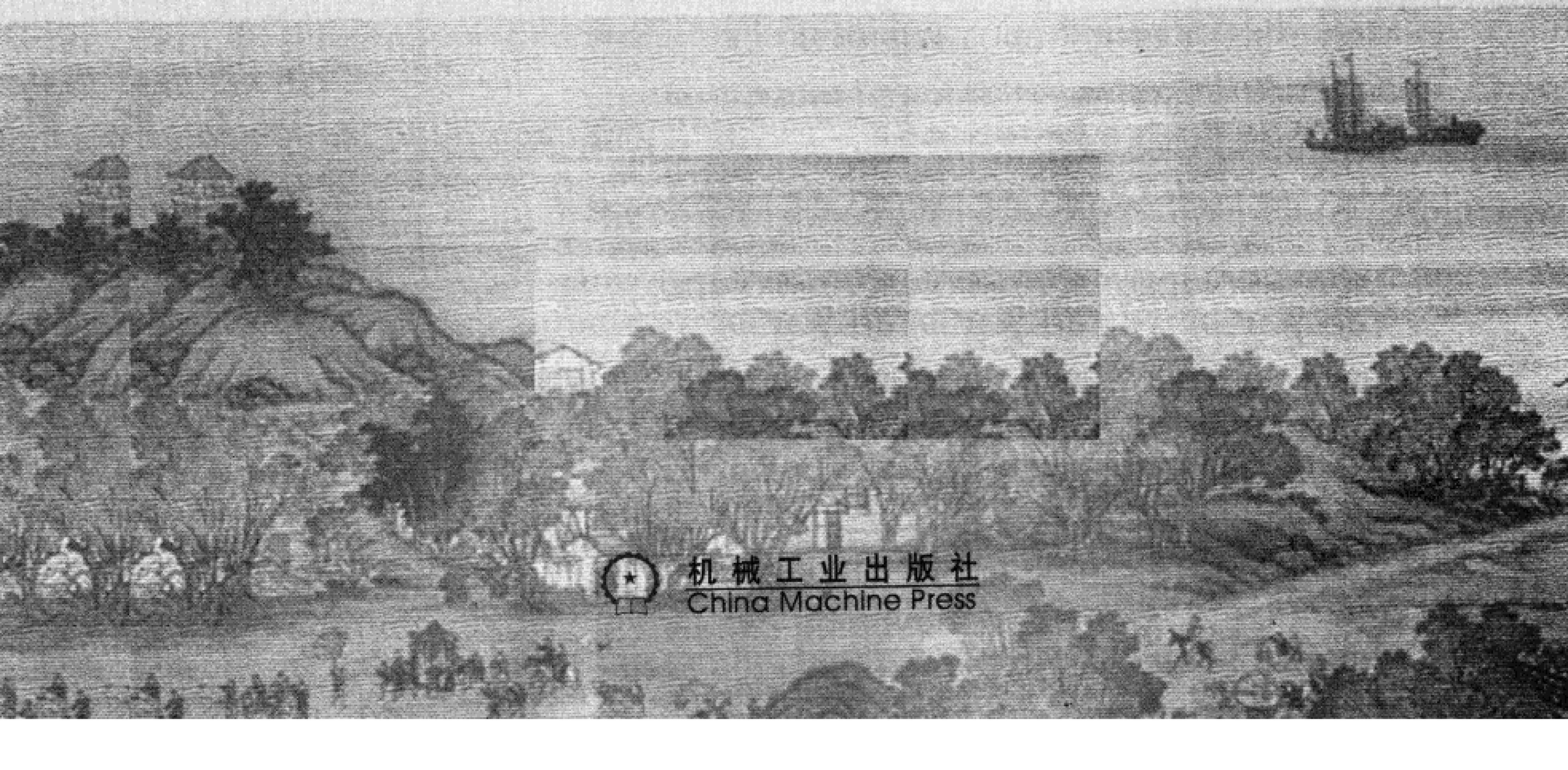
8th Edition

期权、期货及其他衍生产品

（第8版）

[加] 约翰·赫尔（多伦多大学）著

[加] 王勇（加拿大皇家银行）索吾林（皇后大学）译



机械工业出版社
China Machine Press

本书被誉为金融衍生产品领域的“圣经”。本书对金融衍生品市场中期权与期货的基本理论进行了系统阐述，提供了大量业界事例，主要讲述了期货市场的运作机制、采用期货的对冲策略、远期及期货价格的确定、期权市场的运作过程、雇员股票期权的性质、期权交易策略以及信用衍生产品、布莱克-斯科尔斯-默顿模型、希腊值及其运用等。随着金融市场形势的发展，本书与时俱进，不仅更新了大量经济数据，带来最新的市场信息，而且还特别增加了一整章内容介绍证券化和始于2007年的信用危机。

本书可作为高等院校经济、金融相关专业教学用书，也可作为金融机构管理者，特别是期权、期货从业人员的参考用书。

John C. Hull. Options, Futures, and Other Derivatives, 8th Edition.

ISBN 0-13-216494-9

Copyright © 2012, 2009, 2006, 2003, 2000 by Pearson Education, Inc.

Simplified Chinese Edition Copyright © 2012 by China Machine Press.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc. This edition is authorized for sale and distribution in the People's Republic of China exclusively (except Taiwan, Hong Kong SAR and Macau SAR).

All rights reserved.

本书中文简体字版由 Pearson Education（培生教育出版集团）授权机械工业出版社在中华人民共和国境内（不包括中国台湾地区和中国香港、澳门特别行政区）独家出版发行。未经出版者书面许可，不得以任何方式抄袭、复制或节录本书中的任何部分。

本书封底贴有 Pearson Education（培生教育出版集团）激光防伪标签，无标签者不得销售。

封底无防伪标均为盗版

版权所有，侵权必究

本书法律顾问　北京市展达律师事务所

本书版权登记号：图字：01-2011-2081

图书在版编目（CIP）数据

期权、期货及其他衍生产品（原书第8版）/（加）赫尔（Hull, J. C.）著；王勇译.—北京：机械工业出版社，2011.9

（华章教材经典译丛）

书名原文：Options, Futures, and Other Derivatives

ISBN 978-7-111-35821-3

Ⅰ.期…　Ⅱ.①赫…　②王…　Ⅲ.①期货交易　②期权交易　Ⅳ.F830.9

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第184176号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）

责任编辑：蒋桂霞　　　版式设计：刘永青

北京京师印务有限公司印刷

2012年3月第1版第2次印刷

185mm×260mm·38.75印张

标准书号：ISBN 978-7-111-35821-3

定价：98.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：（010）88379210；88361066

购书热线：（010）68326294；88379649；68995259

投稿热线：（010）88379007

读者信箱：hzjg@hzbook.com

推荐序一

人类进入现代社会为创造财富展现了大量的智慧。金融创新的发展为全球金融市场带来了大量的衍生工具。目前的种类十分丰富，让人“眼花缭乱”。衍生工具的发展大大拓宽了市场的空间和时间。从理论和技术上看，通过衍生工具可以将本地熟悉的产品与全球任何一个市场的产品进行连接，如果愿意付出足够的成本，可以使产品的交易延长数年或数十年。

金融衍生产品的出现突破了传统商业银行用8%的资本最多可以放大12倍的界限，放大了资金杠杆的倍数，可以将资金放大到几十倍以上，使交易更加灵活、便捷，更大程度上满足投资者和投机者的不同需要。然而，过高的杠杆倍数也加大了市场的风险，成为美国长期资本管理公司破产和全球次贷危机的罪魁祸首。

我国金融市场对采用衍生金融工具一直持谨慎的态度。近年来以人民币利率互换为代表的人民币衍生产品呈快速发展态势，不断满足企业和个人锁定利率和汇率风险的需要，为丰富我国金融市场起到越来越重要的作用。

衍生工具具有产品设计复杂性和交易缺乏透明度的特点。产品的设计往往需要复杂的数学模型计算，交易往往是一对一的相对交易，缺乏流动性。因此，学习和认知衍生产品是正确使用的重要前提。

本书是约翰·赫尔教授的重要代表作，共有35章，全面系统地介绍了金融衍生产品的理论和实际运用，深入浅出、内容丰富，是一本值得推荐的教科书和参考书。王勇博士和索吾林教授在国外银行和高等学府多年从事衍生产品风险管理和教学工作，在理论和实践方面均有较深的造诣。王勇博士著有多部关于风险管理和衍生工具方面的著作，并多次为国内金融机构高级管理人员进行授课；索吾林教授也著有多篇关于衍生产品的文章。由王勇博士和索吾林教授翻译本书可以准确地把握好原著的专业性。本书中文版的发行无疑将为国内金融从业人员和理论研究人员提供一部优秀的教材，帮助金融从业人员加深对衍生产品的认识，从而推动我国金融衍生市场的发展。

中国光大银行行长　郭　友

推荐序二

2007 年以来的美国次级债风暴，特别是 2008 年 9 月中旬美国雷曼公司申请破产引发的美国以至全球金融危机为全球上了一堂难得的金融衍生产品知识的普及课，该课程目前仍在继续。即使在金融非常发达的北美和西欧，金融衍生产品，特别是银行间的各类金融衍生产品，都仅仅是少数专业人士才能够明白的专门知识。对于次级债风暴和金融危机中涉及的房产按揭抵押证券、债务抵押债券、信用违约互换等银行间或者场外交易的衍生产品在西方发达国家也只是少数金融专才才能完全搞明白的产品。对于金融创新刚刚起步的我国，这些产品对绝大多数投资者，甚至众多金融从业人士都还是相对陌生的词语。

金融危机的持续蔓延使得国内外不少人士认为本次金融危机主要是美国金融创新过度以及衍生产品闯的祸。但是对金融衍生产品稍有研究的人士一定会认为，次级债和金融风暴涉及的各类金融衍生产品皆在十几年甚至几十年前就有了，那么为什么十几年前和几十年没有发生的金融危机在 2007 年却发生了呢？如果我们对一年多来的风暴到危机稍做研究，就会发现，引发本次风暴和危机的根源并不是这些产品，而是这些产品赖以存在的基础市场——“地基”发生了问题。如果地基没打好，上面盖的房子或楼房轻则发生倾斜，重则发生塌陷。美国本次从次级债到危机的最主要的原因是房产按揭贷款审慎原则没有坚持，同时相应的审慎监管也没有到位。所以，衍生产品本身并没有问题，问题在“地基”，问题在监管，问题在杠杆使用程度过高，而并不是产品本身。

孔夫子 2 000 多年前就说过“道之不明也，我知之矣，贤者过之，不肖者不及也”。这里的“道”就是 2 000 多年来扎根于我国文化深层的“中庸之道”。用我们现在的语言来讲，事物的发展总有个度。超过这个度就是过分了，成为过错；与此同时，不到这个度就是没有达到最佳状态，也是过错。从一年多的美国次级债风波到金融危机可以看出，美国金融业杠杆的应用过度了；但近年来我国虽然在金融创新方面取得了可喜的成绩，但市场和产品的发展明显不足，才刚刚起步，离最佳状态还有相当大的距离。所以在金融危机持续和蔓延的今天，我们不仅不能因噎废食，减缓金融创新的步伐，而且还要继续努力推动。

金融衍生产品的发展在西方经历了数十年的历史，有一个从简单到复杂的发展过程。我们应该充分学习和借鉴国外该领域的研究成果和市场发展过程中的经验和教训，结合我国实际情况，逐步、稳健地建立我国多层次的金融市场格局。加拿大多伦多大学约翰·赫尔教授的《期权、期货及其他衍生产品》为我们学习金融衍生产品提供了很好的教材。约翰·赫尔教授是国际衍生产品领域著名专家，他的衍生产品和风险管理著作数十年在国际上是大多数大学本科、研究生、

MBA 等方面主要的教材。本书经过数次更新，目前包括远期、期货、利率互换、外汇互换、信用互换、普通期权、奇异期权、互换期权等国际场内外市场上常用的衍生产品；除了这些产品外，本书对资产证券化产品、抵押债券产品等也有详细的介绍和分析。本书不仅有浅显易懂的实际例子，也有具体的数学模型和定价公式，不仅对于简单的股票、商品、外汇类产品有系统介绍，而且对各类主要利率类和信用类衍生产品也有相当的介绍和分析，对我们了解、熟悉和分析这些产品有相当的参考作用。不仅对产品设计和定价有系统深入的描述，而且对十几年来国际市场上的利率模型和信用模型也有详细的介绍和评论，很有参考意义。

除了对产品和定价有系统的介绍和分析外，作者还用了相当大的篇幅对金融风险对冲和管理的概念、计量、方法、模型等方面进行了系统深入的介绍和分析，特别是对国际市场上 20 年来的主要重大风险事件，比如美国奥兰治县、英国巴林银行、美国长期资本管理公司等，给予了系统的介绍和分析，对于我国金融业风险管控有相当大的借鉴意义。总之，本书可以看成是国际金融衍生产品和风险管理方面的大全书，对相关监管者、市场参与者、广大投资者、学校教授、学生都很有价值。

本书译者王勇博士和索吾林教授在衍生产品和风险管理领域有着多年的实战和教学经验。王勇博士是加拿大资深的风险管理专家，还是美国注册金融分析师（CFA）和注册风险管理师（FRM）。王勇博士既有扎实的数学等学术背景，又有多年金融业从业经验，对十几年来国际市场上的各类金融衍生产品和相应的风险管理有着直接的操作与管理经验。索吾林教授曾师从于约翰·赫尔教授，持有数学和金融专业两个博士头衔，对赫尔教授的作品有着非常深刻的理解，并在衍生产品领域发表多篇学术论文。翻译约翰·赫尔教授的《期权、期货及其他衍生产品》是一项巨大的工程，虽然没有仔细询问翻译工作的详细过程，但是我可以想象翻译原书 800 多页的巨著需要相当多的时间和耐心。相信本书对逐步建立我国多层次金融市场，促进金融创新，加强金融风险管控，提升我国金融业的竞争力等方面皆有相当大的借鉴作用。王勇博士约我为本书中文版作序，在感到高兴的同时，觉得义不容辞。希望我们各界能够认真学习借鉴国外金融业的先进经验，结合我国市场现状，努力推动我国金融创新，为提升我国金融竞争力、建立创新型国家做出贡献。

上海银监局副局长　张光平博士

PDG

译　者　序

若干年前，在刚刚进入金融领域不久，我们有幸在约翰·赫尔教授的课上学习衍生产品理论。在课堂上，赫尔教授利用通俗易懂的语言和数学工具对衍生产品领域中的许多艰涩的概念进行精彩描述。我们被赫尔教授出色的表达力所折服。本书延续了赫尔教授课程的风格，在书中，赫尔教授采用了直观的形式将复杂的衍生产品结构和金融数学问题解释给读者，同时他分析问题的方式又不乏严谨性。

本书常被誉为金融衍生产品领域的"圣经"，这种说法一点都不为过。毫无疑问，衍生产品是近年来金融市场上的最大革新。自2007年至2009年间，美国爆发了严重的金融危机。时至今日，市场上许多投资者对金融危机仍是心有余悸。监管当局出台了许多法令以避免类似危机的发生。金融风暴给我们最大的启示之一是：对金融工具，尤其是衍生工具要充分理解，才能发挥其最大功效，否则后患无穷。

本书英文版从第1版发展到第8版，赫尔教授在他的每次再版过程中都根据金融市场形势，给读者带来最新市场信息，它涉及领域以及讨论文献非常广泛，从业人员从本书上几乎可以找到所有关于衍生产品定价及管理的信息。本书自从问世以来，已经被世界上许多院校用做衍生产品课程的教材，包括本科生、研究生以及MBA。作为参考书，大多数在金融衍生产品领域从事定量工作的人员都持有本书。与我们一样，许多理科背景的从业人员都是从本书开始了解金融衍生产品定价及其市场运作的。

在本书的翻译过程中，我们注意到衍生产品的监管和市场结构正在发生巨大变化，我们对第23章和第24章关于交易对手信用风险的内容特加了一些批注以反映最新市场形势。

在本书的翻译过程中，我们得到了许多人的热情帮助。加拿大皇家银行的袁俊博士、李美蓉博士、杨乐意博士、张万合博士、王雨青博士、何冶奇博士、董方鹏博士、杜宇博士、黄昊晗先生，帝国商业银行的廖嘉博士，Algorithmic 公司的杨熙安博士，第一会达风险管理科技有限公司的隋鹏达先生仔细阅读了中文稿的部分章节并提出了一些宝贵的建议，我们深表感谢。我们的一些朋友对本书的出版也提供了很多帮助，她们分别是鲁菲女士、胡永红女士。来自同济大学的张驰同学对本书的名词翻译提出了中肯的建议，我们在此感谢。我们还要特别感谢机械工业出版社华章分社的工作人员，他们为本书提供了帮助并提出了宝贵的意见及建议。

回首过去几个月的辛劳，家人的体谅和关怀让我们能够尽快完成翻译工作。我们在此要特别感谢我们各自的妻子金燕敏和郝震，本书凝聚了她们对我们的体贴和鼓励。

本书的中文翻译肯定会有不尽如人意之处，我们会在网页 www.drfrm.com 及时贴出勘误表，欢迎读者查询。读者如有任何建议和意见，请与我们联系：yong.wang@rbc.com 或 wsuo@business.queensu.ca。

王　勇　索吾林

于加拿大多伦多

前　　言

有时连我自己都难以相信本书的第1版只有13章，篇幅只有330页！在过去15年里，我必须不断地扩充本书的内容以跟上衍生产品市场迅速发展的趋势。

与本书的前几版类似，这一版的读者也有几类。本书可作为商学、经济学、金融数学以及金融工程专业的研究生教材，也可以作为高年级中具有较好定量数学背景的本科生教材。另外，衍生产品市场从业人员会发现本书是一本很有用的参考书。购书的读者中有一半是衍生产品市场中的分析员、交易员以及其他有关从业人员，对这一点我感到非常欣慰。

执笔衍生产品写作的作者必须做出的一个关键性决策是有关数学的运用程度，如果书中采用的数学难度太大，那么许多学生和从业人员会认为内容高不可攀；如果书中采用数学难度太浅，那么对许多重要问题的讨论会不可避免地停留在非常浅显的水平。在写作中，我对书中采用的数学和符号的处理非常谨慎，一些非关键的数学内容或者被省略或者被包含在每章末的附录中，也有一些内容可以在作者的网页上获得。我仔细解释了对许多读者而言有可能是新的概念，并针对这些概念给出了许多数值计算例子。

本书可用于衍生产品的入门课程，也可用于高级课程。教师在课堂上可以多种形式应用此书。讲授衍生产品入门课程的教师可以将课堂的大部分时间花在书的前半部分；讲授衍生产品高级课程的教师可以将本书的后半部分进行不同组合来进行教学。我发现无论是对于入门课程还是高级课程而言，第35章的内容都十分有益。

本版新增内容

本书的很多内容都得到了改进和更新，第8版的更新包括：

1. 本书添加了一章（第8章）描述证券化和信用危机的内容。第7版出版以后金融市场的新动向与第8章的内容有很大关联。

2. 本书增加了更多关于商品价格的模拟和商品衍生产品定价的内容（第33章），能源衍生产品和其他商品衍生产品在近年来变得越来越重要。

3. 关于利用期货进行对冲的章节（第3章）得以简化，在这一章的附录中，我引入了资本资产定价模型，有若干授课教师曾提出这种改动建议。

4. 在本版中，我引入了中心结算、流动性风险和隔夜指数互换等内容。在信用危机以后，这些内容都应该为学生所熟知。

5. 在附录12A中，我增加了利用二叉树的极限来推导布莱克-斯科尔斯-默顿公式的内容，有

些教师喜欢用这种方式来引入布莱克-斯科尔斯-默顿公式。

6. 在进行风险价值度计算时，我采用了信用危机期间市场真实数据。在我的网页上，读者可以下载关于这些实例的计算表，这一变化会使得阅读材料更加有趣，作业题也更为丰富。

7. 在本版，我们引入了保本型证券、缺口期权、棘轮期权和跳跃过程等内容，以此来反映这些内容在衍生产品市场的重要性。

8. 本版增加了一些关于 Vasicek 和 CIR 模型应用的内容，这些材料可以帮助读者进一步理解关键概念，这对于精算专业的学生和基金经理来讲非常重要。

9. DerivaGem 软件有几点更新，现在该软件可用于对信用衍生产品定价，这一软件也有了 Mac 的 Open Office 和 Linux 版本。根据很多用户的需求，我给出了 DerivaGem 软件函数的程序。在本书的最后，我给出了一个易于理解的说明。

10. 在每章结束时，我增加了一些新的习题。

软件

本书包括 DerivaGem 软件 2.01 版，该软件包括两个 Excel 的应用：期权计算器（Options Calculator）及应用工具（Applications Builder）。期权计算器包括前期发行的软件（对于工作页的启动改进），应用工具中包括若干 Excel 函数，用户可以在这些函数的基础上研发自身的应用程序，应用工具中包括若干样本程序，学生可以利用这些程序来验证期权的性质并可以比较容易地将这些程序用于数值计算，教师也可以用这些函数来设计更为有趣的作业题。

DerivaGem 软件最新版本可用于对信用衍生产品定价，该软件某一版本与 Mac 的 Open Office 和 Linux 系统兼容，用户可以直接接触 DerivaGem 软件函数的程序。DerivaGem 易于安装，本书最后附有一个易于理解的说明。

本书的最后有关于这一软件的说明，用户可以在我的网页上下载该软件的最新版本：http：//www. rotman. utoronto. ca/~hull。

题库

经改进的题库包括多项选择题和一些需要简要计算的考试题，教师可以采用这一题库对学生进行测验。

技术报告

书中的某些观点是通过技术报告（Technical Notes）来说明的。读者可以在我的网页上下载这些技术报告，见 http：//www. rotman. utoronto. ca/~hull/TechnicalNotes。在本书中，我之所以没有包括这些技术报告是为了能够更好地组织材料，以保证学生更好地理解所介绍的内容。

致谢

在本书写作过程中，许多人提供了帮助。事实上，如果一一列举所有给过建议的人，那所占篇幅就太长了。在这里我想强调，我特别受益于许多学术界用本书授课的同仁的建议，以及金融

目　录

推荐序一

推荐序二

译者序

前言

作者简介

译者简介

第 1 章　导言 …… 1

1.1　交易所市场 …… 1

1.2　场外市场 …… 2

1.3　远期合约 …… 4

1.4　期货合约 …… 5

1.5　期权合约 …… 6

1.6　交易员的种类 …… 8

1.7　对冲者 …… 8

1.8　投机者 …… 9

1.9　套利者 …… 11

1.10　危害 …… 12

小结 …… 13

推荐阅读 …… 13

练习题 …… 13

作业题 …… 15

第 2 章　期货市场的运作机制 …… 16

2.1　背景知识 …… 16

2.2　期货合约的规定 …… 17

2.3　期货价格收敛到即期价格的特性 …… 19

2.4　保证金的运作 …… 20

2.5 场外市场 …… 22
2.6 市场报价 …… 24
2.7 交割 …… 26
2.8 交易员类型和交易指令类型 …… 27
2.9 制度 …… 28
2.10 会计和税收 …… 29
2.11 远期与期货合约比较 …… 30
小结 …… 31
推荐阅读 …… 32
练习题 …… 32
作业题 …… 33

第3章 利用期货的对冲策略 …… 35
3.1 基本原理 …… 35
3.2 拥护与反对对冲的观点 …… 37
3.3 基差风险 …… 39
3.4 交叉对冲 …… 41
3.5 股指期货 …… 43
3.6 向前滚动对冲 …… 48
小结 …… 49
推荐阅读 …… 50
练习题 …… 50
作业题 …… 51
附录3A 资本资产定价模型 …… 53

第4章 利率 …… 54
4.1 利率的种类 …… 54
4.2 利率的计量 …… 56
4.3 零息利率 …… 57
4.4 债券定价 …… 58
4.5 国库券零息利率的确定 …… 59
4.6 远期利率 …… 60
4.7 远期利率合约 …… 62
4.8 久期 …… 63
4.9 曲率 …… 66
4.10 利率期限结构理论 …… 66

小结 …… 68
推荐阅读 …… 69
练习题 …… 69
作业题 …… 70

第5章 远期和期货价格的确定 …… 72
5.1 投资资产与消费资产 …… 72
5.2 卖空交易 …… 72
5.3 假设与符号 …… 73
5.4 投资资产的远期价格 …… 74
5.5 提供已知中间收入的资产 …… 76
5.6 收益率为已知的情形 …… 77
5.7 远期合约的定价 …… 78
5.8 远期和期货价格相等吗 …… 79
5.9 股指期货价格 …… 80
5.10 货币的远期和期货合约 …… 81
5.11 商品期货 …… 83
5.12 持有成本 …… 85
5.13 交割选择 …… 86
5.14 期货价格与预期即期价格 …… 86
小结 …… 88
推荐阅读 …… 88
练习题 …… 88
作业题 …… 90

第6章 利率期货 …… 91
6.1 天数计算和报价惯例 …… 91
6.2 美国国债期货 …… 93
6.3 欧洲美元期货 …… 96
6.4 利用期货基于久期的对冲 …… 100
6.5 对于资产与负债组合的对冲 …… 101
小结 …… 101
推荐阅读 …… 102
练习题 …… 102
作业题 …… 103

第 7 章　互换 …… 105

7.1　互换合约的机制 …… 105

7.2　天数计量惯例 …… 109

7.3　确认书 …… 110

7.4　比较优势的观点 …… 110

7.5　互换利率的实质 …… 113

7.6　确定 LIBOR/互换零息利率 …… 113

7.7　利率互换的定价 …… 114

7.8　隔夜指数互换 …… 116

7.9　货币互换 …… 117

7.10　货币互换的定价 …… 119

7.11　信用风险 …… 121

7.12　其他类型的互换 …… 122

小结 …… 124

推荐阅读 …… 124

练习题 …… 125

作业题 …… 126

第 8 章　证券化与 2007 年信用危机 …… 128

8.1　证券化 …… 128

8.2　美国住房市场 …… 130

8.3　问题的症结 …… 133

8.4　危机带来的后果 …… 135

小结 …… 136

推荐阅读 …… 136

练习题 …… 137

作业题 …… 137

第 9 章　期权市场机制 …… 138

9.1　期权的类型 …… 138

9.2　期权头寸 …… 139

9.3　标的资产 …… 140

9.4　股票期权的特征 …… 141

9.5　交易 …… 144

9.6　佣金 …… 144

9.7　保证金 …… 145

PDG

9.8 期权结算公司 …… 146
9.9 监管规则 …… 147
9.10 税收 …… 147
9.11 认股权证、雇员股票期权及可转换证券 …… 148
9.12 场外市场 …… 149
小结 …… 149
推荐阅读 …… 149
练习题 …… 150
作业题 …… 151

第10章 股票期权的性质 …… 152
10.1 影响期权价格的因素 …… 152
10.2 假设及符号 …… 155
10.3 期权价格的上限与下限 …… 155
10.4 看跌-看涨平价关系式 …… 157
10.5 提前行使期权：无股息股票的看涨期权 …… 160
10.6 提前行使期权：无股息股票的看跌期权 …… 161
10.7 股息对于期权的影响 …… 162
小结 …… 163
推荐阅读 …… 164
练习题 …… 164
作业题 …… 165

第11章 期权交易策略 …… 166
11.1 保本债券 …… 166
11.2 包括单一期权与股票的策略 …… 167
11.3 差价 …… 168
11.4 组合策略 …… 174
11.5 具有其他收益形式的组合 …… 176
小结 …… 177
推荐阅读 …… 177
练习题 …… 177
作业题 …… 178

第12章 二叉树 …… 180
12.1 单步二叉树模型与无套利方法 …… 180

12.2 风险中性定价 …… 183
12.3 两步二叉树 …… 184
12.4 看跌期权实例 …… 186
12.5 美式期权 …… 186
12.6 Delta …… 187
12.7 选取 u 和 d 使二叉树与波动率吻合 …… 188
12.8 二叉树公式 …… 189
12.9 增加二叉树的时间步数 …… 190
12.10 使用 DerivaGem 软件 …… 190
12.11 对于其他标的资产的期权 …… 190
小结 …… 193
推荐阅读 …… 193
练习题 …… 194
作业题 …… 194
附录 12A 由二叉树模型推导布莱克-斯科尔斯-默顿期权定价公式 …… 195

第 13 章 维纳过程和伊藤引理 …… 198

13.1 马尔科夫性质 …… 198
13.2 连续时间随机变量 …… 199
13.3 描述股票价格的过程 …… 202
13.4 参数 …… 204
13.5 相关过程 …… 205
13.6 伊藤引理 …… 205
13.7 对数正态分布的性质 …… 206
小结 …… 207
推荐阅读 …… 208
练习题 …… 208
作业题 …… 209
附录 13A 伊藤引理的推导 …… 209

第 14 章 布莱克-斯科尔斯-默顿模型 …… 211

14.1 股票价格的对数正态分布性质 …… 211
14.2 收益率的分布 …… 213
14.3 预期收益率 …… 213
14.4 波动率 …… 214
14.5 布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程的概念 …… 217

14.6　布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程的推导 …… 218
14.7　风险中性定价 …… 220
14.8　布莱克-斯科尔斯-默顿定价公式 …… 221
14.9　累积正态分布函数 …… 222
14.10　权证与雇员股票期权 …… 223
14.11　隐含波动率 …… 225
14.12　股息 …… 226
小结 …… 228
推荐阅读 …… 229
练习题 …… 230
作业题 …… 231
附录 14A　布莱克-斯科尔斯-默顿公式的证明 …… 232

第 15 章　雇员股票期权 …… 235
15.1　合约的设计 …… 235
15.2　期权会促进股权人与管理人员的利益一致吗 …… 236
15.3　会计问题 …… 237
15.4　定价 …… 238
15.5　倒填日期丑闻 …… 241
小结 …… 242
推荐阅读 …… 242
练习题 …… 243
作业题 …… 244

第 16 章　股指期权与货币期权 …… 245
16.1　股指期权 …… 245
16.2　货币期权 …… 247
16.3　支付连续股息的股票期权 …… 248
16.4　欧式股指期权的定价 …… 250
16.5　货币期权的定价 …… 252
16.6　美式期权 …… 253
小结 …… 253
推荐阅读 …… 254
练习题 …… 254
作业题 …… 255

第 17 章 期货期权 …… 257
17.1 期货期权的特性 …… 257
17.2 期货期权被广泛应用的原因 …… 259
17.3 欧式即期期权和欧式期货期权 …… 259
17.4 看跌-看涨期权平价关系式 …… 260
17.5 期货期权的下限 …… 260
17.6 采用二叉树对期货期权定价 …… 261
17.7 期货价格在风险中性世界的漂移率 …… 262
17.8 对于期货期权定价的布莱克模型 …… 263
17.9 美式期货期权与美式即期期权 …… 265
17.10 期货式期权 …… 265
小结 …… 266
推荐阅读 …… 266
练习题 …… 266
作业题 …… 267

第 18 章 希腊值 …… 269
18.1 例解 …… 269
18.2 裸露头寸和带保头寸 …… 269
18.3 止损交易策略 …… 270
18.4 Delta 对冲 …… 271
18.5 Theta …… 276
18.6 Gamma …… 277
18.7 Delta、Theta 和 Gamma 之间的关系 …… 280
18.8 Vega …… 280
18.9 Rho …… 282
18.10 对冲的现实性 …… 282
18.11 情景分析 …… 283
18.12 公式的推广 …… 283
18.13 资产组合保险 …… 285
18.14 股票市场波动率 …… 287
小结 …… 287
推荐阅读 …… 288
练习题 …… 288
作业题 …… 290

PDG

附录 18A　泰勒级数展开和对冲参数 …… 291

第 19 章　波动率微笑 …… 292
19.1　为什么波动率微笑对看涨期权与看跌期权是一样的 …… 292
19.2　货币期权 …… 293
19.3　股票期权 …… 295
19.4　其他刻画波动率微笑的方法 …… 296
19.5　波动率期限结构与波动率曲面 …… 297
19.6　希腊值 …… 298
19.7　模型的作用 …… 298
19.8　当预期会有价格大跳跃时 …… 298
小结 …… 299
推荐阅读 …… 300
练习题 …… 300
作业题 …… 301
附录 19A　由波动率微笑确定隐含风险中性分布 …… 302

第 20 章　基本数值方法 …… 304
20.1　二叉树 …… 304
20.2　采用二叉树来对股指、货币与期货期权定价 …… 310
20.3　对于支付股息股票的二叉树模型 …… 311
20.4　构造树形的其他方法 …… 315
20.5　参数依赖于时间的情形 …… 316
20.6　蒙特卡罗模拟法 …… 317
20.7　方差缩减程序 …… 322
20.8　有限差分法 …… 324
小结 …… 331
推荐阅读 …… 332
练习题 …… 332
作业题 …… 334

第 21 章　风险价值度 …… 335
21.1　VaR 测度 …… 335
21.2　历史模拟法 …… 337
21.3　模型构建法 …… 340
21.4　线性模型 …… 341

21.5 二次模型 …… 345
21.6 蒙特卡罗模拟 …… 346
21.7 不同方法的比较 …… 347
21.8 压力测试与回顾测试 …… 347
21.9 主成分分析法 …… 348
小结 …… 350
推荐阅读 …… 351
练习题 …… 351
作业题 …… 352

第 22 章 估计波动率和相关系数 …… 354
22.1 估计波动率 …… 354
22.2 指数加权移动平均模型 …… 355
22.3 GARCH（1,1）模型 …… 356
22.4 模型选择 …… 358
22.5 极大似然估计法 …… 358
22.6 采用 GARCH（1,1）模型来预测波动率 …… 362
22.7 相关系数 …… 364
22.8 将 EWMA 应用于 4 个指数的例子 …… 366
小结 …… 367
推荐阅读 …… 368
练习题 …… 368
作业题 …… 369

第 23 章 信用风险 …… 371
23.1 信用评级 …… 371
23.2 历史违约概率 …… 371
23.3 回收率 …… 373
23.4 由债券价格来估计违约概率 …… 373
23.5 违约概率的比较 …… 375
23.6 利用股价估计违约概率 …… 377
23.7 衍生产品交易中的信用风险 …… 379
23.8 信用风险的缓解 …… 381
23.9 违约相关性 …… 383
23.10 信用 VaR …… 385
小结 …… 387

推荐阅读 …… 387
练习题 …… 388
作业题 …… 389

第 24 章 信用衍生产品 …… 391
24.1 信用违约互换 …… 392
24.2 信用违约互换的定价 …… 394
24.3 信用指数 …… 397
24.4 固定券息的使用 …… 398
24.5 信用违约互换远期合约及期权 …… 399
24.6 篮筐式信用违约互换 …… 399
24.7 总收益互换 …… 399
24.8 债务抵押债券 …… 400
24.9 相关系数在篮筐式信用违约互换与 CDO 中的作用 …… 402
24.10 合成 CDO 的定价 …… 402
24.11 其他模型 …… 407
小结 …… 408
推荐阅读 …… 409
练习题 …… 409
作业题 …… 410

第 25 章 特种期权 …… 411
25.1 组合期权 …… 411
25.2 非标准美式期权 …… 412
25.3 缺口期权 …… 412
25.4 远期开始期权 …… 413
25.5 棘轮期权 …… 413
25.6 复合期权 …… 413
25.7 选择人期权 …… 414
25.8 障碍式期权 …… 414
25.9 二元式期权 …… 417
25.10 回望式期权 …… 417
25.11 喊价式期权 …… 419
25.12 亚式期权 …… 419
25.13 资产交换期权 …… 420
25.14 涉及多种资产的期权 …… 421

25.15 波动率和方差互换 …… 422
25.16 静态期权复制 …… 424
小结 …… 426
推荐阅读 …… 426
练习题 …… 427
作业题 …… 428

第 26 章 再论模型和数值算法 …… 430
26.1 布莱克-斯科尔斯-默顿的替代模型 …… 430
26.2 随机波动率模型 …… 434
26.3 IVF 模型 …… 436
26.4 可转换债券 …… 436
26.5 依赖路径衍生产品 …… 438
26.6 障碍式期权 …… 441
26.7 与两个相关资产有关的期权 …… 444
26.8 蒙特卡罗模拟与美式期权 …… 445
小结 …… 448
推荐阅读 …… 449
练习题 …… 449
作业题 …… 451

第 27 章 鞅与测度 …… 452
27.1 风险市场价格 …… 452
27.2 多个状态变量 …… 455
27.3 鞅 …… 456
27.4 计价单位的其他选择 …… 457
27.5 多个独立因子的情况 …… 460
27.6 改进布莱克模型 …… 460
27.7 资产交换期权 …… 461
27.8 计价单位变换 …… 462
小结 …… 463
推荐阅读 …… 463
练习题 …… 463
作业题 …… 464

第 28 章 利率衍生产品：标准市场模型 …… 466
28.1 债券期权 …… 466

28.2 利率上限和下限 …… 469
28.3 欧式利率互换期权 …… 474
28.4 推广 …… 477
28.5 利率衍生产品的对冲 …… 477
小结 …… 478
推荐阅读 …… 478
练习题 …… 478
作业题 …… 480

第 29 章 曲率、时间与 Quanto 调整 …… 481
29.1 曲率调整 …… 481
29.2 时间调整 …… 483
29.3 QUANTO …… 485
小结 …… 487
推荐阅读 …… 487
练习题 …… 488
作业题 …… 489
附录 29A 曲率调整公式的证明 …… 489

第 30 章 利率衍生产品：短期利率模型 …… 491
30.1 背景 …… 491
30.2 均衡模型 …… 492
30.3 无套利模型 …… 496
30.4 债券期权 …… 499
30.5 波动率结构 …… 500
30.6 利率树形 …… 501
30.7 建立树形的过程 …… 502
30.8 校正 …… 510
30.9 利用单因子模型进行对冲 …… 511
小结 …… 511
推荐阅读 …… 511
练习题 …… 512
作业题 …… 513

第 31 章 利率衍生产品：HJM 与 LMM 模型 …… 515
31.1 Heath、Jarrow 和 Morton 模型 …… 515

31.2 LIBOR 市场模型 …… 517
31.3 联邦机构房产抵押贷款证券 …… 524
小结 …… 526
推荐阅读 …… 527
练习题 …… 527
作业题 …… 528

第 32 章 再谈互换 …… 529
32.1 标准交易的变形 …… 529
32.2 复合互换 …… 530
32.3 货币互换 …… 531
32.4 更复杂的互换 …… 532
32.5 股权互换 …… 534
32.6 具有内含期权的互换 …… 535
32.7 其他互换 …… 537
小结 …… 538
推荐阅读 …… 538
练习题 …… 538
作业题 …… 539

第 33 章 能源与商品衍生产品 …… 540
33.1 农产品 …… 540
33.2 金属 …… 541
33.3 能源产品 …… 541
33.4 商品价格模型 …… 542
33.5 气候衍生产品 …… 547
33.6 保险衍生产品 …… 547
33.7 气候与保险衍生产品定价 …… 548
33.8 能源生产商如何对冲风险 …… 549
小结 …… 549
推荐阅读 …… 550
练习题 …… 550
作业题 …… 551

第 34 章 实物期权 …… 552
34.1 资本投资评估 …… 552

34.2 风险中性定价的推广 ………… 553
34.3 估计风险市场价格 ………… 554
34.4 对业务的评估 ………… 555
34.5 投资机会中期权的定价 ………… 556
小结 ………… 560
推荐阅读 ………… 560
练习题 ………… 561
作业题 ………… 561

第 35 章 重大金融损失与借鉴 ………… 562
35.1 定义风险额度 ………… 564
35.2 对于金融机构的教训 ………… 565
35.3 对于非金融机构的教训 ………… 569
小结 ………… 570
推荐阅读 ………… 570

术语表 ………… 571

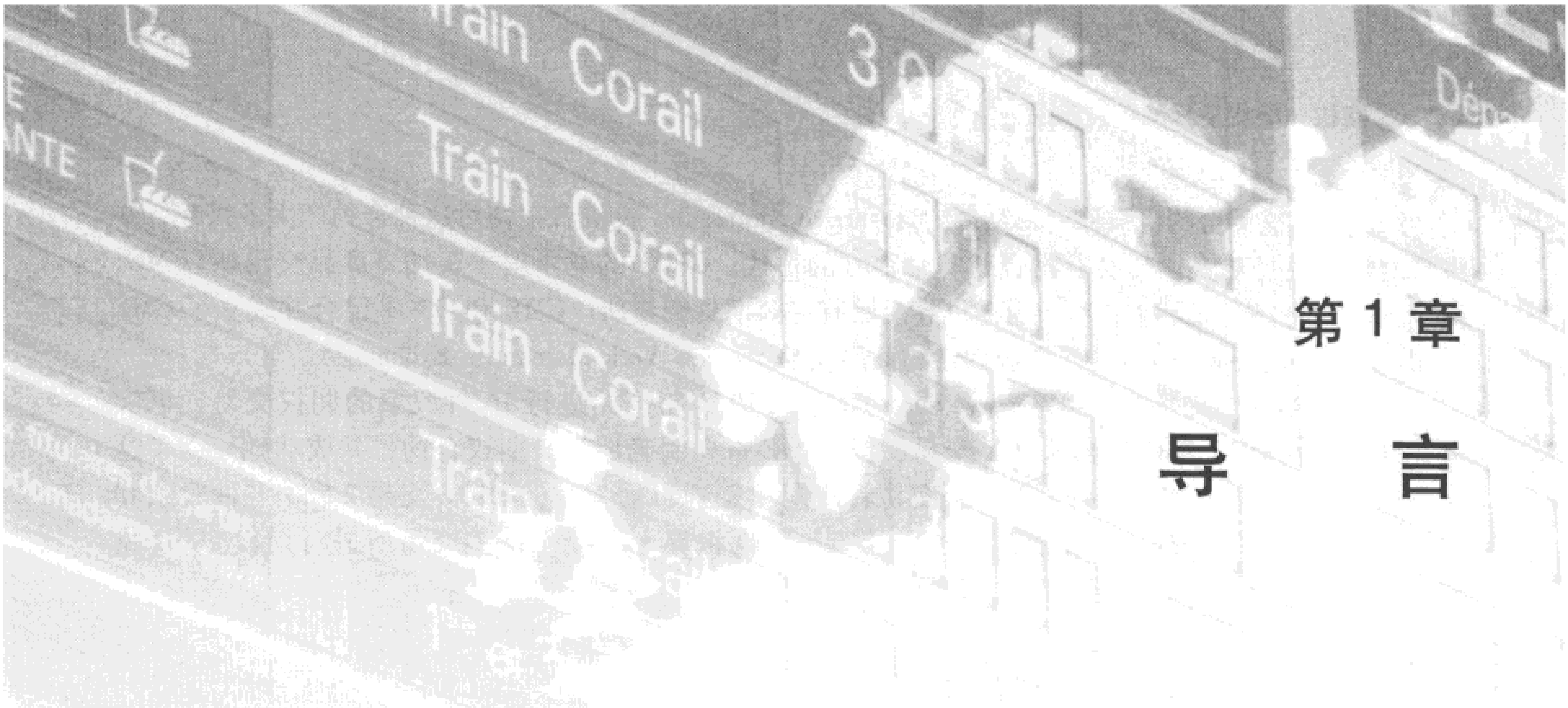
附录 A DerivaGem 软件 ………… 586

附录 B 世界上的主要期权期货交易所 ………… 590

附录 C $x\leqslant 0$ 时 $N(x)$ 的取值 ………… 591

附录 D $x\geqslant 0$ 时 $N(x)$ 的取值 ………… 592

PDG



第 1 章 导 言

在过去的 30 年中，衍生产品市场在金融领域变得越来越重要。现在，期货和期权交易在全世界的许多交易所都十分活跃。在场外市场，金融机构、基金经理和企业的资金部之间经常进行远期合约、互换、期权和其他形式的衍生产品交易。我们常常看到衍生产品被嵌入债券，用于公司高管的报酬，用于资本投资项目，用于将按揭风险从发起人转移到投资人，等等。我们已经进入一个崭新的阶段，在这一阶段，每一个金融从业人员都应该了解衍生产品市场的运作机制、衍生产品的应用以及产品的定价过程。

不管你是喜欢还是厌恶衍生产品，你绝不可忽略它们！衍生产品的市场规模巨大：如果以标的资产进行衡量，衍生产品市场的规模远远大于股票市场，衍生产品标的资产价值是全世界经济总产值的若干倍。从本章中我们将会看到，衍生产品可用于对冲风险、投机和套利。在转移风险的过程中，衍生产品起着一个非常关键的作用。

衍生产品(derivative)是指由某种更为基本的变量派生出来的产品。衍生产品的标的变量常常是某种交易资产的价格。例如，股票期权是由股票派生出的衍生产品。然而，衍生产品价格几乎可以依赖于任何变量，其中包括猪肉价格到某个滑雪胜地的降雪量。

自本书第 1 版在 1988 年出版以来，衍生产品市场发生了许多变化。现在，信用衍生产品、电力衍生产品、气候衍生产品和保险衍生产品的交易均十分活跃。市场上产生了许多新的关于利率、汇率、股权的衍生产品。关于风险测定和风险管理也出现了许多新的方法。在对资本投资估算方面常常会涉及对所谓**实物期权**(real option)进行分析与估值。本书第 7 版将反映所有这些方面的进展。

因为在 2007 年开始的信用危机中所扮演的角色，衍生产品市场受到了猛烈抨击。利用证券化过程，市场参与者可以从美国市场中具有较大风险的按揭组合派生出新的衍生产品。许多这样的产品在房价下跌时变得一钱不值，全世界的许多金融机构和投资者都蒙受了巨大损失，而且整个世界被拖入了几代人都没有经历过的经济萧条之中。本书新加的第 8 章解释了证券化过程，同时说明了为什么会有这样的损失。正是由于信用危机，衍生产品市场比过去受到了更加严格的监管。例如，银行需要对自己承担的风险设定更多的资本金，同时也需要对流动性的管理投入更多的精力。

在本书第 1 章中，我们首先讨论一下远期、期货和期权市场，然后我们将大体讨论一下市场对冲者、投机者以及套利者如何使用这些衍生产品。在以后的章节中，我们将更为详细地讨论这些课题。

1.1 交易所市场

在衍生产品交易所市场中，人们交易的是经过交易所标准化之后的衍生产品。衍生产品交易所很早以前就已经存在。芝加哥交易所(CBOT，www.cbot.com)成立于 1848 年，该交易所将农场主和商人汇集到一起，最初 CBOT 的职能是将交易谷物的数量和质量标准化。几年以后，在 CBOT 产生了最初的期

货合约。那时这类合约也被称为**将至合约**(to-arrive contract)。投机者很快对这种合约产生了兴趣，并发现这种合约是对直接交易谷物合约一个很好的替代。CBOT 的竞争对手芝加哥商品交易所(CME, www.cme.com)成立于 1919 年。现在世界上已有许多期货交易所。CME 和 CBOT 已合并成立了 CME 集团(www.cmegroup.com)，其中包括纽约商品交易所(New York Mercantile Exchange)。

芝加哥期权交易所(CBOE, www.cboe.com)从 1973 年开始进行 16 种股票的期权交易。事实上，期权远在 1973 年前就已经开始交易，但 CBOE 首先明确地定义期权合约，并成功地建立了这样产品的市场。交易所在 1977 年开始交易看跌期权。到目前为止，CBOE 交易 2 500 多种股票和股指期权。与期货一样，期权合约也非常流行。现在世界上已经有许多交易所进行期权交易(见本书附录 B)，其中期权的标的资产包括外汇、期货合约以及股票和股指。

电子交易

传统上，衍生产品交易所是通过所谓的**公开喊价系统**(open-outcry system)来进行的。这一系统包括在交易大厅上的面谈、喊叫和一套复杂的手势来表达交易意向。交易所已逐渐采用**电子交易**(electronic trading)来代替公开喊价系统。在电子交易中，交易员需要将他们的交易指令输入计算机，然后计算机会促成买卖双方的交易。公开喊价系统有它的拥护者，但随着时间的推移，公开喊价系统已变得越来越少。

电子交易促成了算法交易(algorithmic trading)的发展，算法交易也被称为黑箱交易(black-box trading)、自动交易(automated trading)、高频率交易(high-frequency trading)、智能交易(rebo trading)，算法交易就是借助于计算机程序来进行交易，而交易过程无须人员介入。

业界事例 1-1　雷曼的破产

2008 年 9 月 15 日，雷曼兄弟向法庭申请破产保护，这是美国历史上最大一起破产案，整个衍生产品市场受到震动。直到破产的最后时刻，雷曼兄弟一直好像都有生存的机会。几家公司(比如韩国发展银行、英国巴克莱银行以及美国银行)都曾表示有购买雷曼的愿望，可是一直到最后都没有达成交易。许多人认为雷曼会是“大而不倒”的公司，同时认为在最终没有买主的情况下，政府也会出资救助雷曼，但事实并非如此。

究竟发生了什么呢？雷曼的破产是由于高杠杆、高风险投资以及流动性等多种原因。商业银行因承接存款，必须按照监管规定设定一定数量的资本金，但雷曼兄弟是一家投资银行，从而不受这一资本金监管规则的约束。在 2007 年，雷曼兄弟的杠杆比率高达31:1，这意味着资产下跌 3% ~4% 就会消耗掉整个银行的资本金。雷曼主席与首席执行官理查德·福尔德崇尚激进的风险文化，据说他曾对自己的高管讲“每天都是在打仗，你们必须去消灭敌手”。雷曼的首席风险官很有能力，但其影响却有限，这位风险官在 2007 年从高管委员会上被除名。雷曼兄弟最终承担的风险产品包括大量由次债派生出的债券(我们将在第 8 章对这些产品进行讨论)。雷曼的运作依赖短期资金贷款，当市场对雷曼失去信心时，这些贷款人不愿意再将贷款进行延期，因此促使了雷曼的破产。

雷曼在场外衍生产品市场非常活跃，其交易对手数量高达 8 000 多个，交易数量成千上万，雷曼的交易对手在交易中常常要支付抵押品，这些抵押品却被雷曼用于不同的目的。显然，要想搞清楚究竟是谁欠谁的钱，这简直就是个噩梦。

1.2 场外市场

并不是所有的交易都在交易所里进行。**场外市场**(over-the-counter market, OTC)是交易

所交易市场之外的另一种重要形式，而且就交易量而言，已远远超过了交易所市场的规模。场外市场是由电话和计算机将交易员联系在一起的网络系统，交易员通过电话完成的。交易的双方往往是两家金融机构，或者一方是金融机构，而另一方是其客户（某企业的资金主管或基金经理）。金融机构常常是市场流行产品的**做市商**（market maker），这意味着他们准备在提供**买入价**（bid price，即以这一价格买入产品）的同时，也提供**卖出价**（offer price，即以这一价格卖出产品）。

场外市场用于交易的电话通常是被录音的。当交易双方产生分歧时，电话录音可以被用来解决争端。场外市场交易的金额数量往往会大于交易所内的交易。场外交易的最大优点是合约的内容不受交易所的限制，交易双方可以自由商谈来达成对双方都有利的合约。场外交易的缺点是：交易会产生对手信用风险（也就是交易对手存在不履行合约的可能）。在第2章我们将看到，交易所内的交易几乎不太可能触发对手信用风险。

雷曼兄弟曾经是场外衍生产品市场上非常活跃的交易者。如业界事例1-1所述，雷曼的破产为整个市场提供了一次有力的检验。

市场规模

场外市场与交易所市场交易的衍生产品数量都很大。虽然这两个市场的统计结果不具有完全可比性，但很明显，场外市场规模远大于交易所市场。国际清算银行（Bank of International Settlement，www.bis.org）从1998年起开始统计这一数据。图1-1比较了从1998年6月至2009年12月场外市场未平仓交易的面值总和，以及同一时间段的交易所合约中标的资产的总价值。从这些数据我们看到至2009年12月为止，场外市场交易量已经增至614.7万亿美元，而交易所市场交易量只增至73.1万亿美元。

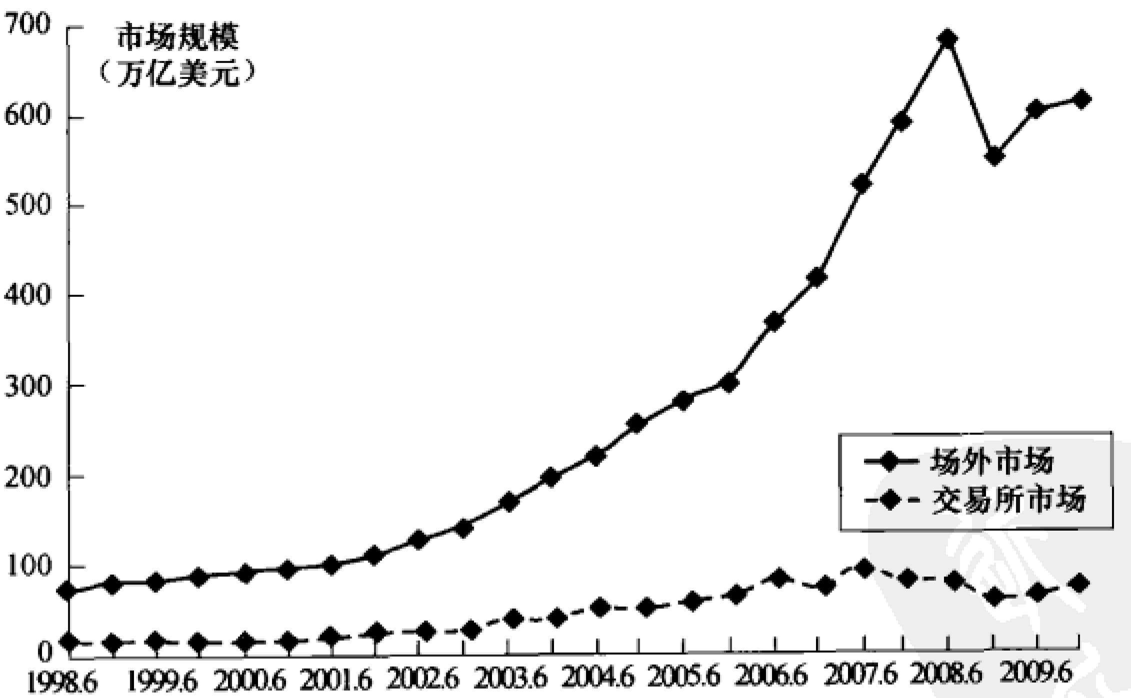


图1-1 场外衍生产品市场和交易所交易市场的规模

在解释这些数据时，我们应该认识到场外市场交易产品的面值与其价值并不是一回事。例如，某场外市场交易合约为1年期的以某一指定汇率以英镑买入1亿美元。这一交易的总面值为1亿美元，但是这一交易的价值可能只有100万美元。国际清算银行估计2009年12月所有场外市场合约的毛价值大概为21.6万亿美元[⊖]。

⊖ 一个对于某一方价值为100万美元，而对另一方价值为-100万美元的交易的毛价值被计为100万美元。

1.3 远期合约

远期合约(forward contract)是一种比较简单的衍生产品，它是在将来某一指定时刻以约定价格买入或卖出某一产品的合约。远期合约与**即期合约**(spot contract)对应，即期合约是指在今天就要买入或卖出资产的合约。远期合约是在场外交易市场中金融机构之间或金融机构与其客户之间的交易。

在远期合约中，同意在将来某一时刻以某一约定价格买入资产的一方被称为**长头寸**(long position，或称多头)，远期合约中的另一方同意在将来某一时刻以同一约定价格卖出资产，这一方被称为**短头寸**(short position，或称空头)。

外汇远期合约在市场上十分流行。许多大银行都雇用了即期和远期合约的交易员。即期交易员进行马上就要交割的交易，远期交易员进行在将来某时刻交割的交易。表 1-1 显示 2010 年 5 月 24 日某跨国银行给出的关于英镑(GBP)和美元(USD)汇率的买入和卖出价格，这里的汇率价格是指 1 英镑可兑现的美元数量。表中第 1 行的数字显示此银行准备以每英镑 1.440 7 美元的价格在即期市场(即马上交割)买入英镑(英镑也被称为 sterling)，同时这家银行也准备以每英镑 1.441 1 美元的价格在即期市场卖出英镑；表中第 2 行、第 3 行和第 4 行显示此银行准备在 1 个月、3 个月和 6 个月后分别以每英镑 1.440 8 美元、1.441 0 美元和 1.441 6 美元的价格买入英镑，同时银行也准备在 1 个月、3 个月和 6 个月后分别以每英镑 1.441 3 美元、1.441 5 美元和 1.442 2 美元的价格卖出英镑。

表 1-1　2010 年 5 月 24 日美元/英镑即期和远期的买入和卖出价

	买入价	卖出价		买入价	卖出价
即期	1.440 7	1.441 1	3 个月远期	1.441 0	1.441 5
1 个月远期	1.440 8	1.441 3	6 个月远期	1.441 6	1.442 2

注：表中所示价格为每英镑所对应的美元价格。

远期合约可以用于对冲外汇风险，假定 2010 年 5 月 24 日，美国某企业的资金部主管已经预知在 6 个月后(2010 年 11 月 24 日)要支付 100 万英镑，这位主管准备对冲外汇风险，他可以同银行达成一个以表 1-1 所示的远期合约，此合约约定在 6 个月后，这家企业必须以每英镑 1.442 2 美元的价格买入 100 万英镑，在远期合约中此企业为长头寸方，也就是说该企业在 2010 年 11 月 24 日以 144.22 万美元的价格买入 100 万英镑。银行在合约中处在短头寸方的位置，也就是说银行必须在 2010 年 11 月 24 日以 144.22 万美元的价格卖出 100 万英镑。企业和银行都必须履行合约。

1.3.1 远期合约的收益

考虑以上刚刚讨论的交易中企业的头寸，远期合约在签署以后会产生什么样的结果呢？在上述远期交易中，企业有义务在 6 个月后以 144.22 万美元价格买入 100 万英镑。当汇率上涨，假如 6 个月后 1 英镑值 1.5 美元，这时对企业来讲，远期合约价值为 +57 800 美元(1 500 000 − 1 442 200)。远期合约保证银行可以以每英镑 1.442 2 美元，而不是 1.5 美元的价格买入 100 万英镑。类似地，当在 6 个月后汇率降到 1.35 时，对企业来讲，远期合约价值为 −92 200 美元，而对银行来讲，合约的价值为 +92 200 美元。这时企业买入英镑的价格比市场价格要贵 92 200 美元。

通常来讲，在合约到期时，对于远期合约长头寸方，每一单位的合约收益为

$$S_T - K$$

式中，K 为合约的执行价格，S_T 为资产在合约到期时的市场价格，合约约定长头寸方必须以 K 的价格买入价值为 S_T 的资产。同样，对于远期合约的短头寸方来讲，合约所带来的收益为

$$K - S_T$$

以上所列的两项收益可正可负，这些收益见图1-2。因为进入远期合约的费用为0，所以合约的收益也就是交易员所有的盈利或亏损。

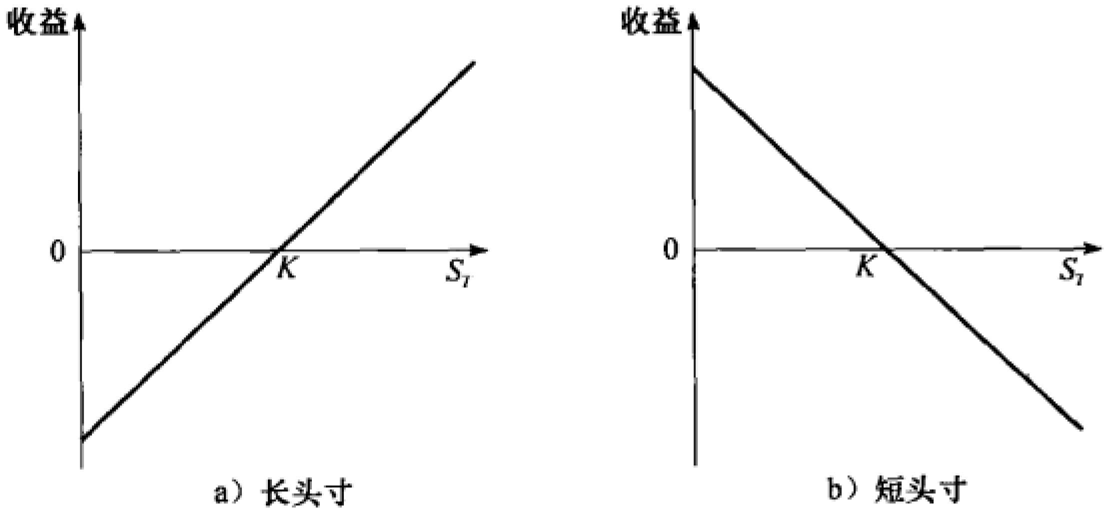


图1-2 远期合约的收益

合约的执行价格 $=K$，资产在合约到期时的价格 $=S_T$

在以上例子中，$K=1.442\,2$，企业持有长头寸。当 $S_T=1.5$ 时，每英镑的收益为0.057 8美元；当 $S_T=1.35$ 时，每英镑的收益为 -0.092 2 美元。

1.3.2 远期价格和即期价格

我们将在第5章详细地讨论远期价格和**即期价格**(spot price)的关系。为了粗略地描述两者之间的关系，考虑现价为60美元的无股息股票。假定在1年时借入和借出现金的利率均为5%，一年期的远期价格为多少呢?

答案是60美元以5%利率增长到1年时的数量，即63美元。如果远期价格在1年时大于63美元，假定为67美元。你可以借入60美元资金，买入股票，以远期合约注明的价格在1年后以67美元卖出股票。1年后，偿还贷款，你可盈利4美元；如果远期价格在1年时小于63美元，假定为58美元。在投资组合中持有股票的投资者可以卖出股票获得资金60美元，然后以远期合约注明的价格在1年后以58美元买回股票。以5%进行投资，卖出股票所获得资金60美元的利息为3美元。在1年时以58美元买回股票，投资者在投资组合中仍可持有股票，但同时净获利为5美元。

1.4 期货合约

与远期合约类似，**期货合约**(futures contract)也是在将来某一指定时刻以约定价格买入或卖出某一产品的合约。与远期合约不同的是，期货合约交易是在交易所进行的。为了保证交易的正常进行，交易所对期货合约指定了一些标准特性。期货合约的交易双方并不一定知道交易对手，交易所设定了一套机制来保证交易双方履行合约承诺。

世界上最大的期货交易所是芝加哥交易所(CBOT)和芝加哥商品交易所(CME)，现已合并成为CME集团。在这两个以及世界上其他的交易所中，期货交易的标的资产涉及广泛的商品资产和金融资产，商品资产包括猪肉、活牛、糖、羊毛、木材、黄铜、铝、黄金和锡；金融资产包括股指、货币和国债。期货价格在金融媒体中有所公布。假定在9月1日的12月份黄金期货的价格为1 080美元，该价格为剔除佣金后，交易员同意买入或卖出在12月份交割的黄金价格。同其他资产价格一样，这一价格在交易所交易大厅由资产的供需关系决定。如果较多的交易员想买入资产而不是卖出资产，价格就会上涨；如果有较多的交易员想卖出资产而不是买入资产，价格会下跌。

在第2章中将进一步讨论保证金要求、每日结算过程、交割过程、卖出-买人差价和交易所结算中心的作用。

1.5 期权合约

期权产品在交易所市场以及场外市场均有买卖。期权产品可以分成两个基本类型，**看涨期权**(call option)的持有者有权在将来某一特定时间以某一确定价格买入某种资产，**看跌期权**(put option)的持有者有权在将来某一特定时间以某一确定价格卖出某种资产。期权产品中所说的确定价格被称为**执行价格**(exercise price)或**敲定价格**(strike price)；期权产品所指的特定时间被称为**到期日**(expiration date)或**满期日**(maturity date)。**美式期权**(American option)是指在到期前的任何时刻，期权持有人均可以行使期权；**欧式期权**(European option)是指期权持有人只能在到期这一特定时刻行使期权[⊖]。在交易所买卖的期权大多为美式期权，标的资产数量通常为100股。欧式期权比美式期权分析起来要容易一些，有些美式期权的特性常常来自欧式期权特性。

这里应该强调的是期权赋予持有者去做某事的权利，当然持有者可以选择不去行使这一权利。与此相比，远期和期货合约中的双方必须要买入或卖出标的资产，这里我们应该注意到进入远期或期货交易不需要任何费用，而拥有期权必须支付期权费(option premium)。

芝加哥期权交易所(CBOE)是世界上最大的股票期权交易所。表1-2给出了谷歌(股票代码为GOOG)股票看涨期权在2010年6月15日的买入价和卖出价，表1-3给出了相应看跌期权的价格。这些报价均来自于CBOE网页。谷歌公司股票在2010年6月15日收盘买入和卖出价格分别为497.07美元和497.25美元，期权的买入－卖出差价通常比其标的股票的差价要大，而且同时也取决于交易量。期权的执行价格分别为460美元、480美元、500美元、520美元、540美元和560美元。表中所示期权的到期日期分别为2010年7月、2010年9月和2010年12月。7月份期权的到期日为2010年7月17日，9月份期权的到期日为2010年9月18日，12月份期权的到期日为2010年12月18日。

表1-2和表1-3说明了期权的一些性质。当执行价格上升时，看涨期权价格下降，而看跌期权价格上升。当期权期限增大时，这两种期权价值均会上升。第10章将讨论期权的性质。

表1-2 谷歌股票看涨期权在2010年6月15日的价格

执行价格	2010年7月		2010年9月		2010年12月	
(美元)	买入价	卖出价	买入价	卖出价	买入价	卖出价
460	43.30	44.00	51.90	53.90	63.40	64.80
480	28.60	29.00	39.70	40.40	50.80	52.30
500	17.00	17.40	28.30	29.30	40.60	41.30
520	9.00	9.30	19.10	19.90	31.40	32.00
540	4.20	4.40	12.70	13.00	23.10	24.00
560	1.75	2.10	7.40	8.40	16.80	17.70

注：股票买入价为497.07美元，卖出价为497.25美元。
资料来源：CBOE。

表1-3 谷歌股票看跌期权在2010年6月15日的价格

执行价格	2010年7月		2010年9月		2010年12月	
(美元)	买入价	卖出价	买入价	卖出价	买入价	卖出价
460	6.30	6.60	15.70	16.20	26.00	27.30
480	11.30	11.70	22.20	22.70	33.30	35.00
500	19.50	20.00	30.90	32.60	42.20	43.00
520	31.60	33.90	41.80	43.60	52.80	54.50
540	46.30	47.20	54.90	56.10	64.90	66.20
560	64.30	66.70	70.00	71.30	78.60	80.00

注：股票买入价为497.07美元，卖出价为497.25美元。
资料来源：CBOE。

⊖ 这里的术语欧式期权及美式期权同这些产品的交易地点及交易中心无关，有些在北美交易中心交易的期权是欧式期权。

假定某投资者向其经纪人发出购买谷歌股票12月看涨期权的指令，期权执行价格为520美元，经纪人在收到指令后会向CBOE的交易员传递购买指令，从而完成这项交易。如表1-2所示，期权的(卖出)价格为32.00美元，这一价格是指买入一只股票的期权价格。在美国，每份股票期权合约的规模为100股，因而投资者必须通过经纪人向交易所注入3 200美元资金，然后交易所会将这笔资金转给期权的卖出方。

在我们的例子中，投资者以3 200美元的价格买入了在将来某时刻以每股520美元价格买入100股谷歌股票的权利。如果在2010年12月18日之前，谷歌的股票价格没有高于520美元，从而期权持有人不会行使权利，投资者(期权持有人)因此也就损失了3 200美元[⊖]。但是，如果谷歌公司的股票表现很好，在期权被行使时谷歌股票(买入)价格为600美元，这时期权持有人能够以每股520美元的价格买入每股实际价值为600美元的股票，这会给投资者带来8 000美元的盈利。将最初买入期权的费用考虑在内后，期权持有人实际盈利为4 800美元[⊜]。

另外一个交易是假定投资者卖出了执行价格为480美元的9月份看跌期权。出售该期权后会马上收入100×22.2=2 220美元。如果谷歌股票价格一直高于480美元，期权也就不会被行使，投资者的收入为2 220美元。但是，如果股票价格下跌，当期权被行使时股票价格为420美元，这时将会发生损失。尽管股票的价格是420美元，但是投资者必须按每股480美元的价格购买100股股票，从而损失6 000美元，将最初的期权收费考虑在内，投资者实际损失为3 780美元。

在CBOE内交易的期权为美式期权。但为了便于讨论，我们假设这些期权为欧式期权，也就是假设这些期权只能在到期日才能行使。将投资者的盈利作为到期时股票价格的函数，我们可以画出期权的收益图，见图1-3。

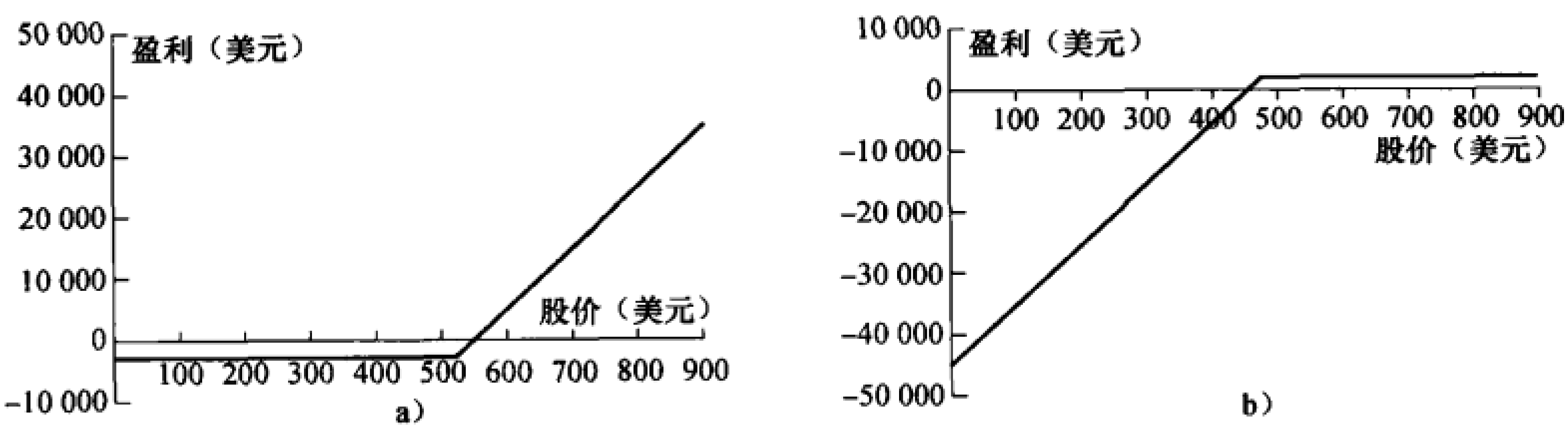


图1-3 交易产生的净盈利

注：该交易假设买入100份12月份到期的谷歌股票看涨期权，执行价格为520美元；卖出100份9月份到期的谷歌股票看跌期权，执行价格为480美元。

后续章节将进一步讨论期权市场的运作机制以及交易员如何对表1-2和表1-3中的期权进行定价。期权市场中有四类参与者：

- 看涨期权的买方；
- 看涨期权的卖方；
- 看跌期权的买方；
- 看跌期权的卖方；

期权的买入方被称为持有长(多)头寸，期权的卖出方被称为持有短(空)头寸，卖出期权也被称为**对期权承约**(writing the option)。

⊖ 计算中没有包括投资者所支付的手续费。

⊜ 在计算中我们没有考虑贴现效应。从理论上讲，应当将行使期权后所得的8 000美元贴现到计算盈利的时间，即2010年6月15日。

1.6 交易员的种类

衍生产品市场已经非常成功，主要原因是这些市场可以吸引许多不同类别的交易员，而且具有极强的流动性。当一个投资者想进入某交易的一方，他会很方便地找到想进入交易的另一方的投资者。

交易员可以分为三大类：**对冲者**(hedger)、**投机者**(speculator)以及**套利者**(arbitrageur)。对冲者采用衍生产品合约来减少自身面临的由于市场变化而产生的风险。投机者利用这些产品对今后市场变量的走向下赌注。套利者采用两个或更多相互抵消的交易来锁定盈利。如业界事例1-2所示，出于以上三个目的，对冲基金已经成为衍生产品最大的用户。

业界事例1-2　对冲基金

对冲基金在近年来已经成为金融市场的重要参与者，它们运用衍生产品进行对冲、投机以及套利。对冲基金与共同基金类似，基金管理者将客户的资金投资，但是对冲基金与共同基金的不同之处是对冲基金的资金来自较为成熟的客户，并且对冲基金不能进行公众融资。共同基金则受监管条约的限制，基金份额随时可以兑现，必须公布投资策略，等等。同时共同基金不能利用杠杆效应，基金不能进行卖空交易，等等。对冲基金并不受这些条例的制约，从而可以采用较为复杂、与众不同并具有独到见解的投资策略。对冲基金管理人的收费与对冲基金的表现有关，一般收费都较高。收费数量可能高达管理资产的1%～2%再加上盈利的20%，等等。对冲基金现在已经变得十分普遍，现有的对冲基金数量已经高达1万亿美元，“基金的基金”(funds of funds)的建立是对对冲基金的组合进行投资。

对冲基金经理采用的投资策略常常包括利用衍生产品来设定投机和套利头寸。一旦设定这些策略后，对冲基金投资经理就要采取以下行动：

- 对基金面临的风险进行评估；
- 确定哪些风险可以接受，哪些风险应该做对冲；
- 设计交易策略(通常会涉及衍生产品)来对冲不可接受的风险。

以下是对冲基金常常采用的交易策略：

股票多空对冲(long/short equities)：对冲组合包括买入价格被市场低估的股票和卖出价格被市场高估的股票，因此市场总体变化趋势对组合的影响会很小。

可转换债券套利(convertible arbitrage)：进入可转换债券的长头寸以及标的股票的短头寸，并以动态形式管理标的股票的短头寸。

受压(高风险)债券(distressed securities)：买入濒临破产企业的债券。

新兴市场(emerging markets)：投资于发展中国家或新兴市场公司的债券和股票，或投资于这些国家的国债。

全球宏观(global macro)：投资反映预期全球宏观经济走势的交易。

兼并套利(merger arbitrage)：在兼并和收购消息公布后交易，同时寄希望于并购交易的成功，以达到盈利的目的。

在接下来的几节中，我们将更详细地讨论每种类型交易员的交易行为。

1.7 对冲者

在本节中，我们将说明对冲者如何利用远期合约和期权来减少自身面临的风险。

1.7.1 利用远期对冲

假定今天是2010年5月24日，一家美国的进口公司ImportCo得知在2010年8月24日将向

一家英国供应商支付1 000万英镑。表1-1列出了金融机构关于美元/英镑汇率的报价。ImportCo可以采用从金融机构买入3个月期限、汇率为1.441 5的英镑远期合约来对冲其外汇风险。这样做的实际效果是向其英国供应商支付的美元数量为14 415 000。

接下来我们考虑另一家美国出口公司ExportCo。该公司向英国出口商品。在2010年5月24日已知公司在3个月后将收入3 000万英镑。ExportCo可以在3个月远期合约中以1.441的价格卖出3 000万英镑。这样做的实际效果是卖出英镑而收入美元的数量为43 230 000美元。

注意，一个公司选择不对冲可能会比选择对冲的盈利效果更好，也有可能更差。考虑ImportCo公司。如果汇率在8月24日为1.3，如果公司没有选择对冲，这时公司对于1 000万英镑只需支付13 000 000美元，这一数量小于14 415 000美元。但如果汇率变为1.5，1 000万英镑值15 000 000美元，这时公司会希望自己进行了对冲！ExportCo的情形与以上刚好相反。如果汇率为8月份低于1.441，那么公司希望进行对冲；如果汇率高于1.441，公司希望自己没有对冲。

这一例子说明了对冲的一个关键性质，即对冲可以减少风险，但对冲后的实际结果(以盈利来衡量)并不一定比不对冲的实际效果更好。

1.7.2 采用期权对冲

期权也可以用于对冲。考虑某投资者在某年5月份拥有1 000股微软股票的情形。股票价格为每股28美元。投资者十分担心今后2个月股票下跌，所以想买入期权保护。投资者可以在CBOT买入10份7月到期的微软股票看跌期权合约，期权的执行价格为27.50美元。持有这一期权可使得投资者以27.5美元的价格卖出1 000股股票。如果期权报价为1美元，每份期权的费用为$100 \times 1 = 100$美元，对冲的整体费用为$10 \times 100 = 1\,000$美元。

这一策略的费用为1 000美元，它可以保证卖出股票的价格在期权期限内至少为27.50美元。如果市场价格低于27.50美元，投资者行使期权，因此持有股票而收入27 500美元。将期权费用考虑在内，实际收入26 500美元。如果股票价格高于27.50美元，期权不会被行使，这时期权到期价值为0。但是拥有股票的实际收入总是高于27 500美元(将期权费用考虑在内，实际收入高于26 500美元)。图1-4显示了交易组合的净值(考虑期权费用以后)与2个月时微软股价的函数关系图形。虚线显示没有对冲时的交易组合的价值。

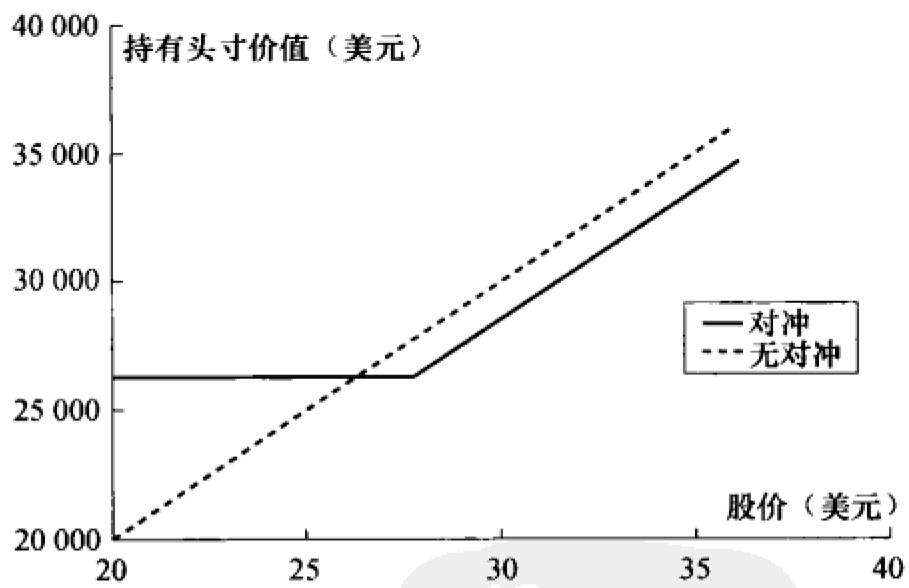


图1-4 微软证券组合在对冲以及不对冲的情形下2个月时的价值

1.7.3 比较

采用期货对冲与采用期权对冲有一个关键差别。以期货合约来中和风险的形式是通过设定买入和卖出标的资产的价格来对冲。与之相反，期权产品提供了价格保险，这些产品对投资者所面临的未来市场不利的价格变化提供保护，同时又允许投资者在价格向有利方面变化时而盈利。与期货不同，拥有期权在最初必须付费。

1.8 投机者

我们接下来考虑投机者如何利用期货和期权来投机。对冲者是想避免面对将来资产不利价格

波动的风险暴露，而投机者建立头寸旨在获取利益。投机者的交易或者对资产的上涨进行下注，或者对资产的下跌进行下注。

1.8.1 采用期货投机

考虑一个美国的投机者，在2月份他认为英镑对于美元在今后2个月会升值。投机者的一种做法是在即期市场买入250 000英镑，然后他希望在今后以更高的价格卖出这些英镑(买入的英镑被存入产生利息的账户之中)。另外一种做法是进入CME的4月份期货合约的长头寸(每一份合约是买入62 500英镑的合约)。表1-4是对以上两种策略的总结，其中当前汇率为1.447(美元/英镑)以及4月份期货价格为1.441。如果汇率在4月份时为1.5，采用期货的做法可以使投机者盈利为(1.5 - 1.441) ×250 000 = 14 750美元。而在采用即期汇率的做法中，投机者以1.447的价格在2月份买入250 000英镑，并以1.5的价格在4月份将英镑卖出，其盈利为(1.5 - 1.447) ×250 000 = 13 250美元。如果汇率跌至1.4，期货带来损失为(1.441 - 1.4) ×250 000 = 10 250美元，而采用即期产品做法的损失为(1.447 - 1.4) = 11 750美元。以上两种做法所产生的盈利和亏损稍有差别，因为对以上两种做法所产生盈利与亏损的计算中没有考虑利息收入和支出。

表1-4　采用即期和期货合约进行投机　(单位：美元)

	2月份交易	
	买入250 000英镑即期价格 = 1.447	买入4份期货合约期货价格 = 1.441
投资	361 750	20 000
4月的即期价格 = 1.5时的盈利	13 250	14 750
4月的即期价格 = 1.4时的盈利	-11 750	-10 250

注：一份期货合约的规模为62 500英镑，初始保证金为20 000美元。

以上两种做法的差别是什么呢？第一种做法需要最初的361 750美元(= 250 000 × 1.447)的投资。与之相比，第二种做法只需要将少量资金存入保证金账户。在第2章中，我们将解释保证金账户的运作过程。在表1-4中，最初的保证金要求为每份合约5 000美元，整体保证金为20 000美元。期货市场可以使投机者取得杠杆效应，即投资者只需要一个少量的初始资金，就可以得到一个很大的投机头寸。

1.8.2 采用期权投机

期权可用来投机。假定现在是10月，一个投机者认为某公司的股票在今后2个月会涨价。股票的当前价格为20美元，期权的执行价格为22.50美元，期限为2个月的看涨期权的当前价格为1美元。表1-5说明了投资者可以选择的两种投资方式。一种方式是买入100股股票。另外一种方式是买入2 000个看涨期权(即20份合约)。假定投资者的预期正确，股票在12月时上涨到27美元。第一种投资方法带来盈利为

$$100 \times (27 - 20) = 700 \text{ 美元}$$

表1-5　将2 000美元投资于某股票的两种不同投资策略的盈亏比较

(单位：美元)

投资策略	12月的股票价格	
	15	27
买入100股股票	-500	700
买入2 000个看涨期权	-2 000	7 000

但这时第二种方法盈利会更高。一个执行价格为22.50美元的看涨期权的收益为4.50美元，因为持有这一期权投资者可以用22.50美元买入价值为27美元的产品。在第二种策略下，持有

2 000个期权的整体收益为

$$2\,000 \times 4.50 = 9\,000 \text{ 美元}$$

将最初的费用扣除，期权投资整体收益为

$$9\,000 - 2\,000 = 7\,000 \text{ 美元}$$

因此买入期权投资策略的盈利是买入股票盈利的10倍。

期权策略也会触发更大的损失。假定股票价格在12月份降至15美元。买入股票投资策略的损失为

$$100 \times (20 - 15) = 500 \text{ 美元}$$

因为期权在到期时价值为0，期权策略的损失为2 000美元，这等于最初付出的期权的费用。图1-5显示了两个交易策略的收益与股票价格的函数关系图形。

与期货类似，期权也会给投资者提供杠杆效应。对于一个给定的投资，期权会放大其最终的效果。好的收益会更好，坏的收益可能会使投资者丧失全部投资。

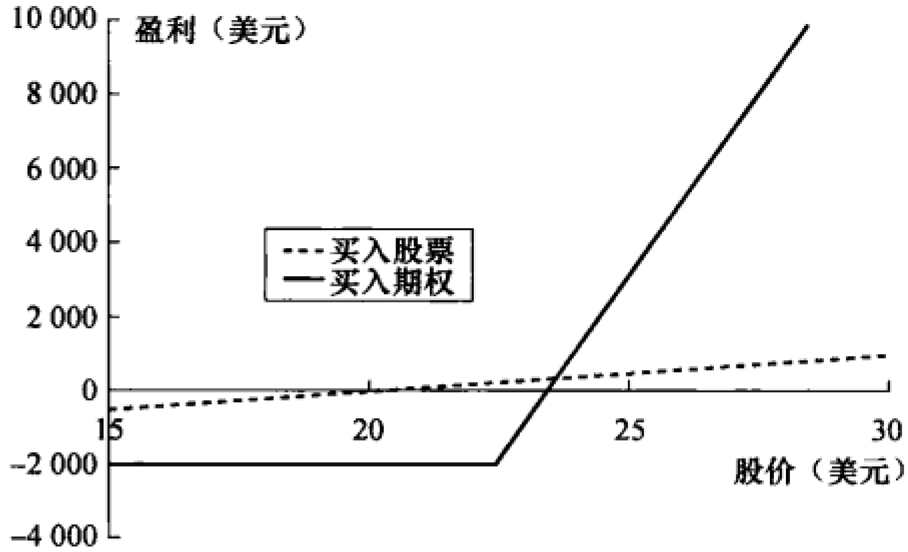


图1-5 对于亚马逊股票的两种投机策略的盈亏

1.8.3 比较

对于投机者所取得的杠杆效应而言，期货和期权比较相似。但是，这两种产品有一个重要区别。投机者采用期货时，潜在的损失以及收益都很大。但采用期权产品时，不管市场有多么糟糕，投机者的损失不会超过其所付的期权费用。

1.9 套利者

套利者是期货、远期以及期权市场的第三类重要的参与者。套利包括同时进入两种或更多的交易来锁定无风险盈利。在后面的章节中，我们将会论述当某一个资产期货价格偏离其即期市场价格时，套利机会如何产生。我们也将检验如何在期权市场中应用套利。在本节中，我们用一个简单的例子来说明套利的概念。

我们考虑在纽约交易所(NYSE，www.nyse.com)和伦敦股票交易所(London Stock Exchange，www.stockex.co.uk)均有交易的某股票。假定这一股票在纽约的价格为140美元，同时在伦敦的价格为100英镑，相应的汇率为每英镑1.43美元。一个套利者可以在纽约买入股票并在伦敦将股票卖出，其无风险盈利

$$100 \times [(1.43 \times 100) - 140]$$

即300美元，计算中忽略了交易费用。交易费用的存在可能会消除小投资者的盈利。但是，大的投资银行在股票市场以及外汇市场的交易费用都很低。投资银行会发现这一套利机会很诱人，它们会竭尽全力从中获利。

以上描述的套利机会不会持续太久。随着套利者在纽约买入股票，供需关系会使股票的美元价格上涨。类似地，随着套利者在伦敦卖出股票，供需关系会使股票的英镑价格下跌。市场会很快使得两个价格在当前汇率下趋向于平衡。事实上，套利者对于套利的急切渴望使得股票的美元价格以及英镑价格在最初就不可能存在如此严重的失衡。依此类推，我们可以说，正是由于套利者的存在，使得实际中大多数金融市场的报价中只会存在很小的套利机会。在本书中，大多数关于期货、远期和期权价格的讨论都是建立在无套利机会的假设之上。

1.10 危害

衍生产品变化莫测，它们可以被用来对冲、投机和套利。产品的多变性会带来危害，有时一些被指定只能做对冲或套利的交易员会在自觉或不自觉中成为市场投机者，而投机的后果有时是灾难性的，法国兴业银行的杰洛米·科维尔为我们提供了一个典型的反面教材（见业界事例1-3）。

业界事例1-3 2008年法国兴业银行的重大损失

衍生产品变化莫测，它们可以被用来对冲风险、投机及套利，有时某些被指定只能做对冲或套利的交易员会在自觉或不自觉中成为市场投机者，这正是公司在交易衍生产品时要面临的挑战之一。

杰洛米·科维尔在2000年加入法国兴业银行，一开始从事合规工作。在2005年，他被提升为初级交易员，在银行的Delta One产品组工作。他主要交易股指，比如德国的DAX股指、法国的CAC 40和欧元的Stoxx 50。他的职责是寻找套利机会，当股指期货在不同交易所的交易价格不同时，套利机会就可能存在，或者当股指期货的价格与构成指数的股票价格不一致时，套利机会也可能会出现（见第5章有关套利的讨论）。

由于科维尔对银行监管流程非常熟悉，他进行了表面上看起来是套利而实际上是投机的交易。他持有很大的股指头寸，同时建立了虚假的对冲交易。事实上，他在豪赌股指的走向，日积月累，其实际未对冲的头寸高达上百亿欧元。

2008年1月，科维尔的行为被法国兴业银行发现，兴业银行用了3天时间对他的头寸进行平仓，损失高达49亿欧元。这是当时金融历史上最大的由舞弊造成的经济损失（后来由麦道夫所做的庞氏骗局的损失更大）。

在2008年之前，由无赖交易员造成的损失早有耳闻。比如20世纪90年代，尼可·利森是巴林银行派往新加坡分行的一名雇员。利森的职责类似于科维尔的职责，他负责在大阪交易所与新加坡交易所之间识别日经225期货指数的套利机会。而在交易过程中，利森由套利者变成了投机者，他用期货和期权对日经225进行豪赌，结果损失近10亿美元，这一损失造成了一家有近200年历史的银行破产。在2002年，爱尔兰银行的约翰·卢斯内克被发现因进行非授权的外汇投机交易而损失7亿美元。从以上事例中，我们可以吸取一个重要的教训：在交易行为中，金融或非金融机构一定要为交易员界定一个清晰的限额，并对限额进行谨慎的检测以便保证交易员遵守限额。

要想避免类似兴业银行的错误，金融或非金融机构一定要控制其衍生产品的交易。衍生产品一定要被用于指定的目的，在交易中必须建立风险额度，银行必须经常监控交易员的交易以保证交易额制度的贯彻执行。

遗憾的是，有时即使交易员遵循交易额度，大错也会酿成。2007年7月危机开始以前，市场上某些交易员所做交易的风险在事后被证明远比雇用他们的金融机构所认为的要大得多。如第8章所述，美国房价在很长一段时间内增长极快，多数人认为房价增长的趋势会持续下去，即使是最糟糕的情形，房价即使不涨也不会下跌。市场上只有极少数人对急剧下跌的房价有所准备，而且也只有极少数人对美国按揭市场违约的高相关性有所准备。有些金融机构的风险管理人员对机构存在的房产风险暴露表示了忧虑，但是在市场欣欣向荣的情况下（至少看起来是欣欣向荣），风险管理人员的意见不会得到重视。2006~2007年间的市场就是这样一种状态。信用危机带给我们的教训之一就是，金融机构应时常扪心自问“问题会出在哪里”，同时还要问自己“如果出现问题，我们的损失会有多大”。

小 结

在过去30年中，衍生产品的迅猛发展成为金融市场中最令人鼓舞的进展之一。在许多情形下，对冲者和投机者发现交易衍生产品比交易资产本身更为方便。有些衍生产品在交易所进行交易，有些衍生产品是在金融机构、基金经理和企业的资金部之间的场外市场交易，还有一些衍生产品被嵌入债券或股权之中。本书的目的是给出一个对衍生产品定价的统一框架，而不是只对期权和期货进行定价。

本章我们初步了解了远期、期货以及期权合约。期货合约在交易所市场交易；远期合约在场外市场交易。期权有两种类型：看涨期权和看跌期权。看涨期权的持有者有权在将来某一约定时间以某一约定价格买入某种资产；看跌期权的持有者有权在将来某一约定时间以某一约定价格卖出某种资产。远期、期货和期权的标的产品范围广。

衍生产品是资本市场很成功的创新。在市场上有三类投资者：对冲者、投机者和套利者。对冲者面临资产价格风险，他们采用衍生产品来降低或消除风险。投机者则是对今后的价格变动进行下注，衍生产品可以给他们提供更强的杠杆效应。套利者试图从两种不同市场价格的失衡中盈利。例如，当套利者发行期货价格和即期价格存在失衡时，他们会同时在两个市场中做相互抵消的交易来锁定盈利。

推荐阅读

Chancellor, E. *Devil Take the Hindmost—A History of Financial Speculation*. New York: Farra Straus Giroux, 2000.

Merton, R. C. "Finance Theory and Future Trends: The Shift to Integration," *Risk*, 12, 7 (July 1999): 48–51.

Miller, M. H. "Financial Innovation: Achievements and Prospects," *Journal of Applied Corporate Finance*, 4 (Winter 1992): 4–11.

Zingales, L., "Causes and Effects of the Lehman Bankruptcy," Testimony before Committee on Oversight and Government Reform, United States House of Representatives, October 6, 2008.

练习题

1.1 解释期货长头寸与短头寸的区别。

1.2 仔细解释对冲、投机和套利之间的区别。

1.3 解释以下交易的不同之处：(a)当期货价格为50美元时，进入期货的长头寸；(b)进入一个执行价格为50美元的看涨期权的长头寸。

1.4 仔细解释卖出一个看涨期权与买入一个看跌期权的差别。

1.5 某投资者进入了一个远期合约的短头寸，在该合约中投资者能够以1.4的汇率(美元/英镑)卖出100 000英镑。当远期合约到期时的汇率为1.39和1.42时，投资的损益分别为多少？

1.6 某交易员作为棉花远期合约的短头寸方同意在将来某时刻以每磅50美分价格卖出棉花。合约面值为50 000磅棉花。当合约结束时棉花的价格分别为每磅48.20美分和51.30美分，对应以上价格交易员的盈亏为多少？

1.7 假定你卖出了一个看跌期权，执行价格为40美元，期限为3个月，股票的当前价格为41美元，一个看跌期权合约的规模是100股股票。进入这一合约，你做出了什么承诺。你的损益将是什么？

1.8 场外交易市场和交易所交易市场的区别是什么？场外交易市场的做市商给出的卖出–买入差价是什么？

1.9 你认为某股票价格将要上升，股票的当前价格为29美元，3个月期限，执行价格为30美元的看涨期权价格为2.9美元，你总共有资金5 800美元。说明两种投资模式，一种是利用股票，另一种

是利用期权。每种方式的潜在盈利与亏损是什么?

1.10 假如你拥有5 000股股票,每股价格为25美元。你如何采用一个看跌期权而使得在将来4个月内你的投资价值得到保护?

1.11 股票在最初发行时会给公司提供资金,对期权来讲这种说法是否正确?试讨论。

1.12 解释为什么期货合约既可以用于投机也可以用于对冲。

1.13 假如一个在3月份到期的看涨期权价格为2.5美元,期权执行价格为50美元。假设期权一直被持有至到期日,在什么情形下期权持有人会盈利?在什么情形下持有人会行使期权?画出期权长头寸的盈利与期权到期时的股票价格关系图。

1.14 假如一个在6月份到期,执行价格为60美元的看跌期权价格为4美元。假设期权被一直持有至到期日。在什么情形下期权的卖出方会盈利,在什么情形下期权会得到行使?画出一个期权短头寸在到期时的收益与股票价格之间的关系图。

1.15 现在是5月份,某交易员卖出了一个9月份到期的看涨期权,其执行价格为20美元。股票价格为18美元,期权价格为2美元。如果期权一直被持有到9月份,那时股票价格为25美元,讨论投资者的现金流状况。

1.16 某交易员卖出了12月到期的看跌期权,其执行价格为30美元。期权价格为4美元。在什么情况下交易员会有收益?

1.17 一家公司在今后4月时将收入一定数量的外币。哪种期权可以作为合适的对冲产品?

1.18 一家美国公司得知在将来的6个月要支付100万加元。解释如何采用远期以及期权产品来对冲汇率风险。

1.19 某交易员进入一个面值为1亿日元期货的短头寸。远期利率为0.008 0(美元/日元),在合约到期,汇率分别为0.007 4和0.009 1时,交易员的损益是多少?

1.20 CBOT提供关于长期国债的期货。具有什么特征的交易员大概会使用这些产品?

1.21 “期权和期货是零和博弈”。你如何理解这句话?

1.22 描述以下交易组合的盈利情况:一个关于某资产远期合约的长头寸和一个关于同一资产并且期限与远期合约期限相同的欧式看跌期权长头寸的组合,其中执行价格等于交易组合设定时资产的远期价格。

1.23 在20世纪80年代,信孚银行(Bankers Trust)开发了一种指数货币期权债券(Index Currency Option Notes, ICON)。债券持有人在到期时收到的收益与汇率有关,信孚银行某交易对手是日本长期信用银行(Long Term Credit Bank of Japan)。在ICON中约定,如果在到期(1995年)日汇率高于169(YEN/USD),债券持有人会收到1 000美元。而到期日的汇率低于169(YEN/USD)时,债券持有人的收益为

$$1\,000 - \max\left[0, 1\,000\left(\frac{169}{S_T} - 1\right)\right]$$

当到期日的汇率低于84.5时,债券持有人收益为零。证明ICON是一个简单债券与两个期权的组合。

1.24 2011年7月1日,一家公司进入了2012年1月1日到期的远期合约,在合约中公司要买入1 000万日元。在2011年9月1日,公司进入了在2012年1月1日到期的远期合约,在合约中公司要卖出1 000万日元,描述这一交易策略的收益。

1.25 假如USD/GBP即期和远期汇率如表1-6所示。

表 1-6

即期	1.458 0
90天远期	1.455 6
180天远期	1.451 8

当以下两种情形同时出现会给套利者创造什么样的机会?

(a) 180天期,执行价格为1.42(USD/GBP)的欧式期权价格为2美分;

(b) 90天期,执行价格为1.49(USD/GBP)的欧式期权价格为2美分。

作业题

1.26 交易员A签订了在一年后以每盎司1 000美元价格买入黄金的远期合约长头寸，交易员B购买了一个一年后有权以每盎司1 000美元价格买入黄金的看涨期权，期权的费用为每盎司100美元。这两个交易员的头寸有什么区别？以一年以后的黄金价格为自变量，比较两个交易员一年后的损益情况。

1.27 在3月份，一个美国投资者指示其经纪人出售7月份到期的股票看跌期权，目前的股票价格为42美元，行使价格为40美元，期权价格为3美元。解释投资人承诺了什么？在什么情况下，这笔交易对投资者是有利可图的？风险又是什么？

1.28 一家美国公司知道其在3个月后需要支付300万欧元，现在的汇率为每欧元兑换1.45美元。讨论该公司如何运用远期和期权来对冲其汇率风险暴露。

1.29 股票价格为29美元，某投资者买入一份看涨期权合约，执行价格为30美元；同时又卖出一个执行价格为32.50美元的看涨期权。市场上关于这两个期权的价格分别为2.75美元和1.50美元，期权具有相同的到期日。描述该投资者的头寸情况。

1.30 当前黄金市价为每盎司1 000美元，一年期远期合约的远期价格为1 200美元，某套利者能够以每年10%的利息借入资金，该套利者应如何做才能达到套利目的？这里我们假设黄金存储费为0，同时黄金不会带来任何利息收入。

1.31 股票的当前价格为94美元，3个月期、执行价格为95美元的欧式看涨期权价格为4.70美元，某投资者认为股票价格会上涨，但他并不知道是否应买入100股股票还是买入2 000个(相当于20份合约)期权，这两种投资所需资金均为9 400美元。在此你会给出什么建议？股票价格涨到什么样的水平会使得期权投资盈利更好？

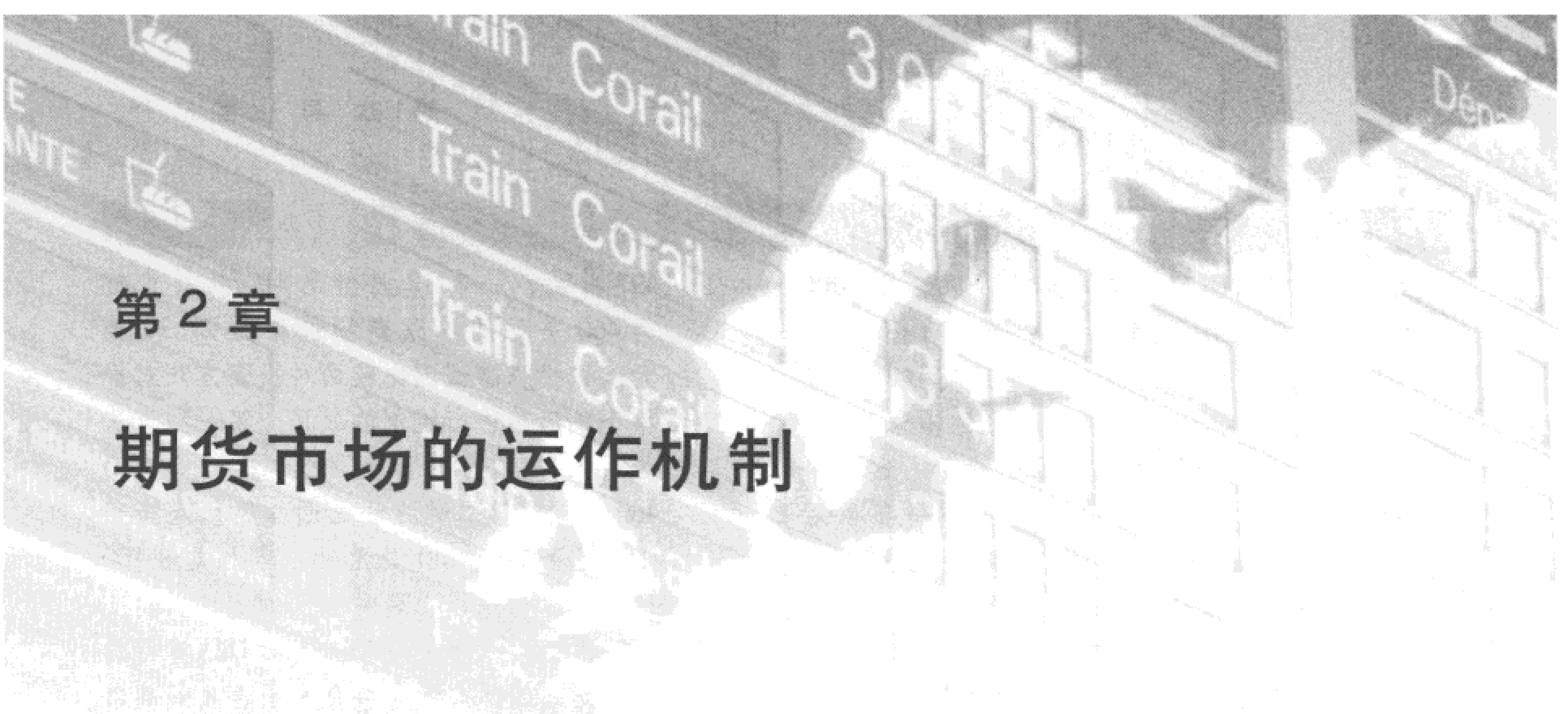
1.32 2010年7月15日，某投资者拥有100股谷歌股票。如表1-3所示，股票价格为497美元，一个12月份到期、执行价格为460美元的看跌期权价格为27.30美元。该投资者试图比较两种投资方法对价格下跌风险进行控制的效果。第一种方法是买入12月份的看跌期权，执行价格为460美元。第二种方法是通知经纪人当谷歌股票下跌到460美元时，马上卖出100股股票。讨论以上两种方法的优缺点。

1.33 一个由标准石油公司(Standard Oil)发行的债券形式如下：债券持有人不会收到通常的券息，但在债券到期时公司会给债券持有人偿还1 000美元本金并附加原油价格在债券持有期内的增值，这一增值等于170乘以在到期时原油价格高于25美元的差额(如果是正的话)，增值的最大限额为2 550美元(这一价格对应每桶40美元)。说明这一债券由一个简单债券、一个执行价格为25美元的看涨期权长头寸和一个执行价格为40美元的看跌期权短头寸组合而成。

1.34 对应于表1-1的情形，一位资金部主管说：“在6个月时，我需要卖出100万英镑。如果汇率小于1.41，我希望你给我的汇率为1.41；如果汇率大于1.47时，我将接受1.47的汇率；如果汇率介于1.41和1.47之间，我将利用市场汇率卖出英镑。”你将如何利用期权来满足该资金部主管的要求。

1.35 描述如何采用外汇期权来对于1.7节的情形进行对冲，以保证：(a)ImportCo可以锁定外汇利率不会小于1.46；(b)ExportCo公司的汇率至少为1.42。利用DerivaGem来计算每种情形建立对冲策略所需的费用，假定汇率的波动率为每年12%，美国的利率为5%，英国的利率为5.7%，当前的汇率等于表1-1所给出的买入汇率和卖出汇率的平均值。

1.36 某交易员买入了一个欧式看涨期权，同时又卖出了一个欧式看跌期权。期权具有同样的标的资产、执行价格及期限。讨论交易员的头寸。在什么情况下看涨期权价格等于看跌期权价格？



第 2 章

期货市场的运作机制

在第 1 章我们曾指出，期货与远期合约均是在将来某时刻以既定价格卖出或买入某资产的协议。期货合约交易是在有组织的交易所中进行的，而且合约由交易所统一标准化。与之相反，远期合约是金融机构之间或金融机构与其客户之间私下达成的协议。

本章将详细介绍期货市场的具体运作机制。我们将讨论合约条款的约定、保证金账户的运作、交易所的组织结构、市场监管规则、期货报价方式及期货的财会和税务处理等内容。我们还将讨论期货与远期合约的不同之处，并解释造成这两类合约所实现的收益不同的原因。

2.1 背景知识

在第 1 章里我们看到，期货合约在世界各地交易都很活跃。芝加哥交易所、芝加哥商品交易所和纽约商品交易所合并成立了 CME 集团。世界上其他较大规模的交易所包括纽约 Euronext 集团、Eurex 集团、圣保罗的巴西商品和期货交易所、东京国际金融期货交易所，本书附录 B 详细地列出了世界各地的交易所。

我们接下来以 CME 集团的玉米期货为例来说明期货的来历。假定现在是 3 月 5 日，一位纽约的投资者指示他的经纪人买入 5 000 蒲式耳玉米，资产交割时间在 7 月份，经纪人会马上将这一指令通知芝加哥交易所。同时，假定另一位在堪萨斯州的投资者指示她的经纪人卖出 5 000 蒲式耳玉米，资产交割时间也是 7 月份，她的经纪人也会马上将客户的指令通知芝加哥交易所。这时双方会同意某个交易价格，从而交易成交。在传统的公开喊价系统中，代表各方的交易员在交易大厅中面谈并确定价格；在电子交易中，计算机系统用于匹配交易和检测价格。

在这一交易中，纽约的投资者同意买入资产，他被称为进入了**期货的长头寸**(long futures position)；堪萨斯州的投资者同意卖出资产，她被称为进入了**期货的短头寸**(short futures position)。所同意的交易价格被称为 7 月份玉米的**期货价格**(futures price)。我们假定这一期货价格为每蒲式耳 300 美分，这与其他金融产品的价格类似，也是由市场供需关系决定的。如果在某一时刻有较多的人想卖出而不是买入 7 月份玉米期货，那么价格将会下跌。这时会有新的买入者进入市场，从而使得买方与卖方达到平衡。类似地，如果在某一特定的时刻有较多的人想买入而不是卖出 7 月份玉米期货，那么价格将会上涨。新的卖出者会进入市场，最后会达成买方和卖方的平衡。

期货合约的平仓

大多数期货交易往往不会导致实物交割，其原因是大多数交易员在合约规定的交割期到来之前会选择平仓。对一个合约进行平仓(close a position)就是进入一个与初始交易头寸相反的头寸。例如，纽约的投资者在 3 月 5 日买入一份 7 月份的玉米期货合约，他在 4 月 20 日可以卖出(即进

入短头寸)一份7月份的合约来进行平仓；堪萨斯州的投资者在3月5日卖出(即持有短头寸)一份7月份的期货合约，该投资者在5月25日可以买入一份7月份的合约来进行平仓。在各种情况下，投资者的总损益等于平仓日的期货价格与3月5日的期货价格之差。

实物交割事件非常少见，以至于有时交易员会忘记交割的过程(见业界事例2-1)。尽管如此，我们在本章仍要花一定篇幅讨论期货合约的交割过程。正是因为期货最终实物交割的可能性才使得期货价格与即期价格联系在一起[⊖]。

业界事例2-1　期货合约中令人诧异的资产交接

这个故事(可能是虚构的)是某家金融机构的主管亲口讲给我的。故事的主人公是一个刚刚进入这家金融机构而在金融界没有任何经验的新手。这家金融机构的一个客户为了对冲风险而常常需要进入期货交易的长头寸方，期货的标的资产为牲畜，通常这个客户在期货到期前的最后一个交易日向银行发出指令将交易平仓(在CME集团采用牲畜交易合约中的标的资产为40 000磅活牛)，这位新雇员的职责是管理这个客户的账户。

当期货合约接近到期日时，这位雇员注意到客户仍然有一个合约没有平仓，他随后就指示交易市场的交易员又以长头寸方(而不是卖空方)进入期货合约，这一错误的后果是使得此金融机构持有两份长头寸方的期货合约，当发现这个交易错误时，期货合约交易已经结束。

金融机构(而不是客户)要对其错误负责，这一错误的直接后果就是金融机构本身必须要去处理一群活牲畜的交接工作，而对这种交接，这家金融机构毫无经验。期货合约规定卖空方可以在交接到期月的某个时间在美国境内几家不同的地点交付牲畜，因为在此期货交易中作为长头寸方的金融机构只有等待短头寸方向交易所提供交割意向通知书，交易所再向金融机构发出交接通知。

最后金融机构终于收到了由交易所发出的交接通知，交接通知中注明牲畜将在2 000英里以外的一个地点并在通知后的第一个星期二交接，这位新雇员被安排到交接地点处理交接事务。

在交接地点每个星期二都有牲畜拍卖，期货合约的短头寸方在拍卖市场买下牲畜并随后就进行了交付，不幸的是本星期买下的牲畜必须在下一个星期才能拍卖，这位可怜的新雇员就不得不留下来安排牲畜的喂养。这位新雇员选取了一种“有趣”的方式开始自己在金融界的职业生涯。

2.2 期货合约的规定

当开发一项新的合约时，交易所必须详细注明双方协议上的具体条款，尤其是资产品种、合约的规模(即每一合约待交割标的资产的确切数量)、交割地点以及交割时间。

有时交割资产的备选方案也会被说明，这包括交易标的资产的等级或其他交割地点等。一个常用的规则是：期货的短头寸方(即同意卖出产品的一方)可以在备选方案中做出选择。当合约的短头寸方准备选择交割时，要向交易所填写**交割意向通知书**(notice of intention to deliver)。这一书面文件会注明资产交割的等级以及交割地点。

2.2.1 资产

当期货标的资产为某商品时，这一商品的质量可能有很大差别。因此，当指定标的资产时，

⊖ 如第1章所述，即期价格就是几乎马上要进行交割的价格。

交易所对允许交割资产等级的规定至关重要。洲际交易所(ICE)对其冰冻高纯度橙汁期货合约的阐述为：美国 A 级，而且 Brix 值不低于 62.5 度的产品。

对于某些商品，在一定等级范围内的商品都可以用于交割，但价格要根据选择的等级进行调整。例如，CME 集团的玉米期货的标准等级为“黄色 2 号”(No.2 Yellow)，但按交易所规定，经过价格调整的替代品也可用于交割。每蒲式耳“黄色 1 号”的价格比“黄色 2 号”要贵 1.5 美分，每蒲式耳“黄色 3 号”的价格比“黄色 2 号”要便宜 1.5 美分。

当期货合约中的标的资产为金融资产时，其定义通常很明确，含义也很清楚。例如，我们无须定义日元的等级。但是，在芝加哥交易所交易的美国中长期国债期货合约有一些很有意思的特性。在长期国债期货合约中，标的资产是任何在期货到期时期限超过 15 年，并且在 15 年内不可赎回的美国国债。在中期国债期货合约中，标的资产是任何在期货到期时期限不少于 6.5 年但同时不超过 10 年的国债。在这两种情况下，交易所定义了一种公式，来根据所交割的国债期限和券息来调整收取的价格。我们在第 6 章将讨论这一内容。

2.2.2 合约的规模

合约的规模(contract size)定义了每一合约中交割资产的数量。有关合约规模的定义是交易所的一个重要决策。如果合约规模太大，许多希望对冲较小头寸的投资者或希望持有较小头寸的投机者就不可能在交易所交易。从另一方面来讲，如果合约的规模太小，由于每份合约都会有交易成本，因此整个交易成本就太高。

显然，合约的适当规模取决于潜在客户的需求。某个农产品期货合约中交割资产的价值从 10 000美元到 20 000 美元不等，而一些金融期货合约的规模会大得多。例如，在 CME 集团交易的长期国债期货的标的资产面值为 100 000 美元。

一些交易所引进了“小型”(mini)合约来吸引小额度的投资者。例如，CME 的小型纳斯达克 100 期货(Mini Nasdaq 100)合约是以 20 倍的纳斯达克 100 指数为标的资产，而一个标准合约是以 100 倍的纳斯达克 100 指数为标的资产(我们将在第 3 章对股指进行讨论)。

2.2.3 交割的安排

交割地点必须由交易所指定，这对那些运输费用昂贵的商品尤其重要。在 ICE 交易的冰冻高纯度橙汁期货的交割地点为佛罗里达、新泽西以及特拉华的交易所授权仓库。

当选用交割地点时，期货的短头寸方所收入的价格会随着交割地点的不同而得以调整。期货交割地点离商品生产地越远，交割价格越高。

2.2.4 交割月份

期货合约通常以其交割月份来命名。交易所必须指定交割月份内的准确交割时间。对于许多期货而言，交割时间区间为整个月。

不同的合约有不同的交割月份。交易所对交割月份的选取是为了满足客户需求而设定的。例如，在 CME 交易的玉米期货交割月份为 3 月份、5 月份、7 月份、9 月份以及 12 月份。在任意给定时间，交易的合约包括最近交割月的合约和一系列随后交割月的合约。交易所指定特定月份合约开始交易的时刻，同时也指定这一合约的最后交易日。通常来讲，在最后交割日的前几天，期货将停止交易。

2.2.5 报价

交易所定义报价的方式各不相同，例如，在美国，原油期货报价以美元和美分计量，而中长期国债期货报价是以 1 美元以及 1/32 美元来报价的。

2.2.6　价格和头寸的限额

对大多数合约而言，每天价格的变动限额是由交易所规定的。如果某天价格下跌(与前一天收盘价格相比)的金额等于每日价格限额，这一合约被称为**跌停**(limit down)。如果上涨的金额等于每日价格限额，这一合约被称为**涨停**(limit up)。**涨跌停变动**(limit move)是指在任何方向上价格波动等于每日价格变动的限额。通常来讲，价格一旦达到当天的涨停或跌停限额，该合约当天的交易将会停止。但是，在某些情况下交易所有权干涉并改变每天价格变动的限额。

设定每日价格变动限额的目的是为了阻止过度投机而造成价格的巨幅波动。然而，当标的商品价格迅速上升或下降时，这些限制将会成为交易的障碍。价格限额是否对期货市场有利仍是一个有争议的话题。

头寸限额是一个投机者可持有的最大合约数量。头寸限额的目的是为了控制投机者过分操作而对市场造成不利影响。

2.3　期货价格收敛到即期价格的特性

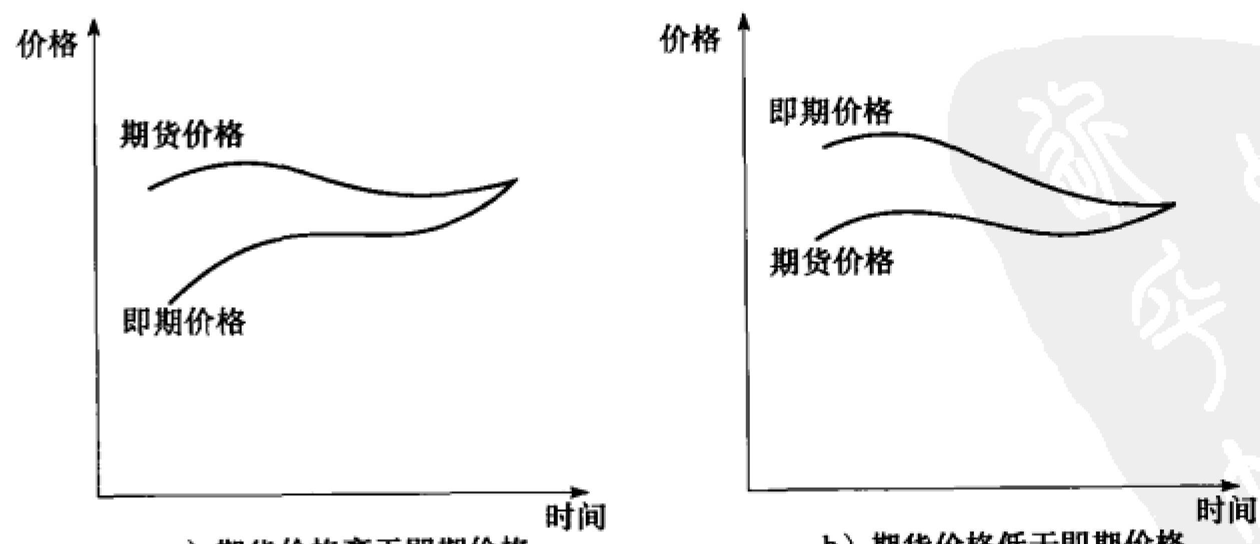
随着期货合约交割月份的逼近，期货价格会逐渐收敛到标的资产的即期价格。在到达交割日期时，期货价格会等于或非常接近于即期价格。

为了说明原因，我们首先假定在交割时间内期货的价格高于即期价格，这时，交易员可以得到一个显而易见的套利机会：

- 卖出一个期货合约(即持有短头寸)；
- 买入资产；
- 进行交割。

以上交易一定会盈利，其盈利额等于期货价格高于即期价格的差。一旦交易员发现这个套利机会，期货价格会下降。接下来假定在交割期间内期货价格低于即期价格，想获得该标的资产的公司会发现买入期货然后等待短头寸方交割资产会更有利。一旦公司这么做，期货的价格就会上涨。

因此，在交割期限内，期货价格与即期价格会十分接近。图 2-1 说明了期货价格收敛于即期价格。图 2-1a 中，在交割期之前，期货价格高于即期价格；图 2-1b 中，在交割期之前，期货价格低于即期价格。第 5 章将讨论在什么情况下我们会观察到与以上不同的变化形式。



a）期货价格高于即期价格　　b）期货价格低于即期价格

图 2-1　随着交割日期临近，期货价格与即期价格之间的关系

2.4 保证金的运作

如果两个投资者直接接触并且同意在将来某时刻按某一特定的价格交易某一资产，很明显，这其中存在风险。投资者的某一方可能对该交易感到后悔并想退出交易。另外，投资者也可能没有财力来保持承诺。交易所的一个关键职责是组织交易以避免违约的产生，这正是设定保证金的根本目的。

2.4.1 每日结算

为了说明保证金的运作过程，我们假定某投资者与其经纪人联系，他准备买入两份 CME 集团纽约商品交易所 COMEX 分所 12 月份到期的黄金期货合约。我们假定期货合约的当前价格为每盎司 1 250 美元，由于合约的规模为 100 盎司黄金，所以投资者想以这一约定价格买入 200 盎司黄金。经纪人要求投资者将资金存入**保证金账户**(margin account)中，投资者在最初开仓交易时必须存入的资金量被称为**初始保证金**(initial margin)。我们假定每份合约的初始保证金为 6 000 美元，因此整体保证金为 12 000 美元。在每个交易日结束时，保证金账户的金额数量将得到调整以反映投资者的盈亏，这一做法被称为**每日结算**(daily settlement)或叫**按市场定价**(marking to market)。

例如，假定在第一个交易日结束时，期货价格从 1 250 美元跌至 1 241 美元。投资者的损失为 1 800 美元(200 ×9)，这是因为投资者约定要以 1 250 美元的价格买入 200 盎司 12 月份的黄金，现在仅能以 1 241 美元出售。因此保证金账户中的余额要减少 1 800 美元，即减至 10 200 美元。类似地，如果 12 月份的期货价格在第一个交易日结束时上涨为 1 259 美元，保证金账户的余额也增加 1 800 美元，即增至 13 800 美元。一笔交易在交易发生日结束时第一次以市场定价，随后在每个交易日结束时，这笔交易都要以市场定价。

注意，每日结算不仅仅是经纪人与其客户之间的协议。当期货价格下降，期货长头寸投资者的保证金账户的余额减少了 1 800 美元时，这一经纪人必须向交易所支付 1 800 美元，然后交易所将 1 800 美元支付给期货短头寸投资者。类似地，当期货价格上升时，短头寸方的经纪人将资金支付给交易所，交易所再将资金转给期货长头寸方的经纪人。我们将在后面进一步探讨保证金账户的运作模式。

投资者有权提走保证金账户中超过初始保证金的那一部分资金。为了确保保证金账户的资金余额永远不会出现负值，交易所设置了**维持保证金**(maintenance margin)，维持保证金通常低于初始保证金的数额。如果保证金账户的余额小于维持保证金数额，投资者会收到**保证金催付**(margin call)通知，该通知要求在下一个交易日投资者须将保证金账户内资金补足到初始保证金的水平，这一追加资金被称为**变动保证金**(variation margin)。如果投资者不能提供变动保证金，经纪人将对合约平仓。在以上例子中，可通过卖出 12 月份交付 200 盎司黄金的合约对现有合约进行平仓。

表 2-1 说明了期货价格如表所示时上例中投资者保证金账户的运作过程。为了说明问题，假设维持保证金为每份合约 4 500 美元，即总共 9 000 美元。在交易的第 7 天，保证金账户的余额比维持保证金低 1 020 美元。这时，经纪人通知客户需要追加保证金 4 020 美元以使保证金达到最初 12 000 美元的水平。表 2-1 假设投资者确实在第 8 日收盘之前提供了这一保证金。在第 11 日，保证金账户中的余额又低于维持保证金的水平，这时经纪人又会发出追加 3 780 美元的通知。投资者在第 12 日收盘之前又提供了保证金。在第 16 日，投资者决定卖出两份合约来对交易平仓。这一天合约的价格为 1 226.90 美元，投资者累积损失为 4 620 美元。注意在第 8、第 13、第 14 和第 15 日，投资者的保证金账户余额超出了初始保证金数量。表 2-1 假设投资者没有提取多余的资金。

表 2-1 两份黄金期货的长头寸的保证金运作过程 (单位：美元)

交易日	交易价格	结算价格	日收益(亏损)	累积收益(亏损)	保证金余额	催付保证金
1	1 250.00				12 000	
1		1 241.00	-1 800	-1 800	10 200	
2		1 238.30	-540	-2 340	9 660	
3		1 244.60	1 260	-1 080	10 920	
4		1 241.30	-660	-1 740	10 260	
5		1 240.10	-240	-1 980	10 020	
6		1 236.20	-780	-2 760	9 240	
7		1 229.90	-1 260	-4 020	7 980	4 020
8		1 230.80	180	-3 840	12 180	
9		1 225.40	-1 080	-4 920	11 100	
10		1 228.10	540	-4 380	11 640	
11		1 211.00	-3 420	-7 800	8 220	3 780
12		1 211.00	0	-7 800	12 000	
13		1 214.30	660	-7 140	12 660	
14		1 216.10	360	-6 780	13 020	
15		1 223.00	1 380	-5 400	14 400	
16	1 226.90		780	-4 620	15 180	

注：初始保证金为每份合约 6 000 美元，总计 12 000 美元，维持保证金为每份合约 4 500 美元，总计 9 000 美元。第 1 日开仓时期货价格为 1 250 美元，第 16 日平仓时期货价格为 1 226.90 美元。

2.4.2 进一步的细节

许多经纪人向投资者在保证金账户的余额支付利息。如果保证金账户提供的利率与通过其他途径所获得的利率相比具有一定的竞争力，那么这一账户中的余额并不代表真正的费用。为了满足初始保证金的要求(而不是后来对保证金的催付)，投资者有时可以将有价证券存放在经纪人那里。通常短期国债可以按其面值的 90% 代替现金。有时股票也可以代替现金，但只能是其面值的 50%。

按市场定价的结果是期货合约每日都要结算，而不像远期合约只在最后到期时才结算。在每个交易日结束时，投资者的盈利(亏损)会被纳入其保证金账户(从保证金中扣除)，从而导致期货合约的价值变为 0。实际上，期货合约每天都要进行一个平仓，然后又以全新的价格开仓。

对于期货合约，交易所会设定初始保证金并维持保证金的最低要求。个别经纪人可能会要求客户存放的保证金比交易所规定的高。但是，他们要求客户所付的保证金不得低于交易所规定的保证金的水平。保证金的数量是由标的资产价格的变化程度来决定的。资产价格变化程度越大，保证金水平也越高。维持保证金通常为初始保证金的 75%。

保证金要求可能取决于交易员的交易目的。对于一个真正的对冲者而言，其保证金要求可能会低于对投机者的保证金要求。例如，考虑一家生产某商品的公司，这家公司也卖出该产品的期货，这时对它的保证金要求会低于对投机者的保证金要求，这是因为对冲者违约风险相对较小。对**短线交易**(day trade)和**差价交易**(spread transaction)所要求的保证金常常低于对冲交易的保证金。在短线交易中，交易人向其经纪人阐明他计划在同一天将交易平仓。差价交易是指交易者在持有某一交割月份合约的长头寸(买入合约)的同时还持有同一标的资产的另一交割月份合约的短头寸(卖出合约)。

注意对于期货短头寸方的保证金要求与对期货长头寸方的保证金要求是一致的。进入期货短

头寸与进入期货长头寸一样容易，而即期市场则不具备这种对称性。持有即期市场的长头寸会涉及购买资产并立即支付，这不存在任何问题。持有即期短头寸则是卖出一种你不拥有的资产。这是一种比较复杂的交易，在某些市场上可能做不到这一点。在第5章我们将仔细讨论这个问题。

2.4.3 结算中心与结算保证金

结算中心(clearing house)作为期货交易的媒介，它保证交易双方履行合约。结算中心拥有一定数量的会员，这些会员必须在交易所注入资金。非结算中心会员的经纪人必须通过结算中心的会员来开展业务。结算中心的主要任务是对每日交易进行记录，以便计算每一个会员的净头寸。

就像经纪人要求投资者开设保证金账户那样，结算中心也要求其会员在结算中心开设保证金账户。其相应的保证金被称为**结算保证金**(clearing margin)。与投资者保证金账户的运作方式类似，结算中心会员的保证金账户的余额在每一交易日结束时也按其盈亏做出调整。但是，对于结算中心的会员只有初始保证金的要求，没有维持保证金要求。每天各种合约的保证金余额必须等于初始保证金乘以正在流通的合约的数量。因此结算中心的会员在每个交易日结束时根据一天的价格变动，可能要向其保证金账户中注入追加资金，也可能会从保证金账户中提取资金。如果某个经纪人不是结算中心的会员，他必须在结算中心会员那里开设一个保证金账户。

在计算结算保证金时，结算中心基于两种方式计算流通合约的数量，一种是基于**总值**(gross basis)，另一种是基于**净值**(net basis)。基于总值的方式是将客户的长户头与短户头总数相加；基于净值的方式是使长户头与短户头相互抵消。假定某结算中心的会员共有两个客户：一个客户持有20份合约的长头寸；另一方客户持有15份合约的短头寸。基于总值的方式是以35份合约为基础来计算结算保证金；基于净值的方式是以5份合约为基础来计算结算保证金。现在大多数交易所采用净值方式来计算结算保证金。

2.4.4 信用风险

设定保证金的根本目的是保证交易员履行自身的承诺。整体上来讲，这一系统十分成功。在大的交易所中，交易员进行的交易还没有出现过违约情况。期货市场在1987年10月19日曾承受了考验，这一天S&P 500指数下跌了20%，持有S&P 500长头寸的交易员发现自身的保证金账户出现了负余额的情况。那些不能满足保证金催付要求的交易员的交易被平仓，即使这样，这些交易员仍然欠款于经纪人。由于有些人没有支付，造成了一些经纪人违约，原因在于没有得到客户的资金，经纪人不能满足他们所代表客户进入合约中的催付保证金要求。即使这样，交易所仍有足够多的资金来满足那些持有S&P 500期货短头寸的支付。

2.5 场外市场

信用风险是场外市场的一个特征。在场外交易中，交易对手总有一定的可能会违约。有趣的是，为了降低信用风险，场外市场主动或被动地选用了交易所采用的一些机制。

2.5.1 抵押制度

抵押制度(collateralization)已经被场外市场使用了一段时间，这一方式与期货市场采用的保证金制度类似。

考虑场外市场的两个参与者公司A和公司B。A与B之间有一项场外交易，比如远期合约。在抵押品条约下，它们可能要对交易合约每天进行定价。如果从某天到第二天，场外交易对于A的价值增长了X(对于公司B而言，该交易的价值减少了X)，公司B需要向公司A支付X。类似

地，在某一天交易对于 B 而言，价值增长了 X(对于公司 A 而言，该交易的价值减少了 X)，公司 A 需要向公司 B 支付 X。合约并非像期货合约那样每天结算，支付资金的目的是保证交易双方遵守义务，交易中任意一方支付的资金都可以获得利息。

以上讨论的机制在很多方面有不同形式，我们将在第 23 章中对抵押品机制进行更深入的讨论。抵押品策略大大减少了场外交易的信用风险。但正如业界事例 2-2 所示，抵押品协议在 20 世纪 90 年代曾被长期资本管理公司(Long-Term Capital Management，LTCM)使用，其结果是 LTCM 的对手要接受其信用风险。

业界事例 2-2　长期资本管理公司的巨大损失

20 世纪 90 年代中期成立的对冲基金长期资本管理公司(LTCM)在其交易中一直采用抵押品条款，这家对冲基金的投资策略为收敛套利(convergence arbitrage)策略，这一策略的简单例子如下：假如 X 和 Y 是同一家公司发行的两种债券，X 和 Y 具有相同的收益，但 X 的流动性比 Y 要差(X 的交易没有 Y 活跃)，市场对于较强的流动性会给予一定的补偿，因此 X 的价格比 Y 要低一些。LTCM 在交易中首先对 X 持长头寸，并对 Y 持短头寸，之后等待在将来某个时刻两种债券的价格趋向一致，这样就可以达到套利的目的。

当利率增长时，LTCM 预计债券价格下降的数量基本相同，因此对于 X 债券付出的抵押品与 Y 债券收入的抵押品基本相同；类似地，当利率下降时，LTCM 预计债券价格上涨的数量也会基本相同，因此因抵押条约造成的资金外流不会很大。

1998 年 8 月，俄罗斯对本国国债违约，造成了资本市场的“择优而栖”(flight to quality)现象，使得流动性较强的产品的价格与流动性差的产品价格之间的差价比平时要高得多，因此在 LTCM 投资组合中流动性强的产品与流动性差的产品的差价急剧增大，买入的债券价格大幅下降，而卖出的债券价格急剧上升。这时，无论对长头寸还是短头寸交易都必须注入抵押品，公司的财务又处于高杠杆状态(高负债比率)。由于 LTCM 不能满足抵押品的要求，因此必须对交易进行平仓，从而给 LTCM 造成了 40 亿美元的损失。假如财务并不处于高杠杆状态，LTCM 也许能够承受“择优而栖”现象带来的压力，这样公司就有机会等到流动性强的产品价格和流动性差的产品价格趋向一致的时候。

2.5.2　场外市场的中心结算

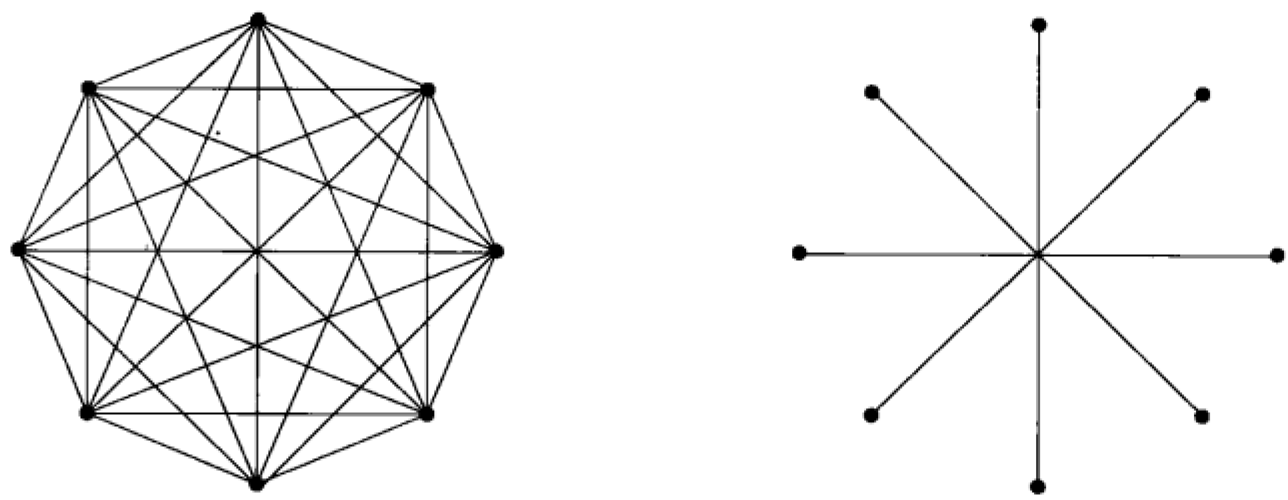
自 2007～2009 年金融危机以后，美国以及世界各国政府纷纷通过立法要求场外衍生产品通过中心结算机制来进行交易。

场外衍生产品中心结算过程如下：A 和 B 的交易谈判在开始时与以前一样，一旦同意进行交易，A 和 B 同时将交易提交到结算中心(即中心结算方)。假定结算中心接受了交易，这时结算中心也就成了 A 和 B 的交易对手(这里的运作方式与期货交易中结算中心是期货双方的交易对手类似)。结算中心需要承担 A 和 B 的信用风险。结算中心对其信用风险的管理是向 A 和 B 要求初始保证金和维持保证金。

传统上，场外市场是由一系列双边交易构成的(见图 2-2a)，如果所有的场外市场交易均通过中心结算进行，最终场外市场将变成图 2-2b 所示的结构，这时每个市场参与者都需要与一个或多个结算中心打交道。在实际交易中，并非所有在场外市场的产品均在中心结算进行，因此市场会出现图 2-2a 和图 2-2b 的两种状态。

对于利用场外市场结算中心的做法有不同观点。市场参与者要自动支付抵押品，从而金融系

统的信用风险(希望)会有所降低[⊖]；场外市场的交易会变得更加透明。2007年信用危机后，政府的一个主要忧虑是**系统风险**(systemic risk)失控，该风险的产生是由于某个大型金融机构破产会造成其他大型金融机构破产，从而引发整个金融系统的崩溃。业界事例2-3对这一现象进行了描述。



a）传统场外市场的运作：由市场参与者的双边交易来构成　　b）在中心结算的情况下，场外市场的结构

图2-2　场外市场结构

促成中心结算机制成立的原因之一是美国国际集团(AIG)的危机。在信用危机前，AIG为许多金融机构提供了关于美国次贷房产按揭的信用保护。因为在最初交易时，AIG的信用评级为AAA级，因此无须向交易对手提供抵押品。这些信用保护使AIG蒙受了巨大损失，后来美国政府不得不斥资850亿美元来挽救AIG。中心结算机制是否会避免类似AIG这样的事件还是个未知数，因为目前法律只是要求标准的衍生产品必须通过中心结算，而AIG的交易属于非标准型。对非标准型合约可实施强制性抵押品的规定，但采用这种方式来预防类似AIG的危机是一个任重道远的过程。

业界事例2-3　系统风险

系统风险是指由某一家金融机构违约而促成的连锁反应，一家银行的违约会触发其他银行违约，从而对整个金融系统的稳定造成威胁。这是因为在银行之间存在大量的场外交易，当银行A破产时，银行B因为与银行A之间的交易而蒙受巨大损失，从而可能会造成银行B破产，银行C可能同银行A及B之间都有交易，因此银行C也可能遭遇巨大损失，从而也会给C的运作带来巨大的困难，依此类推。

金融系统在1990年的德崇证券(Drexel)危机及2008年雷曼兄弟破产危机中幸免，但监管人员仍然忧心忡忡。在2007~2008年的金融动荡中，政府拯救了许多大型金融机构使其免于破产，其原因是政府对系统风险的顾虑。

2.6 市场报价

许多交易所和网上机构都有关于期货的行情报价(例如，futures. tradingcharts. com/marketquotes)。表2-2是2010年5月26日不同交易中心关于一些商品的报价。有关股指期货、外汇期货、利率期货的报价将分别在第3章、第5章和第6章中介绍。

⊖ 中心结算对信用风险的影响取决于中心结算商的数量和经过中心结算场外市场交易占整体市场的比率，见D. Duffie and H. Zhu (2010), "Does a Central Clearing Counterparty Reduce Counterparty Risk?" Working Paper, Stanford University.

在表 2-2 中列有期货标的资产、期货交易所名称、期货规模、报价方式等信息。第一项资产为黄金，交易所为 COMEX(该交易所为纽约商品交易所的分支机构，也是 CME 集团的一部分)，期货规模为 100 盎司，报价方式为每盎司的美元价格。期货的到期月列在第一列。

表 2-2 2010 年 5 月 26 日 CME 集团的一些商品期货合约的报价

	开盘价	最高价	最低价	结算价格	变化量	成交量	未平仓数量
黄金，美元/盎司							
2010 年 6 月	1 203.80	1 216.90	1 201.00	1 213.40	15.40	194 461	156 156
2010 年 7 月	1 205.00	1 217.50	1 202.00	1 214.20	15.50	838	714
2010 年 8 月	1 205.00	1 218.70	1 202.70	1 215.30	15.50	130 676	240 074
2010 年 10 月	1 208.30	1 220.20	1 205.30	1 217.50	15.60	2 445	21 792
2010 年 12 月	1 208.80	1 222.90	1 207.50	1 219.90	15.60	7 885	61 497
2011 年 6 月	1 215.90	1 228.00	1 215.20	1 227.80	15.80	408	13 461
原油，美元/桶							
2010 年 7 月	70.06	71.70	69.21	71.51	2.76	6 315	388 902
2010 年 8 月	71.25	72.77	70.42	72.54	2.44	3 746	115 305
2010 年 12 月	74.00	75.34	73.17	75.23	2.19	5 055	196 033
2011 年 12 月	77.01	78.59	76.51	78.53	2.00	4 175	100 674
2012 年 12 月	78.50	80.21	78.50	80.18	1.86	1 258	70 126
玉米，美分/蒲式耳							
2010 年 7 月	369.50	372.00	368.75	371.50	7.25	122 528	491 587
2010 年 9 月	379.50	381.00	379.00	381.00	7.75	24 186	175 798
2010 年 12 月	389.00	390.75	380.25	390.75	8.00	47 428	373 026
2011 年 3 月	400.00	403.25	400.00	403.25	7.75	4 581	55 836
2011 年 5 月	410.50	411.50	410.50	411.50	7.25	830	8 995
2011 年 7 月	417.50	419.50	417.50	419.50	7.50	3 491	31 939
2011 年 12 月	416.25	418.00	415.75	418.00	7.25	4 760	59 061
大豆，美分/蒲式耳							
2010 年 7 月	934.25	939.75	933.00	938.00	7.50	41 816	220 712
2010 年 8 月	922.00	931.50	922.00	929.50	8.50	4 881	15 674
2010 年 9 月	914.50	918.75	912.50	916.50	7.00	1 935	12 983
2010 年 11 月	906.00	912.50	905.00	910.00	7.00	18 908	157 826
2011 年 1 月	917.75	921.50	914.75	919.75	7.00	2 621	12 391
2011 年 3 月	926.00	930.00	925.00	928.50	8.00	1 406	5 857
2011 年 5 月	933.50	935.50	931.00	933.50	7.50	942	5 626
小麦，美元/蒲式耳							
2010 年 7 月	462.75	472.00	459.00	461.75	1.25	45 283	246 683
2010 年 9 月	480.00	489.00	476.50	479.00	1.00	13 941	90 257
2010 年 12 月	510.75	519.50	507.25	510.00	1.25	9 756	70 618
2011 年 3 月	541.50	548.50	536.75	539.00	0.75	2 748	27 879
2011 年 5 月	557.00	563.50	552.75	555.50	1.25	923	8 199
2011 年 7 月	574.25	583.00	571.00	573.75	0.75	4 938	34 300
活牛，美分/磅							
2010 年 6 月	90.800	90.850	90.450	90.800	0.775	12 410	51 817
2010 年 8 月	89.700	90.050	89.525	89.925	0.850	19 341	144 587
2010 年 10 月	91.100	91.150	90.750	91.100	0.750	7 718	78 300
2010 年 12 月	92.100	92.250	91.875	92.175	0.800	3 347	42 102
2011 年 2 月	93.200	93.550	93.200	93.550	0.800	792	18 428

2.6.1 价格

每一行的前三个数字分别代表为开盘价、当天交易最高价和当天交易最低价。开盘价是在每天交易开始后立即成交的期货合约价格。对于2010年6月黄金合约，在2010年5月26日的期货开盘价为1 203.80美元，当天的交易价介于1 201.00美元与1 216.90美元之间。

2.6.2 结算价格

每行的第四个数字为**结算价格**(settlement price)，用于计算每天合约的盈亏以及保证金的数量。该价格通常为交易日结束之前最后成交的期货合约价格(黄金的最后交易时刻为下午1点半)。每行的第五个数字为当天结算价格与上一个交易日结算价格相比的变化量。对于2010年6月份的黄金期货而言，2010年5月26日结算价格为1 213.40美元，比前一天上涨了15.40美元。这时，合约长头寸的投资者在2010年3月26日会发现其保证金账户的余额增加了1 540美元(100×15.40美元)。类似地，合约短头寸的投资者在这一天会发现其保证账户的余额减少了1 540美元。

表2-2的第五列显示，2010年5月25日至26日之间，所有合约的结算价格均有所增加(这仅仅是巧合)。

2.6.3 交易量和未平仓合约数量

表2-2中最后两列显示了每一合约的交易数量和前一交易日合约的**未平仓数量**(open interest)。交易数量为一天交易合约的总和。未平仓数量为正在交易的未平仓合约的总数，是所有长头寸的总和，也是所有短头寸的总和。

与刚刚开盘时未平仓数量以及休盘时未平仓数量相比，一天的交易数量可能更大(对于2010年6月的合约来说，2010年5月26日的情况正是如此)。这说明，许多交易员在一天中进入合约的某种头寸，并在休市前将交易进行平仓[此类交易员被称为是**日间交易员**(day trader)]。

2.6.4 期货价格的规律

期货价格可以呈现不同的规律。黄金的交割价格一般随期限增加而增加，表2-2显示，2010年5月26日的市场确实是这样。从2010年6月到2011年6月，随着合约期限的增长，合约结算价格由1 213.40美元增长到1 227.80美元。如果合约价格是期限的递增函数，我们称这种市场为**正常市场**(normal market)；如果合约价格是期限的递减函数，我们称这种市场为**反向市场**(inverted market)[⊖]。

表2-2显示在2010年5月26日，原油为正常市场，但原油市场并非总是正常市场。例如，2007年10月15日为反向市场。从2007年10月15日这一天来看，2007年11月、2007年12月、2008年1月、2008年2月、2008年3月和2008年4月的合约价格分别为86.13美元、85.13美元、84.25美元、83.41美元、82.69美元和82.05美元。有时，也许是因为季节的效应，期货价格也可以为正常市场和反向市场的混合型。在2010年5月26日，随着期限的增加，大豆合约的价格先下降随后又有所上升。

2.7 交割

我们在本章前面曾提到，只有很少的期货合约在开仓后会触发资产的最终交割，大多数期货

⊖ 当期货价格是期限的递增函数时，我们称这样的情形为期货溢价(contango)；当期货价格是期限的递减函数时，我们称这样的情形为现货溢价(backwardation)。严格意义上讲，这些名词是用于描述标的资产价格预计会增长和下跌的情形。

会被提前平仓。尽管如此，最后交割的可能性决定了最终的期货价格，因此理解交割的过程非常重要。

可交割时间由交易所定义，这些时间的定义在合约与合约之间会有所不同。具体交割时间是由期货的短头寸方来决定的，在这里我们将这个投资者记为A。当投资者A决定交割资产时，A的经纪人会向交易所结算中心发出交割意向书，意向书中阐明交割产品的数量。对于商品，意向书中还要阐明交割地点以及交割产品的级别，然后交易所会选择期货长头寸的某一方来接受交割。

假定投资者B为A所持有的合约在开仓时的交易对手，我们应该充分认识到B并不一定就是接受交割的投资者。投资者B可能通过与投资者C的交易而提前对其合约平仓，投资者也可能通过与投资者D的交易而对其合约平仓。通常的规则是交易所将交割产品意向书转给持有长头寸最久的投资者。持有长头寸最久的一方必须接受交割通知。但是如果通知是可转让的(transferable)，那么长头寸投资方会有很短的时间(通常为半个小时)找到另一个长头寸的投资者来接受交割通知。

对于商品期货，接受交割通常意味以接受仓库收据的形式进行支付。接受交割的一方要负责所有仓库的费用，对于活牲畜，还包括动物的喂养费用。对于金融产品期货，交割一般是通过电子汇款的形式实现的。对于所有的期货，其执行价格对应于最新的结算价格。如果执行价格由交易所来确定，那么执行价格还要根据产品级别、交割地点等而做出调整。从发出通知到最后资产的支付，整个交割过程一般需要2~3天。

合约中有3个至关重要的日期，它们是第一交割通知日、最后交割通知日以及最后交易日。**第一交割通知日**(first notice day)是可以向交易所发出交割意向的第一天，**最后交割通知日**(last notice day)是可以向交易所发出交割意向的最后一天，**最后交易日**(last trading day)通常为最后交割通知日的前几天时间。为了避免接受交割的风险，持有长头寸的投资者应该在第一交割通知日之前将期货平仓。

现金结算

某些金融期货(如标的资产为股指的期货)的结算方式为现金形式，这是因为直接交割标的资产非常不方便或不可能。例如，对于标的资产为S&P 500指数的期货，交割标的资产包括交割一个500种股票的组合。当合约以现金结算时，所有合约要在一些事先指定的天数按市场定价。最后的结算价格等于标的资产在最后一个交易日的开盘或收盘的即期价格。例如，在芝加哥商品交易所交易的S&P 500期货合约，事先约定的日期为交割月的第三个星期五，最终结算价以开盘价为准。

2.8　交易员类型和交易指令类型

有两类交易员执行交易：一类为**期货佣金经纪人**(futures commission broker，FCM)，另一类为**自营经纪人**(local)。佣金经纪人执行其他人的指令并收取佣金；自营经纪人以自身账户中的资金进行交易。

持有头寸的个人，无论是自营经纪人还是佣金经纪人的客户，都像第1章中讨论的那样，可被划分为对冲者、投机者或套利者。投机者可被分为短期投机者、短线交易员以及头寸交易员。**短期投机者**(scalper)等待价格出现的短期趋势，并从中盈利，这些交易员持有头寸的时间可能只有几分钟。**短线交易员**(day trader)持有头寸的时间不超过一个交易日，他们不愿承担每天晚上不好的消息所带来的风险。**头寸交易员**(position trader)持有期限较长，他们希望从市场上大的变动中取得可观的盈利。

指令

投资者向经纪人所发指示中最简单的是**市场指令**(market order)，该指令是以市场上可得到的最好价格马上进行交易的指令。在市场上还有许多其他形式的指令。我们在这里考虑较为常用的几种形式。

限价指令(limit order)限定一个特殊的交易价格，只有在达到该价格或更优惠价格时才能执行这一指令。因此，如果一个投资者希望买入资产的限价指令为30美元，这一指令只有在价格为30美元或更低时才能执行。当然，如果限定的价格一直没有达到，这一指令就不会被执行。

停止指令(stop order)或**止损指令**(stop-loss order)也限定一个特殊价格，这一指令在买入或卖出价达到这一特殊价格或更低价格时会被执行。假定一个止损指令为在30美元卖出资产，当前资产价格为35美元。在价格低于30美元时，这一卖出指令会被执行。事实上，止损指令在某个注明的价格达到时就会成为市场指令。止损指令的目的是在不利价格产生后对头寸进行平仓，以此来控制损失的幅度。

限价止损指令(stop-limit order)是止损指令与限价指令的组合。当买入或卖出价等于止损或比止损价格更糟时，这一指令变为限价指令。在限价止损指令中必须说明两个价格：**限价价格**(limit price)和**止损价格**(stop price)。假定在市场为35美元时，一个买入资产的限价止损指令阐明其止损价格为40美元，限价为41美元。当市场上出现买入或卖出价为40美元时，这一限价止损指令变为限价为41美元的限价指令。如果限价和止损指令相等，这一指令有时也被称为**止损和限价指令**(stop-and-limit order)。

触及市价指令(market-if-touched order，MIT)是当价格达到指定水平或者比指定水平更有利的价格时才执行交易的指令。事实上，MIT在某市价价格达到指定水平后变为市场指令。MIT也被称为**宽板指令**(board order)。考虑某交易员持有期货的长头寸，他向经纪人发出指令来对合约进行平仓。止损指令是在价格朝不利的方向变动时，保证损失锁定在一定范围之内。与止损指令相反，触及市价指令是在价格朝有利方向变动时，保证盈利达到足够高的水平。

自行裁定指令(discretionary order)或**不为市场所限指令**(market-not-held)是一个特殊的市场指令，其特殊之处在于经纪人可以自行决定延迟交易以取得更好的价格。

有些指令限定执行交易的时间。除非特别说明，**当前指令**(day order)在交易日当天结束时会自动取消。**限时指令**(time-of-day order)阐明指令只能在一天内的某个时间才能被执行。**开放指令**(open order)或**一直有效直至成交**(good-till-canceled order)是在成交时才被取消的指令。顾名思义，**立即成交**(fill-or-kill order)指令要求指令立即得到执行，否则将永不执行。

2.9 制度

当前美国的期货市场由联邦政府级机构，即商品期货交易委员会(Commodity Futures Trading Commission，CFTC，www.cftc.org)监管，该委员会成立于1974年，其职责是为期货交易所发放执照并批准期货合约。所有新合约以及对现存合约的修改都必须得到CFTC的批准。为了得到批准，合约必须有某种经济目的。这通常意味着合约必须满足对冲者和投机者的需求。

CFTC关心公众利益，该组织负责确保价格信息会被传递给公众，如果期货交易者的头寸超出某一确定水平，他们必须报告其所持有的流通的期货头寸。CFTC也向所有为大众提供期货服务的个人颁发执照，调查这些提供服务的个人的背景，同时对这些个人做出拥有最低资本的要求。CFTC处理公众投诉，如果投诉确实正当，CFTC将采用某些惩罚措施。CFTC有权要求交易所惩罚违反规则的成员。

1982年，自从美国全国期货协会(National Futures Association，NFA，www.nfa.futures.org)成

立以来，CFTC 的部分责任转移到该期货行业内部。NFA 是期货从业人员的自发性组织，其目的是为了防止欺诈并确保市场运作有利于大众利益。NFA 有权监测交易并在适当的时候采取惩罚措施。这一机构建立了一些有效的制度，以便对个人以及会员之间的纠纷做出公正裁决。

有时其他机构，诸如证券交易委员会（Securities and Exchange Commission，SEC，www. sec. gov）、联邦储备委员会（Federal Reserve Board，FRB，www. federalreserve. gov）以及美国财政部（U. S. Treasury Department，www. treas. gov）对期货交易的某些方面也有管辖权。这些机构关注期货交易对股票、短期国债、长期国债等即期市场的影响。SEC 对于是否批准一只新的股票以及债券指数期货的上市有否决权。但是，关于期货以及期货期权的基本职责还是由 CFTC 承担。

违规交易

在大多数情况下，期货市场都是在有效地运作，并且与公众的利益是一致的，但有时也确实会发生一些违规交易。例如，当某个投资集团企图"操纵市场"（corner the market）时，就会出现违规交易行为⊖。例如，某投资集团持有大量期货的长头寸，并试图对标的商品的供应进行某种控制。随着期货期限的临近，该投资集团并没有对其头寸进行平仓，因此流通期货的数量可能超过能够用于交割的商品的数量。短头寸方的持有者认识到难以交割，只能绝望地平仓。结果是期货价格和即期价格急剧上升。监管当局处理市场上这类违规事件的方法通常是增加保证金，设定更严格的头寸限额，禁止投机者增加未平仓头寸的交易，以及强迫市场参与者平仓等。

其他种类的违规交易可能涉及交易所大厅的交易员。FBI 利用其秘密代理人在芝加哥交易所和芝加哥商品交易所进行了两年调查，并在 1985 年初披露了这些违约行为。调查起因于一个大型农场的投诉，投诉内容包括向客户收取过高的费用、不向客户完全支付卖出商品的全部收益以及交易员在已知客户信息的基础上为自己提前交易的行为[这一行为被称为**偷跑交易**（front running）]。

2.10　会计和税收

对于期货合约的会计（accounting）以及税务处理的整个细节已超出本书范围，需要这方面知识的交易员可向专家咨询。在本节，我们只提供一些基本的背景知识。

2.10.1　会计

会计标准要求：除了用于对冲的情形，期货合约市场价格变化的（财务）确认时间应与其发生时间保持一致。如果合约能够合格地归为对冲目的，在财会处理上，合约盈亏确认时间可以等同于被对冲产品盈亏发生的时间，这一方法被称为**对冲会计法则**（hedge accounting）。

考虑一家公司，其财务年终为 12 月底。在 2011 年 9 月，该公司买入了 2012 年 3 月的玉米期货，并在 2012 年 2 月底进行平仓。假定在进入合约时期货价格为每蒲式耳 250 美分，在 2011 年底的价格为 270 美分，在 2012 年平仓时价格为 280 美分。合约的标的资产为 5 000 蒲式耳玉米。如果合约不是合格的对冲，那么对其收益的会计处理为

$$2011\text{ 年的收入为 }5\,000\times(2.70-2.50)=1\,000\text{ 美元}$$

$$2012\text{ 年的收入为 }5\,000\times(2.80-2.70)=500\text{ 美元}$$

如果公司是为了对冲，在 2012 年 2 月买入 5 000 蒲式耳玉米，其会计处理方式为：1 500 美元收入可以全部认为是在 2012 年发生的。

⊖ 这种违规最著名的案例为 1979～1980 年亨特（Hunt）兄弟在白银市场操纵市场的交易行为。在 1979 年年中至 1980 年年初，他们的交易行为使得白银从每盎司 6 美元上升到每盎司 50 美元。

这里处理对冲收益的方式比较合理。如果公司是为了对冲在2012年2月份买入的5 000蒲式耳玉米，期货合约的作用是为了保证执行价格接近于每蒲式耳250美分。会计处理反映了2012年的执行价格。

1998年6月，美国财务会计准则委员会(Financial Accounting Standards Board，FASB)颁布了关于衍生产品和对冲行为会计标准(Accounting for Derivative Instruments and Hedging Accounting)第133号文件(FAS133)。FAS133适用于所有衍生产品(包括期货、远期、互换和期权)。这一标准要求所有的衍生产品都要以公平价格(fair value)被计入资产负债表[⊖]，同时FAS133增加了信息披露的要求。与以前相比，这一文件对于公司在使用对冲会计法则时的要求更加严格。为了保证能够采用对冲会计法则，对冲产品一定要很有效地抵消(被对冲)头寸的风险暴露，而且每3个月要进行一次对冲有效性的测试评估。国际会计准则理事会(International Accounting Standards Board)也颁布了一个类似的标准，即IAS39号文件。

2.10.2 税收

在美国的税务规定下，两个关键因素是**应税损益**(taxable gain or loss)的特征以及损益的确认时刻。损益可分为**资本损益**(capital gain or losses)或**普通收入**(ordinary income)。

对于企业纳税人而言，资本损益的税率与普通收入一样，然而扣减资本损失则受到一定限制。企业资本损失只能从资本收益中扣除。公司可以弥补过去3年的资本损失，并可以将资本损失向未来分摊5年。对于非企业纳税人而言，短期资本增值与普通收入的税率一样，长期资本增值的税率最高为15%(长期资本增值来源于持有期超过一年的资产带来的收入；短期资本收益来源于持有期不大于一年资产带来的收入)。1997年的《纳税人减税法案》(*Taxpayer Relief Act*)加大了普通收入与长期资本收入税率之间的差别。对于非企业纳税人而言，资本损失最多可以从资本收益和普通收入总和中抵扣3 000美元，并可以无限期向未来延期。

一般来讲，处理期货合约的头寸时，可以将其看做在税收年度的最后一天平仓。对于非企业纳税人而言，这会产生资本损益。这些损益有60%应被视为长期损益，40%应被视为短期损益，这种处理方式不考虑实际的持有期限。这就是所谓的"60/40"法则。一个非企业纳税人可以将来自于60/40法则的损失来抵扣过去3年因这一法则而产生的收入。

对冲交易不受以上规则的限制。税务中关于对冲的定义与会计规则关于对冲定义有所不同。在税法中，对冲定义为在正常的业务运作中由于以下两个目的而从事的交易：

- 为了降低纳税人出于获得普通收入目的而持有或将要持有的财产所面临的价格以及汇率波动的风险。
- 为了降低纳税人由于贷款所面临的价格、利率以及汇率的风险。

对冲交易在公司记录中必须被正式识别，处理对冲交易的损益与普通收入一样。对冲交易损益的确认时刻一般与被对冲项目产生收入或损失的确认时刻一致。

2.11 远期与期货合约比较

表2-3总结了远期合约与期货合约的主要区别，两种合约均为在将来时刻以某种价格买入或卖出某种资产的协议。远期合约的交易在场外市场进行，并且没有标准的合约规模与交割安排，这种合约通常会指定一个交割日期，并且一般会持有至到期日，然后交割。期货合约是在交易所交易的标准合约，交割日期通常为一段时间，这种合约会每天结算，并且一般在到期日前会平仓。

⊖ 在此之前，衍生产品的吸引力之一在于它们被处理为表外项目(off-balance-sheet)。

表 2-3　远期合约与期货合约的比较

远期合约	期货合约	远期合约	期货合约
交易双方间的私下合约	交易所内的标准合约	在合约到期时结算	每日结算
非标准化	标准化	通常会发生实物或现金交割	合约通常在到期前会被平仓
通常只有单一交割日	有一系列的交割日	有信用风险	几乎没有信用风险

2.11.1　期货和远期合约的盈利

假定英镑的 90 天远期汇率为 1.5（每英镑所对应的美元数量），这一汇率也正好是在 90 天后交割的外汇期货价格，那么，两个合约的损益有何区别？

在远期合约中，全部的损益均在合约到期时实现。在期货合约中，由于每日结算，损益每天实现。假设投资者 A 进入 90 天期限、面值 100 万英镑的远期合约长头寸，而投资者 B 进入 90 天期限，面值为 100 万英镑的期货合约的长头寸（因为每一个期货合约都是关于 62 500 英镑的买卖，投资者 B 应持有 16 个合约）。假定 90 天后，即期汇率为 1.7，投资者 A 在 90 天后收入 200 000 美元；投资者 B 也有收益，但其收益分布在第 90 天。在某些天投资者 B 可能会有损失，而在其他天他会有收益。但是总体来讲，将损失和收益相抵后，他 90 天的净收益为 200 000 美元。

2.11.2　外汇报价

外汇上的远期和期货交易都十分活跃，但是在这两个市场汇率的报价有所不同。期货的报价总是以一个外币所对应的美分为单位，或者以一个外币对应的美元数量。远期报价永远同即期市场报价一样。这意味着对于英镑、欧元、澳元以及新西兰元，远期报价为 1 外币所对应的美元数量（这与期货报价相同）。对于其他主要货币，远期报价为 1 美元兑换的外币数量。考虑加元（CAD）的情形，期货报价是每加元为 0.95 美元，与之对应的远期报价是每美元为 1.052 6 加元（1.0526 = 1/0.95）。

小　结

大部分期货合约不对标的资产进行实际交割。这些合约在交割期到达之前就已经被平仓。但是，正是因为存在最后交割的可能性，因此期货价格才收敛于即期价格。对于每个期货合约来讲，在一定的时间范围内能够以一个规定明确的过程来进行资产交割。其他，如标的资产是股指的期货合约，它们是以现金结算而不是采用实物交割结算。

制定合约的细则是交易所的一个重要职责。合约双方都应该了解可交割资产的种类、交割地点以及交割时间。他们也必须知道以下细节：交易时间、报价形式、最大价格变动等。新合约必须得到商品期货交易委员会的批准。

保证金是期货市场很重要的一个组成部分。投资者在其经纪人处要开设一个保证金账户。这一账户的资金每天都要调整以反映盈亏状态，在价格变动对投资者不利时，经纪人会要求投资者追加保证金。每个经纪人或是（结算中心）会员，或者要在结算中心会员处开设一个保证金账户。每个结算中心的会员要在结算中心开设一个保证金账户。保证金账户的余额每天都要进行调整以反映会员业务的盈亏状态。

交易所以一种传统的方式采集期货的信息，并在数秒内将信息向全世界发布。许多类似《华尔街日报》这样的报纸都刊登前一天交易信息的摘要。

远期合约与期货合约在几个方面有所不同。远期合约是由双方约定的私下合约，而期

货合约是在交易所进行的交易。远期合约只有一个交割日期，而期货合约通常有一个交割区间。因为远期合约不在交易所交易，因此它们无需标准化。远期合约结算通常在合约到期日，大多数远期合约会导致资产支付或现金结算。

在接下来的几章里，我们将进一步详细讨论如何应用远期和期货来进行对冲。我们也将讨论远期和期货合约价格的确定方法。

推荐阅读

Duffie, D., and H. Zhu. "Does a Central Clearing Counterparty Reduce Counterparty Risk?" Working Paper, Stanford University, 2010.

Gastineau, G. L., D. J. Smith, and R. Todd. *Risk Management, Derivatives, and Financial Analysis under SFAS No. 133*. The Research Foundation of AIMR and Blackwell Series in Finance, 2001.

Hull, J., "OTC Derivatives and Central Clearing: Can All Transactions Be Cleared," *Financial Stability Review*, 14 (July 2010): 71–80.

Jones, F. J., and R. J. Teweles. In: *The Futures Game*, edited by B. Warwick, 3rd edn. New York: McGraw-Hill, 1998.

Jorion, P. "Risk Management Lessons from Long-Term Capital Management," *European Financial Management*, 6, 3 (September 2000): 277–300.

Kawaller, I. G., and P. D. Koch. "Meeting the Highly Effective Expectation Criterion for Hedge Accounting," *Journal of Derivatives*, 7, 4 (Summer 2000): 79–87.

Lowenstein, R. *When Genius Failed: The Rise and Fall of Long-Term Capital Management*. New York: Random House, 2000.

练习题

2.1 说明未平仓合约数量与交易量的区别。

2.2 说明自营经纪人与期货佣金经纪人的区别。

2.3 假定你进入纽约商品交易所的一个7月份白银期货合约的短头寸，在合约中你能够以每盎司17.2美元的价格卖出白银。期货规模为5 000盎司白银。最初保证金为4 000美元，维持保证金为3 000美元，期货价格如何变动会导致保证金的催付通知？你如果不满足保证金催付通知会有什么后果？

2.4 假定在2012年9月一个公司进入了2013年5月的原油合约的长头寸。在2013年3月公司将合约平仓。在进入合约时期货价格（每桶）为68.30美元，在平仓时价格为70.50美元，在2012年12月底为69.10美元。每个合约是关于1 000桶原油的交割。公司的盈利是多少？盈利时间如何分布？对以下投资者应如何征税：(a)对冲者，(b)投机者。假定公司年度末为12月31日。

2.5 止损指令为在2美元卖出的含义是什么？什么时候可采用这一指令。一个限价指令为在2美元卖出的含义是什么？什么时候可采用这一指令。

2.6 结算中心管理的保证金账户的运作与经纪人管理的保证金账户的运作有什么区别？

2.7 外汇期货市场、即期市场以及远期市场的汇率报价的区别是什么？

2.8 期货合约的短头寸方有时有权选择交割的资产的种类、交割地点以及交割时间等。这些选择权会使期权价格上升还是下降？解释原因。

2.9 设计一个新的期货合约时需要考虑哪几个重要方面？

2.10 说明保证金可以如何保证投资者免受违约风险。

2.11 某投资者进入了两个冰冻橙汁的合约的长头寸。每个合约的规模均为15 000磅橙汁。当前期货价格为每磅160美分。最初保证金每个合约6 000美元，维持

保证金为每个合约4 500美元。什么样的价格变化会导致保证金的催收？在哪种情况下可以从保证金账户中提取2 000美元。

2.12 如果在交割区间内期货价格大于即期价格，证明存在套利机会。如果期货价格小于即期价格，套利机会还存在吗？请解释。

2.13 解释触及市价指令与止损指令的区别。

2.14 解释止损限价指令中，限价为20.10美元时以20.30美元卖出的含义是什么？

2.15 在某一天末，某结算中心会员持有100个合约的长头寸，结算价格为每个合约50 000美元，最初保证金为每个合约2 000美元。在第2天，这一会员将20个长头寸进行平仓，它以51 000（每个合约）美元进入合约，在第2天末的结算价格为50 200美元。这个会员要向结算中心注入多少附加保证金？

2.16 在2012年7月1日，某家日本公司签订了在2013年1月1日以日元购买100万美元的远期合约。在2012年9月1日，这家公司签订了在2013年1月1日出售100万美元的远期合约。将公司的盈亏以日元计算，并且作为远期兑换率的函数。描述公司在2012年7月1日与2012年9月1日的盈亏。

2.17 一个在45天后支付的瑞士法郎远期汇率为1.10。在45天后的相应的期货合约价格为0.90。解释这两个报价的含义。一个投资者想卖出瑞士法郎，哪一个汇率更有利？

2.18 假定你向你的经纪人发出了卖出7月份猪肉合约的指令，描述这么做会产生什么结果。

2.19 “在期货市场投机就是纯粹的赌博，为了公众利益不应该让投机者在交易所交易期货。”讨论这一观点。

2.20 活牛的期货合约在6月、8月、10月、12月和2月到期，在表2-2中，为什么6月的未平仓合约数比8月少？

2.21 如果在合约中未完全指明标的资产的质量，这会发生什么情况？

2.22 “一个期货合约在交易所大厅交易时，未平仓合约数量可能增加1个，或保持不变，或降低1个。”解释这句话的含义。

2.23 假定在2012年10月24日。一家公司卖出了一个2013年4月的活牛期货合约，在2013年1月21日将合约平仓。在进入合约时期货价格（每磅）为91.20美分，在平仓时期货价格为88.30美分，在2012年12月底时期货价格为98.80美分，期货规模为40 000磅活牛。这时公司盈利是多少？如果公司分别为对冲者和投机者，它将如何纳税。假定公司年终为12月31日。

2.24 一个喂养牲畜的农场主将在3个月后卖出120 000磅活牛。在CME集团的3个月期限的活牛期货合约的规模为40 000磅活牛。你将如何采用期货合约来对冲风险？从这一农场主的角度来看，对冲的好处和坏处分别是什么？

2.25 假定现在是2011年7月。一个矿业公司刚刚发现了一个小型金矿。它决定用6个月时间建矿。黄金将在今后一年内以连续的形式被开发出来。从2011年8月到2012年12月中，每两个月有一个期货交割月，每一个合约规模为100盎司黄金。讨论矿业公司将如何采用期货产品来对冲风险。

作业题

2.26 交易员A进入3个月期以140万美元兑换100万欧元的期货长头寸；交易员B进入相应远期的长头寸。假设汇率（美元/欧元）在前两个月急剧下跌，然后在第3个月回升到1.430 0美元/欧元。忽略每日结算，每位交易员的总盈利是多少？如果考虑每日结算的影响，哪个交易的盈利更大？

2.27 解释什么是未平仓数量，为什么未平仓数量通常在交割月之前的一个月中会下

降？在某一天，一种期货有2000次交易，这说明有2 000个是买方（长头寸），2 000个是卖方（短头寸）。其中在2 000个长头寸中，1 400个用于平仓，剩下的600个是新头寸；在2 000个短头寸中，1 200个用于平仓，剩下的800个是新头寸；这一天的交易对未平仓数量有什么影响？

2.28 一份橙汁期货合约是关于15 000磅冰冻浓缩橙汁的交易。假定2011年9月，一家公司卖出2013年3月份橙汁的期货，价格为每磅120美分；2011年12月，期货价格为140美分；2012年12月，期货价格为110美分；2013年2月交易被平仓，此时价格为125美分。该公司以12月份为财政年末，这一合约给公司带来的盈亏是多少？盈亏是如何实现的？假定公司分别是对冲者和投机者，其会计和税务方面该如何处理？

2.29 一家公司进入了一个合约的短头寸，在合约中公司以每蒲式耳450美分卖出5 000蒲式耳小麦。初始保证金为3 000美元，维持保证金为2 000美元，价格如何变化会导致保证金的催收？在什么情况下公司可以从保证金账户中提取1 500美元？

2.30 假定对于原油没有储存费用，借入和借出资金的利率均为5%。通过交易2010年1月和2010年12月的原油期货合约，你在2010年5月26日如何盈利？请采用表2-2。

2.31 什么样的交易头寸等价于一个在一个指定时刻以价格K买入资产远期合约的长头寸与一个在同一时刻以K价格卖出资产的看跌资产期权的组合。

2.32 在作者网页上（www. rotman. utorouto. ca/~hull/data）存有关于原油期货和黄金期货的收盘价数据。下载数据并回答以下问题。

(a) 对以下情形你将对原油和黄金期货设定什么样的维持保证金：投资者的余额在某一天稍高于维持保证金水平，而在两天后余额为负值的概率为1%。如将概率减至0.1%时，以上问题又有什么改变？假定每天市场价格变动服从正态分布，其均值为0。解释交易所为什么对这一计算会感兴趣。

(b) 假定某投资者在数据期限开始时进入原油合约的长头寸，并且在整个数据覆盖的时间内持有合约。超出初始保证金的余额会被提取。采用(a)中的1%的风险水平的维持保证金，并假定维持保证金为初始保证金的75%。计算保证金催付次数以及出现负保证金余额的次数。假定所有的保证金催付均被满足。对于在起始时持有黄金期货短头寸的投资者而言，重复以上计算。



第 3 章

利用期货的对冲策略

许多期货市场的参与者是对冲者。他们的目的是利用期货市场来对冲自身面临的某种风险，这里的风险来源可能是原油价格、汇率、股票价格或其他变量。**完美对冲**(perfect hedge)是指完全消除风险的策略。完美对冲很少见，因此，在大多数情况下，选取期货对冲是指找出一种对冲方式使对冲尽可能接近完美。

本章我们考虑建立对冲的一些基本问题：何时应该采用期货的短头寸？何时采用长头寸更为合适？应该选用哪一种期货合约？采用期货对冲的最佳头寸是什么？目前我们将集中精力考虑所谓的**“保完即忘策略”**(hedge-and-forget strategy)，也就是说，一旦设定对冲策略后，无须再对其进行调整。在这种对冲中，对冲者只需要在开始时进入期货交易，然后在对冲结束时将对冲交易进行平仓。在第 18 章我们将考虑**动态对冲策略**(dynamical hedging strategy)，在这类对冲策略中，对冲者要监视对冲策略，并经常调整头寸。

本章我们首先将期货合约作为远期合约来处理(即忽略每天结算制度)。然后将讨论所谓的“跟踪因子”(tailing)的调节量，这种调节量考虑了期货与远期合约的不同。

3.1 基本原理

当个人或公司选用期货产品对冲风险时，其目的是选择头寸来使得风险尽量呈中性。考虑这样一家公司，它已知在接下去的 3 个月内如果某一商品的价格上涨 1 美分，公司将收入 10 000 美元；但如果商品的价格下跌 1 美分，公司将损失 10 000 美元。为了对冲风险，公司资产部主管应进入期货合约的短头寸来抵消风险。对于 1 美分的商品价格上涨，期货应触发 10 000 美元的损失；对于 1 美分的商品价格下跌，期货应带来 10 000 美元的收益。如果商品价格确实下跌，期货合约的收益会抵消公司其他业务的损失；如果商品价格上升，期货的损失就会被公司其他业务的收益抵消。

3.1.1 短头寸对冲

短头寸对冲(short hedge，也译为空头对冲)正如以上例子所述，对冲者选择期货的短头寸方。当对冲者已经拥有了某种资产并期望在将来某时刻卖出资产时，他选择期货短头寸对冲比较合理。例如，一个养猪的农场主知道自己会在 2 个月后在当地市场售出活猪，他可以选择短头寸对冲。当某人当前并不拥有资产，但在将来某时刻会拥有资产时，也可以选择短头寸对冲。例如，一个美国进口商已知在 3 个月后他将收进一笔欧元，进口商在欧元(同美元比较)升值时会有收益，而在欧元(同美元比较)贬值时会有损失，他可以选择短头寸对冲。这时的对冲策略在欧元升值时会产生损失，而在贬值时会产生盈利。对冲会消除进口商的风险。

为了更详细地叙述短头寸对冲在一些情形下是如何运作的，我们假定今天是 5 月 15 日，一

个原油生产商刚刚进入一个卖出 100 万桶原油的合约。合约所约定的价格为 8 月 15 日的市场价格。因此在今后 3 个月，原油价格每增长 1 美分，原油生产商的收益为 10 000 美元；原油价格每下跌 1 美分，原油生产商的损失为 10 000 美元。假设 5 月 15 日每桶原油的即期价格为 80 美元，8 月份到期的原油期货价格为 79 美元。因为每个期货合约的规模为 1 000 桶原油，因此原油生产商可以通过卖出 1 000 个期货合约来对冲风险。如果原油生产商在 8 月 15 日平仓，这一交易策略的净效果是将原油价格锁定在 79 美元。

为了说明对冲后会发生的情形，假定在 8 月 15 日原油的即期价格为每桶 75 美元。公司因卖出原油而收入 7 500 万美元，由于 8 月份是期货交割月，所以在 8 月 15 日的期货价格应与这一天的即期价格 75 美元十分接近。公司因持有原油期货，每桶收益近似为

$$79-75=4\text{ 美元}$$

期货短头寸的收益为 400 万美元。卖出原油和期货的每桶收入近似为 79 美元，即整体收入为 7 900万美元。

考虑另外一种情形，假定在 8 月 15 日原油的即期价格为每桶 85 美元。公司以每桶 85 美元卖出石油，因持有原油期货每桶亏损近似为

$$85-79=6\text{ 美元}$$

这时，卖出原油和期货的整体收入大约为 7 900 万美元。容易看出，对于不同情形，公司的整体收入总是大约为 7 900 万美元。

3.1.2 长头寸对冲

持有期货长头寸的对冲策略称为**长头寸对冲**(long hedge，也译为多头对冲)。当公司已知在将来需要买入一定资产并想在今天锁定价格时，可以采用长头寸对冲。

假设今天是 1 月 15 日，为了满足一项合约，某一铜产品加工商知道在 5 月 15 日将会需要 100 000磅铜。5 月份交割的期货合约价格为每磅 320 美分，而即期铜价为每磅 340 美分。该加工商可以买入 4 份 CME 集团的 COMEX 期货合约。每一个合约的规模为 25 000 磅铜。这一策略的实际效果是将加工商所需铜的价格锁定在每磅 320 美分左右。

假定在 5 月 15 日铜的价格为每磅 325 美分。因为 5 月份为铜期货的交割月，即期价格与期货价格非常接近。加工商从期货合约中所得收益大约为

$$100\,000\times(3.25-3.20)=5\,000\text{ 美元}$$

同时为买入铜而支付 100 000 × 3.25 = 325 000 美元，因此整体费用大约等于 325 000 − 5 000 = 320 000美元。对于另外一种情形，假定在 5 月 15 日铜的期货价格为每磅 305 美分。加工商在期货中损失大约为

$$100\,000\times(3.20-3.05)=15\,000\text{ 美元}$$

而买入铜时的支出为 10 000 × 3.05 = 305 000 美元。因此整体费用大约为 320 000 美元，即每磅 320 美分。

注意，对于这家公司而言，采用期货合约的策略要优于在 1 月 15 日即期市场买入铜的策略。如果公司采用后一种方法，它必须每磅铜支付 340 美分，并且还要付出利息和储存费用。对一家经常需要铜的公司，这些不便可能会被持有铜所带来的便利收益而抵消[⊖]。但是，如果公司知道自己在 5 月 15 日之前不需要铜，期货合约可能会是一种更好的选择。

在前面的例子中，我们均假定期货头寸在交割月被平仓。如果允许交割发生，对冲的基本效果仍然是一样的。但是，履行交割的费用可能很昂贵并且非常不便。出于这一原因，即使对冲者

⊖ 见第 5.11 节关于便利收益的讨论。

将期货合约持有到交割月，实际交割也常常不会发生。像我们在今后讨论的那样，持有期货长头寸的对冲者通常在交割期之前对期货进行平仓以避免任何接受交割的可能。

在这两个例子中，我们假定对期货合约没有每天结算。在实际中，每天结算对于对冲确实有一定的微小影响。如第 2 章所述，这意味着由期货合约带来的收益在对冲的期限内每天会逐步实现，而不只是全部在到期时的最后时刻实现。

3.2 拥护与反对对冲的观点

支持对冲的观点非常明显，因此不再重述。大多数公司属于制造业、零售业、批发业或服务业，这些公司没有预见利率、汇率以及商品价格变化的特殊能力。因此，对于这些公司而言，对冲这些市场变量所引起的风险很有意义，因为这样公司可以集中精力发展自身的主要业务，而这些主要业务正是这些公司的特长。通过对冲，公司可以避免一些类似于期货价格等市场变量的大幅变动触发损失而给人带来的不快。

在实际中，许多风险未被对冲。下面我们将陈述这样做的原因。

3.2.1 对冲与股东

有一种观点认为，股东如果愿意的话，他们可以自己对冲面临的风险，而不需要公司为他们做这些。但是，这一观点有所欠妥，因为它假定了股东与公司管理人员对公司所面临的风险有同样的了解。但在大多数情况下，事实并非如此。这一观点也忽略了手续费和其他交易费用。对于大的交易，相对于被对冲的每 1 美元来讲，费用要比小型交易的相应费用更低。因此由公司对冲比由个人对冲要更为划算。事实上，期货合约的规模使得个人股东在许多情形下难以利用期货产品来对冲风险。

个人股东比企业做起来更容易的一件事是将风险分散化。一个持有充分分散投资组合的股东可能会免于承受企业所面临的许多风险。例如，一个进行多样化投资的股东可能拥有铜生产公司和铜消费公司两家公司的股票，这样他对铜的价格就没有太多的风险暴露。如果公司是代表多样化投资的股东利益，那么可以讲在许多情形下没有必要对冲。在实际中，管理人员受这种观点影响的程度仍值得商榷。

3.2.2 对冲与竞争

在某些行业如果对冲行为并不是常规做法，也许一家公司选择与别人都不相同的做法是没有意义的。行业之间的竞争压力会迫使企业调整产品价格与服务费来反映原材料价格、利率以及汇率的变化。因此，一家选择不对冲风险的企业可以大体期望利润率保持恒定，而一个选择对冲风险的企业利润可能会有很大的浮动。

为了说明这一点，让我们考虑两家黄金珠宝加工商，SafeandSure(保守)公司与 TakeaChance(激进)公司。我们假定在这个行业中大多数公司不采用对冲措施，TakeaChance 也不例外。但是 SafeandSure 却采用与众不同的策略，决定利用期货合约来锁定未来 18 个月内的黄金价格。当黄金价格上涨时，经济压力会造成珠宝批发价格普遍上涨，这样一来，TakeaChance 的利润基本不受影响。与此相反，由于采用了对冲，SafeandSure 公司的利润将会提高。而当黄金价格下跌时，经济压力会造成珠宝批发价格普遍下跌，从而 TakeaChance 公司的利润仍然不会受到太大影响，但 SafeandSure 公司利润将会下降。在某些极端条件下，由于对冲的缘故，SafeandSure 的利润可能会出现负值(见表 3-1)。

表 3-1 在同业竞争对手不对冲时采用对冲策略的风险

黄金价格的变化	对黄金珠宝价格的影响	对 TakeaChance 利润的影响	对 SafeandSure 利润的影响
上涨	上涨	没有影响	增加
下跌	下跌	没有影响	减少

这一例子强调，在选择对冲策略时一定要从全局出发，在设计对冲策略时一定要考虑价格变化对企业盈利的整体影响。

3.2.3 对冲可能会带来不良结果

我们特别应该认识到一个现实问题：与不采用对冲相比，采用对冲既可以增加也可以减少企业的盈利。以下让我们假设一家公司准备用卖空期货交易来对冲将来的100万桶石油销售中的风险。当石油价格下跌时，公司在石油销售中会有损失，但公司在对冲交易中会得到正收益，公司资金部主管也因为有这样的业务远见而得到称赞。很明显，与不采用对冲相比，采用对冲给公司带来了更好的收益，公司的其他主管也会(希望如此)赞赏资金部的成就。当石油价格上升时，公司在销售中会盈利。对冲交易却带来损失，此时对冲比不对冲更糟糕。即使对冲在最初被认为是一个明智的决策，此时资金部仍然会难以令人信服当初为什么会采取对冲决策。假定原油价格每桶上涨到89美元，期货对冲的损失为每桶10美元。以下是我们想象的资金部主管同公司总裁的对话：

总裁：真是太糟了，我们在过去3个月因为期货而损失了1 000万美元！究竟是怎么回事？我需要解释。

资金部主管：我们进入期货交易是为了对冲石油价格变化带给我们的风险。对冲交易的目的不是为了盈利。请不要忘记在石油价格上涨时，我们在销售中盈利1 000万美元。

总裁：这同我们的损失有什么关系？这就如同是在讲我们因纽约的销售好，而不去关心在加州的销售业绩。

资金部主管：那么如果石油价格下跌呢？……

总裁：我不关心石油价格下跌后会怎么样，事实上，石油的价格上涨了。我真的不知道你原来在期货市场是这样胡闹。我们的股东希望看到我们在这一季度表现出色，我如何向股东解释因为你的行为而造成1 000万美元的损失呢？今年你恐怕不会拿到分红。

资金部主管：这不公平。我这样做是因为……

总裁：不公平!？你不被解雇就已经很幸运了，你毕竟损失了1 000万美元。

资金部主管：这取决于你怎么看……

这一实例说明为什么有时公司资金部主管不太情愿进行对冲，对冲策略虽然可以缓解公司所面临的风险，但如果别人不理解对冲的内在意义，这一策略会增加资金部主管“本人”所面临的风险，解决这一问题的唯一方法就是在实施对冲策略之前一定要让公司的所有高级主管理解对冲的内在含义。理想的做法是由公司董事会来指定对冲政策，并与公司管理层及股东进行充分的沟通(业界事例3-1介绍了金矿企业的对冲决策)。

业界事例3-1　金矿企业的对冲决策

金矿企业担心黄金价格会变化而采用对冲决策，这看起来非常自然。通常金矿企业要花几年时间来提取一个矿井中的黄金。当一个金矿企业准备开发某一金矿时，企业自然会对黄金价格有很大的风险暴露，考虑所有不定因素后一个外表看来会盈利的金矿事实上会变得亏损。

金矿企业会很谨慎地向其股东解释其采用的对冲决策，而有些金矿企业不采用对冲来回避风险，这些公司是想吸引那些想在黄金价格上涨中盈利，同时接受在黄金价格下跌时遭受损失的投资者。而有些金矿企业采用对冲来回避风险，这些公司对在今后几年的黄金日产量有一个大概的估计，然后根据估计来卖空期货或远期合约以锁定卖出黄金的价格。

假设你代表高盛公司(Goldman Sachs)同某金矿企业签署了一份远期合约，合约约定你要以一指定价格买入某数量的黄金，这时你将如何对冲自己的风险呢？这一问题的答案是：你会在中央银行借入黄金然后将黄金在现市上变卖(许多国家的中央银行都储有大量的黄金)。在远期合约期满时，你从金矿企业那里买入黄金以偿还从中央银行处借入的黄金。指定的黄金远期价格反映了你所能得到的无风险利率以及你向中央银行支付的黄金租用利率。

3.3 基差风险

到目前为止，我们所考虑的对冲实例过于完美，几乎不太可能发生。在这些完美的实例中，对冲者可以确定将来买入资产的准确时间，也可以用期货合约来消除几乎所有的在相应时间由于资产价格变动而带来的风险。在实践中，对冲常常没有这么容易，部分原因如下：

- 需要对冲价格风险的资产与期货合约的标的资产可能并不完全一致。
- 对冲者可能并不确定资产买入及卖出的时间。
- 对冲者可能需要在期货到期月之前将期货进行平仓。

这些问题就带来了所谓的**基差风险**(basis risk)。接下来我们将解释这一概念。

3.3.1 基差

在对冲的意义下，**基差**(basis)的定义为：[⊖]

基差 = 被对冲资产的即期价格 - 用于对冲的期货合约的价格

如果被对冲的资产与期货合约的标的资产等同，在期货到期时，基差为0。在到期日之前，基差或者为正或者为负。如表2-2所示，我们看到在2010年5月26日，黄金的基差为负，短期大豆合约的基差为正。

随着时间的流逝，即期价格变化与某个特定月份的期货价格变化并不一定相同，因而导致基差的变化。当基差变大时，称为**基差增强**(strengthening of the basis)；当基差变小时，称为**基差减弱**(weakening of the basis)。图3-1说明当基差为正时，在期货到期之前基差随时间变化的形式。

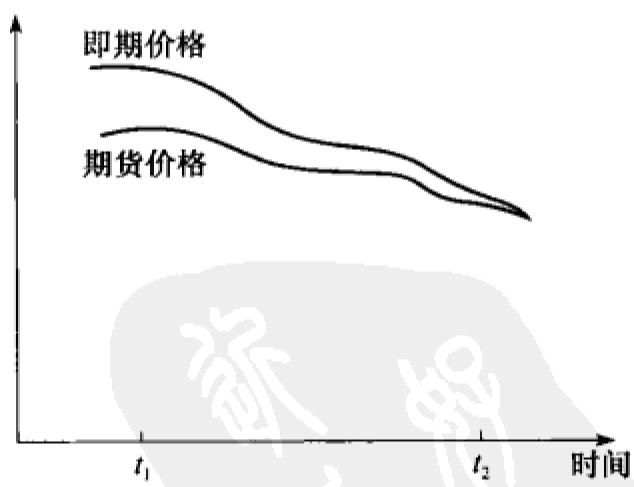


图3-1 基差随时间的变化

为了检验基差风险的性质，我们定义以下变量：

S_1——在 t_1 时刻的即期价格；

S_2——在 t_2 时刻的即期价格；

F_1——在 t_1 时刻的期货价格；

F_2——在 t_2 时刻的期货价格；

b_1——在 t_1 时刻的基差；

b_2——在 t_2 时刻的基差。

我们假定对冲在 t_1 时刻设定，并在 t_2 时刻平仓。作为实例，我们假定现货及期货价格在对冲刚刚设定时的价格分别为2.50美元及2.20美元，而在对冲平仓时的价格分别为2美元及1.90美元。这意味着 $S_1=2.50$，$F_1=2.20$，$S_2=2.00$ 及 $F_2=1.9$。由基差定义

$$b_1=S_1-F_1 \quad 及 \quad b_2=S_2-F_2$$

得出 $b_1=0.30$ 及 $b_2=0.10$。

⊖ 这是通常意义下的定义。当期货是关于金融资产时，另外一种定义有时也被采用，即基差 = 期货价格 - 即期价格。

首先考虑如下情形：对冲者已知资产将在 t_2 时刻卖出，并且在 t_1 时刻持有了期货短头寸。资产实现的价格为 S_2，期货的盈利为 $F_1 - F_2$。由这种对冲策略得到的实际价格为

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

在我们的例子中，上式等于2.30美元。在 t_1 时刻 F_1 的价格为已知。如果这时 b_2 也为已知，由此可以构造完美对冲。对冲风险与 b_2 有关，此风险即基差风险。考虑另外一种情况，公司知道自身在 t_2 时刻将购买资产，因而在 t_1 时刻进行长头寸对冲。买入资产支付价格为 S_2，对冲的损失为$F_1 - F_2$。对冲资产所支付的实际价格为

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

这与前面的表达式一样，本例中上式等于2.30美元。在 t_1 时刻 F_1 的价格为已知，b_2 代表了基差风险。

注意，基差风险会使对冲者的头寸得以改善或恶化。考虑一个短头寸对冲，如果基差意想不到地扩大，对冲者的头寸会有所改善；如果基差意想不到地减小，对冲者的头寸会有所恶化。同样，对于一个长头寸对冲，如果基差意想不到的增强，对冲者的头寸将会恶化；如果基差意想不到的减弱，对冲者的头寸将会改善。

有时给对冲者带来风险的资产与用于对冲的合约标的资产是不一样的，这叫交叉对冲，我们在下一节将讨论。这时基差风险会更大。定义 S_2^* 为在 t_2 时刻期货合约中标的资产的价格。同上，S_2 是在 t_2 时刻被对冲资产的价格。通过对冲，公司确保购买或出售资产的价格为

$$S_2 + F_1 - F_2$$

上式可变形为

$$F_1 + (S_2^* - F_2) + (S_2 - S_2^*)$$

$S_2^* - F_2$ 及 $S_2 - S_2^*$ 两项代表基差的两个组成部分。当被对冲的资产与期货合约中的资产一致时，相应的基差为 $S_2^* - F_2$，而当两个资产不同时，$S_2 - S_2^*$ 是由于两个资产差异而带来的基差。

3.3.2 合约的选择

影响基差风险的一个关键因素是对冲时所选用的期货合约，选择期货合约应考虑两个因素：

- 选择期货合约的标的资产。
- 选择交割的月份。

如果被对冲的资产刚好与期货的标的资产吻合，通常这里的第1个选择就非常容易。在其他情况下，对冲者必须仔细分析以确定哪一种可以使用的期货合约与被对冲资产的价格有最密切的相关性。

交割月份的选择与几个因素有关。在本章以上的例子中，当我们假定对冲的到期日与期货交割月份一致时，就应直接选择该交割月份的期货合约。事实上，在这些情况下，对冲者通常会选择一个随后月份交割的期货合约。这是由于在某些情况下，交割月份中期货价格不太稳定。同时，长头寸对冲者在交割月份持有合约而会面临不得不接受资产交割而带来的风险，资产交割会带来成本并造成不便(长头寸对冲者一般喜欢将期货合约平仓，然后在其常用的供应商处买入资产)。

一般来说，当对冲的到期日与期货交割月份之间的差距增大时，基差风险也会随之增大。一个经验法则(rule of thumb)是尽量选择与对冲的到期日最近，但仍长于对冲到期日的交割月份。假定某一资产期货的到期月分别为3月、6月、9月及12月。对于在12月、1月、2月到期的对冲，应选择3月份的合约；对于在3月、4月、5月到期的对冲，应选择6月份的合约，等等。这一经验法则假定满足对冲需求的所有合约均有足够大的流动性。在实践中，短期限的期货合约往往有最强的流动性，因此在某些情况下，对冲者会倾向于采用短期合约并且不断将合约向前展期。本章后面的内容将讨论这一策略。

【例 3-1】 假定今天为 3 月 1 日。一个美国公司预期将在 7 月底收入 5 000 万日元。CME 的日元期货具有 3 月、6 月、9 月和 12 月的交割月份。每份合约的交割数量为 1 250 万日元。因此这家公司在 3 月 1 日进入 4 份 9 月份日元期货短头寸。在 7 月底收到日元时，公司对其期货合约平仓。假设日元期货在 3 月 1 日的价格为每日元 0.780 0 美分，而当期货被平仓时的即期价格与期货价格分别为 0.720 0 美分和 0.725 0 美分。

在期货合约上的盈利为每日元 0.780 0 − 0.725 0 = 0.055 0 美分。当合约被平仓时基差为每日元 0.720 0 − 0.725 0 = −0.005 0 美分。所得以每日元按美分计的有效价格是最后的即期价格加上从期货所得盈利：

$$0.7200 + 0.0550 = 0.7750 \text{ 美分}$$

这也可以写成最初的期货价格加上最后的基差：

$$0.7800 + (-0.0050) = 0.7750 \text{ 美分}$$

公司从 5 000 万日元上所收的美元数量是 50 × 7 750，即 387 500 美元。

【例 3-2】 假定今天为 6 月 8 日，一家公司知道在 10 月份或 11 月份的某个时刻需要买入 20 000 桶原油。目前纽约商品交易所(NYMEX)交易的原油期货合约在每一个月都有交割，每份合约的规模为 1 000 桶原油。公司采用 12 月份的期货来进行对冲并进入 20 份 12 月份合约的长头寸。在 6 月 8 日期货价格是每桶 68.00 美元。公司在 11 月 10 日需要购买原油，因此在这天对期货合约平仓。在 11 月 10 日，即期价格和期货价格分别是每桶 70.00 美元和每桶 69.10 美元。

在期货上的盈利是每桶 69.10 − 68.00 = 1.10 美元。平仓时的基差是每桶 70.00 − 69.10 = 0.90 美元。所付的有效价格是(每桶按美元计)最后现价减去在期货上的盈利

$$70.00 - 1.10 = 68.90 \text{ 美元}$$

这也可以由最初取货价格加上最后的基差来计算

$$68.00 + 0.90 = 68.90 \text{ 美元}$$

所付的总价格是 68.90 × 20 000 = 1 378 000 美元。

3.4 交叉对冲

在例 3-1 和例 3-2 中，用于对冲的期货的标的资产等同于价格被对冲的资产。当两个资产不同时将会出现**交叉对冲**(cross hedging)。例如，某家航空公司对飞机燃料油的未来价格有些担心，但是由于没有飞机燃料油的期货，这家公司也许会采用加热油期货合约来对冲风险。

对冲比率(hedge ratio)是指持有期货合约的头寸大小与资产风险暴露数量大小的比率。当期货的标的资产与被对冲资产一样时，应选取的对冲比率当然为 1.0。这正是我们在以上所有例子中所采用的对冲比率。例如，在例 3-2 中，对冲者的风险暴露为 20 000 桶原油，进入期货所对应的资产交割数量刚好与以上头寸相等。

当采用交叉对冲时，对冲比率为 1.0 并不一定最优。对冲者所采用的对冲比率应使得被对冲后头寸的价格变化方差达到极小。我们现在考虑对冲者将如何做到这一点。

3.4.1 最小方差对冲比率的计算

最小方差对冲比率取决于即期价格的变化与期货价格变化之间的关系。我们将采用以下符号：

ΔS ——在对冲期限内，即期价格 S 的变化；

ΔF ——在对冲期限内，期货价格 F 的变化；

我们用 h^* 表示最小方差对冲比率，可以证明 h^* 是 ΔS 对 ΔF 进行线性回归时所产生的最优拟合直线(best-fit line)的斜率(见图 3-2)。这个结果在直观上很合理，我们希望 h^* 是当 F 变化时，

S 平均变化的比例。

h^* 的公式如下：

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{3-1}$$

式中，σ_S 是 ΔS 的标准差，σ_F 是 ΔF 的标准差，ρ 是两者之间的相关系数。

式(3-1)显示最佳对冲比率等于 ΔS 与 ΔF 之间的相关系数乘以 ΔS 的标准差与 ΔF 的标准差之间的比例。图 3-3 说明对冲者头寸价值变化的方差与对冲比率之间的关系。

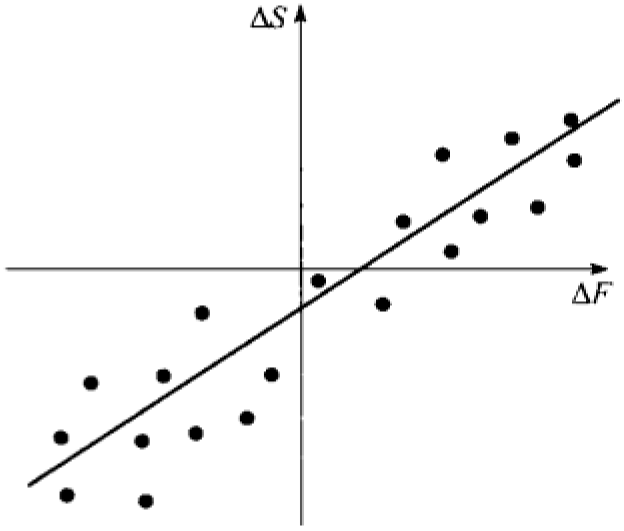


图 3-2　即期价格变化与期货价格变化之间的回归曲线

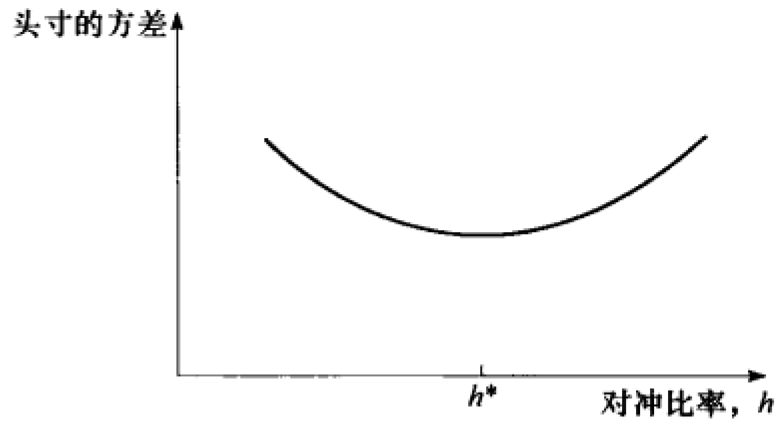


图 3-3　对冲者头寸价值变化的方差与对冲比率的关系

如果 $\rho = 1$ 和 $\sigma_F = \sigma_S$，最佳对冲比率 h^* 为 1.0。因为这时期货价格正好等于即期价格，这一结果正是我们所预期的。如果 $\rho = 1$ 和 $\sigma_F = 2\sigma_S$，最佳对冲比率 h^* 为 0.5。因为这时期货价格的变化幅度是即期价格变化幅度的 2 倍，因此这一结果也正好是我们所预期的。**对冲效率**(hedge effectiveness)可以被定义为对冲所消除的方差量占总方差的比率，这正是 ΔS 对 ΔF 进行回归的 R^2 系数，并且等于 ρ^2。

式(3-1)中的参数 ρ、σ_F 和 σ_S 通常是通过 ΔS 和 ΔF 的历史数据来估计(这里所隐含的假设是从某种意义上，未来与历史相同)，在计算中要选择一定数量的长度相等而且不重叠的时间区间，然后在每个区间上观测 ΔS 和 ΔF 的值。理想的做法是等时区间选定与对冲的期限相同。在实际中，这一做法有时会严重地限制可以利用的观察值数量，因此一般会选用较小的时间段。

3.4.2　最优合约数量

为了计算对冲所采用的合约数量，定义：

Q_A——被对冲头寸的大小(单位数量)；

Q_F——合约的规模(单位数量)；

N^*——用于对冲的最优期货合约数量。

应采用的期货合约的面值为 $h^* Q_A$，因此所需的期货数量为

$$N^* = \frac{h^* Q_A}{Q_F} \tag{3-2}$$

例 3-3 说明了某航空公司如何将本节的结论用于对冲购买燃料。[⊖]

⊖ 加热油期货比飞机燃料油期货的流通性更好。关于 Delta 航空公司(Delta Airlines)如何采用加热油来对冲其将来购买飞机燃料油所带来的风险，参见 A. Ness，"Delta Wins on Fuel,"*Risk*，June 2001：p8。

【例3-3】 某航空公司预计在一个月后需要购买200万加仑的飞机燃料油并决定用加热油期货来进行对冲。我们假定表3-2给出了15个连续月份的飞机燃料每加仑油价变化 ΔS 以及相应月份用于对冲的取暖油期货价格变化 ΔF。利用通常计算标准差和相关系数的公式，我们可以得出 $\sigma_F = 0.0313$，$\sigma_S = 0.0263$，$\rho = 0.928$。

由式(3-1)可以得出

$$h^* = 0.928 \times \frac{0.0263}{0.0313} = 0.7777$$

每份NYMEX的取暖油期货包括42 000加仑取暖油。由式(3-2)得最优合约的数量为

$$\frac{0.7777 \times 2\,000\,000}{42\,000} = 37.03$$

近似到最近的整数，合约数量为37。

表3-2 当采用取暖油期货来对冲航空燃料油时决定最佳对冲比率的数据

月份	每加仑取暖油期货价格的变化	每加仑航空油料价格的变化	月份	每加仑取暖油期货价格的变化	每加仑航空油料价格的变化
1	0.021	0.029	9	0.048	0.043
2	0.035	0.020	10	-0.006	0.011
3	-0.046	-0.044	11	-0.036	-0.036
4	0.001	0.008	12	-0.011	-0.018
5	0.044	0.026	13	0.019	0.009
6	-0.029	-0.019	14	-0.027	-0.032
7	-0.026	-0.010	15	0.029	0.023
8	-0.029	-0.007			

3.4.3 尾随对冲

当采用期货来对冲时，由于期货合约每天结算的特征，我们需要稍微做一种被称为**尾随对冲**(tailing the hedge)的调整。在实际中，这意味着式(3-2)变为[⊖]

$$N^* = \frac{h^* V_A}{V_F} \tag{3-3}$$

式中，V_A 为被对冲头寸的实际货币价值，V_F 为一个期货合约的货币价值(期货价格乘以 Q_F)。假定在例3-3中，期货价格和即期价格分别为1.94及1.99美元，因此 $V_A = 2\,000\,000 \times 1.94 = 38\,800\,000$ 以及 $V_F = 42\,000 \times 1.99 = 83\,580$。

因此对冲需要的最佳期货数量为

$$\frac{0.7777 \times 3\,880\,000}{83\,580} = 36.10$$

近似到最近整数，最佳数量为36而不是37。尾随对冲的实际效果是将式(3-2)中的对冲比率与即期价格与期货价格的比率相乘。理论上，对冲期货头寸应随着 V_A 和 V_F 的变化而做出调整，但实际情况并不是那么可行。

如果对冲中使用的是远期合约而不是期货合约，就没有每天结算的问题，对冲的期货合约数量应当由式(3-2)给出。

3.5 股指期货

接下来考虑股指期货以及如何将其用于管理股权价格的风险暴露和对冲。

⊖ 关于式(3-3)的解释，见练习题5.23。

股指(stock index)跟踪一个虚拟的股票组合的价值变化。各种股票在这一组合中的权重等于股票组合投资于这一股票的比例。在很短一段时间内股指上升的百分比被设定为该虚拟组合价值变化的百分比。在计算中通常不包括股息，因此股指是用于跟踪投资这一组合的**资本盈亏**(capital gain/loss)[⊖]。

如果虚拟股票投资组合保持不变，那么组合中单个股票的权重就不一定为固定值。如果组合中某一股票的价格比其他股票的涨幅要大得多，那么这一股票的权重就会自动增大。有些指数的构造方式是在一定数量股票中分别抽取单位数量的股票构成的，其权重与股票的市场价格成比例，而且当某股票拆股时，其系数也要做出调节。有些股指的构造使得权重与市场资本总价值(股票价格×发行的数量)成正比。这时股票组合会对股票的拆股、股息和新股发行自动进行调整。

3.5.1 股指

表3-3显示了2010年5月26日不同股指的期货合约价格。

表3-3 2010年5月26日不同股指期货合约的报价

	开盘价	最高价	最低价	结算价格	变化量	成交量	未平仓数量
道琼斯工业100，10倍指数(CME Group)							
2010年6月	10 080	10 160	9 921	9 921	-104	533	12 353
2010年9月	10 080	10 085	9 864	9 864	-104	2	225
标准普尔500，250倍指数(CME Group)							
2010年6月	1 080.0	1 089.5	1 060.5	1 061.2	-11.8	43 076	296 397
2010年9月	1 084.0	1 085.5	1 057.5	1 057.0	-11.9	6 850	26 966
2010年12月	1 074.0	1 081.9	1 052.9	1 053.1	-11.8	7	4 326
纳斯达克100，100倍指数(CME Group)							
2010年6月	1 827.0	1 850.0	1 788.0	1 791.5	-24.0	2 350	20 674
罗素1000，100倍指数(ICE)							
2010年6月	595.4	601.0	586.4	585.7	-5.8	1 214	19 275
美元指数，1 000倍指数(ICE)							
2010年6月	86.725	87.480	86.625	87.244	0.356	37 321	35 401
2010年9月	87.270	87.800	87.050	87.584	0.356	74	2 533

资料来源：Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc., © 2007 Dow Jones & Company Inc. All Rights Reserved Worldwide.

道琼斯工业平均指数(Dow Jones Industrial Average)是基于一个由美国30只**蓝筹股**(blue-chip)所组成的股票组合，其权重对应于其股票价格。在CME交易关于这一指数的两个合约：一种期货的标的变量是10美元乘以指数值；另一种是5美元乘以指数值。

标准普尔500股票指数(S&P500)是基于一个包括500种股票的组合，这500种股票的构成为：400种工业股、40种公共事业股、20种交通业股及40种金融股。在任何时间，股票的权重与该股票的总市值成正比。这些股票在NYSE Euronext或Nasdaq OMX上市。CME集团有两种关于标准普尔500的期货合约：一种是关于250美元乘以指数；另外一种是关于50美元乘以指数。

纳斯达克100指数(Nasdaq 100)由全美债券交易自动报价服务联合会(National Association of

⊖ 这里一个例外是**整体收益指数**(total return index)。在计算整体收益指数收益时，假定股息也会被重新投资于组合中。

Securities Dealers Automatic Quotations Service）所提供的100只股票所组成。芝加哥交易所交易两种合约，一种是关于100美元乘以指数；另一种是关于20美元乘以指数。

罗素 1 000 指数（Russell 1 000 Index）是由美国最大的1 000家公司股票所构成的指数。**美元指数**（U. S. Dollar Index）是**交易加权**（trade-weighted）指数，其组成货币为（欧元、日元、英镑、加元、瑞典克朗及瑞士法郎）。

由第2章所述，股指期货合约采用现金交割，而不是实际交割标的资产。在最后一个交易日，所有的合约必须以最后一天交易日的开盘价或收盘价作为**市场定价**（marked to market），然后头寸会被平仓。例如，对于标准普尔500期货的平仓是基于标准普尔500在交割月的第3个星期五的开盘价来结算的。

3.5.2　股权组合的对冲

股指期货可用于对冲风险分散良好的组合。定义：

V_A——组合的目前价值；

V_F——期货的目前价值（期货价格乘以期货规模）。

如果组合是为了模拟股票指数，最优对冲率 h^* 为 1.0，而且式（3-3）给出了需要持有期货短头寸的数量为

$$N^* = \frac{V_A}{V_F} \tag{3-4}$$

例如，某股票组合模拟了标准普尔500，其价值为5 050 000美元。股指当前值为1 010，每一份期货是关于250倍的股指。这时，$V_A = 5\,050\,000$ 和 $V_F = 1010 \times 250 = 252\,500$。因此，对冲者应该持有20份期货短头寸来对冲这个股票组合。

当交易组合不完全模拟股指时，我们可以采用资本资产定价模型中的 β 值来确定持有期货短头寸的数量。β 是将组合超过无风险利率的收益与股票市场超过无风险利率的收益进行回归所产生的最佳拟合直线的斜率。当 $\beta = 1$ 时，组合收益往往模拟了市场收益；当 $\beta = 2$ 时，组合超过无风险利率的收益等于股票市场超过无风险收益的两倍；当 $\beta = 0.5$ 时将会是一半，等等。

一个 β 值等于 2.0 的组合对市场的敏感度是一个 β 值等于 1.0 的组合的两倍。因此，为了对冲这一组合，我们将需要两倍数量的合约。类似地，一个 β 值等于 0.5 的组合对市场的敏感度是一个 β 值等于 1.0 的组合的一半，因此我们只需要一半数量的合约来对冲风险。一般来讲，

$$N^* = \beta \frac{V_A}{V_F} \tag{3-5}$$

式（3-5）假定期货合约的到期日与对冲期限的到期日较为接近。

比较式（3-5）和式（3-3），可以推出 $h^* = \beta$。这并不意外，对冲比率 h^* 是将组合变化对于股指期货变化做线性回归时的最优拟合直线的斜率，β 是组合变化对股指变化做线性回归时的最优拟合直线的斜率。

我们通过举例来说明利用这个公式做对冲的结果很好。假定采用4个月期限的期货合约来对组合在今后3个月内的价值进行对冲，因此

标准普尔 500 股指当前值 = 1 000

标准普尔股指期货价格 = 1 010

组合价值 = 5 050 000 美元

无风险利率 = 每年 4%

$$股指票息收益率 = 每年1\%$$
$$组合的\beta = 1.5$$

一份期货合约是交割250倍的股指，因此 $V_F = 250 \times 1\,010 = 252\,500$。由式(3-5)得出对冲组合所需要的端头寸期货数量为

$$1.5 \times \frac{5\,050\,000}{252\,500} = 30$$

假定股指在3个月后为900，期货价格为902。期货短头寸的收益为

$$30 \times (1\,010 - 902) \times 250 = 810\,000 \text{ 美元}$$

股指的亏损为10%。股指每年付出1%的股息收益率，或每3个月0.25%。因此，将股息考虑在内时股指投资者在3个月内的收益为-9.75%。无风险利率大约为每3个月1%。由于组合的 β 是1.5，由资本资产定价模型得出：

$$组合的收益期望值 - 无风险利率 = 1.5 \times (股指收益 - 无风险利率)$$

因此，组合在3个月的收益期望率(%)为

$$1.0 + [1.5 \times (-9.75 - 1.0)] = -15.125$$

因此组合在3个月后期望值(包括股息)为

$$5\,050\,000 \times (1 - 0.151\,25) = 4\,286\,187 \text{ 美元}$$

在考虑对冲收益后，对冲者头寸价值的期望值为

$$4\,286\,187 + 810\,000 = 5\,096\,187 \text{ 美元}$$

表3-4总结了这些计算并对股指在到期时其他可能的数值进行了类似的计算。可以看出，3个月后对冲者的头寸几乎与股指的值无关。

表3-4 股指对冲的表现

3个月时的股指价格	900	950	1 000	1 050	1 100
当前的股指价格	1 010	1 010	1 010	1 010	1 010
3个月时的股指期货价格	902	952	1 003	1 053	1 103
股指期货的收益(美元)	810 000	435 000	52 500	-322 500	-697 500
市场收益	-9.750%	-4.750%	0.250%	5.250%	10.250%
组合的预期回报	-15.125%	-7.625%	-0.125%	7.375%	14.875%
包括股息的组合的预期回报(美元)	4 286 187	4 664 937	5 043 687	5 422 437	5 801 187
整体头寸在3个月时的价值(美元)	5 096 187	5 099 937	5 096 187	5 099 937	5 103 687

在这个例子中我们还没有讨论期货价格与即期价格之间的关系。通过第5章我们将可以看到所假设的当前期货价格1 010与我们假设的利率和股息率是一致的。这一结论对于表3-4中的期货价格也适用。[⊖]

3.5.3 为什么对冲股权组合

表3-4显示对冲策略使得对冲者在3个月后的头寸价值大约比在对冲开始时的头寸价值高1%。这一结果并不奇怪，因为无风险利率每年为4%，或每3个月为1%。对冲使得对冲者的组合头寸按无风险利率增长。

我们自然要问，为什么要采用期货合约来对冲呢？为了取得无风险利率的收益，对冲者只需变卖资产，并将取得的资金投放于类似短期国债类的无风险产品即可。

⊖ 表3-4的计算假定股指的票息收益率可以被预测，无风险利率为常数，而且股指在3个月内收益与组合收益之间具有完美的相关性。在实际中，这些假设并不完全成立，对冲效果并不像表3-4描述的那样完美。

这个问题的答案之一是，如果对冲者感觉股票组合中的股票选取的很好，那么进行对冲是有道理的。在这种情况下，对冲者对市场的整体风险很不确定，但却确信组合中的股票收益会高于市场的收益(对组合β值进行调整之后)。一个对冲者可以采用期货来消除因市场变动而触发的风险，并且使得股票组合收益的风险仅仅暴露于市场风险。另一个原因是，对冲者计划在一个较长时间内持有股票组合，但需要在短时间内对市场的不定性来进行保护。将资产变卖并在将来买回的做法可能会带来难以承受的成本。

3.5.4　改变组合的β

在表3-4所示的例子中，对冲者的β值减少为0，因此对冲者的收益期望几乎与指数表现无关。有时期货合约会被用来调节组合的β，而不是将β值减少为0。继续以上的例子：

标准普尔500股指当前值＝1 000

标准普尔500股指期货价值＝1 010

组合价值＝5 050 000美元

组合的$\beta=1.5$

同上，$V_F=250\times1\,010=252\,500$，进行完美对冲时所需合约数量为

$$1.5\times\frac{5\,050\,000}{252\,500}=30$$

为了将组合的β从1.5转变为0.75，我们所需要短头寸的合约数量应当为15，而不是30；当要将组合的β由1.5转变为2.0时，需要持有10个期权的长头寸，等等。通常来讲，当将组合的Beta值从β变为β^*时，其中$\beta>\beta^*$，需要持有短头寸的期货数量为

$$(\beta-\beta^*)\frac{V_A}{V_F}$$

当$\beta<\beta^*$时，需要持有长头寸的期货数量为

$$(\beta^*-\beta)\frac{V_A}{V_F}$$

3.5.5　锁定挑选股票的优势

假设你擅长挑选比市场表现好的股票；你拥有一只股票或一个股票组合；你不知道在今后几个月内股票市场的表现如何，但你非常确认你持有的股票将比市场表现要好。这时该怎么办？

你应该卖出数量等于$\beta V_A/V_F$的股指期货合约，其中β是你所持有股票的Beta值，V_A是持有的股票价值，V_F为股指期货合约的价格。如果你的股票比一个具有同样β但风险分散很好的组合表现要好，这时你就能赚钱。

考虑某投资者在4月份持有20 000股IBM股票，每股价格为100美元。投资者认为在今后3个月内市场会剧烈变动，但IBM很可能比市场表现要好。投资者想在今后3个月内利用8月份的标准普尔500期货合约来对冲市场变化。IBM的β值估计为1.1，8月份标准普尔500期货的当前价格为900美元，每一份合约是250美元乘以指数，这时$V_A=20\,000\times100=2\,000\,000$，及$V_F=900\times250=225\,000$，因此应当持有的股指期货短头寸数量为

$$1.1\times\frac{2\,000\,000}{225\,000}=9.78$$

近似取整数，对冲者应卖出10份股指期货，并在7月份平仓。假定IBM股票在一个月后跌至90美元，标准普尔500期货价格跌至750，投资于IBM股票的损失为$20\,000\times(100-90)=200\,000$美元，但在期货上的收益为$10\times250\times(900-750)=375\,000$美元。

在这个例子中，投资者的总体收益为175 000美元，这是因为IBM的股票并没有像$\beta=1.1$而且风险完全分散的组合那样下跌。如果市场价格上升，IBM的股票上升的幅度会大于$\beta=1.1$的组合，这时投资者还是赚钱的(正如投资者预期的那样)。

3.6 向前滚动对冲

有时需要对冲的期限要比所有能够利用的期货到期日更长，这时对冲者必须对到期的期货进行平仓，同时再进入具有较晚期限的合约，这样可以将对冲向前滚动很多次。考虑某家公司，它希望运用期货的短头寸来减少在将来T时刻收到资产时所带来的风险。如果在市场上存在期货合约1，2，3，…，n(并不一定目前都存在)，其到期日一个比一个更晚。公司可采用以下策略：

在t_1时刻：进入合约1的短头寸

在t_2时刻：对合约1进行平仓
　　　　　　进入合约2的短头寸

在t_3时刻：对合约2进行平仓
　　　　　　进入合约3的短头寸

⋮

在t_n时刻：对合约$n-1$进行平仓
　　　　　　进入合约n的短头寸

在T时刻：对合约n进行平仓

假设在2011年4月一家公司意识到将在2012年6月卖出1 000 000桶原油，并决定采用按1.0的对冲比率来对冲其风险(在该例中，我们不进行第3.4节描述的尾随对冲调整)。当前的即期价格为69美元。虽然每个月交割的合约都有交易，我们假设只有最前面6个月的合约具有足够可以满足公司要求的流动性。因此公司进入了100份2011年10月合约的短头寸。在2011年9月，将对冲向前滚动到2012年3月。在2012年2月，它将对冲向前滚动到2012年7月。

表3-5展示了一种可能出现的结果。2011年10月持短头寸时合约的价格为68.20美元，平仓时价格为67.40美元，因此盈利为每桶0.80美元；2012年3月持短头寸时合约的价格为67.00美元，平仓时价格为66.50美元，因此盈利为每桶0.50美元；2012年7月持短头寸时合约的价格为66.30美元，平仓时价格为65.90美元，因此盈利为每桶0.40美元。最终的即期价格为66美元。

表3-5　滚动对冲实例中的数据

日　期	2011年4月	2011年9月	2012年2月	2012年6月
2011年10月期货	68.20	67.40		
2012年3月期货		67.00	66.50	
2012年7月期货			66.30	65.90
即期价格	69.00			66.00

由持有短头寸每桶所得盈利为

$$(68.20-67.40)+(67.00-66.50)+(66.30-65.90)=1.70$$

即每桶1.70美元。原油价格从每桶69美元降至每桶66美元。每桶跌价3美元，而由期货的补偿只有每桶1.70美元，这看来不太令人满意。但是，当期货价格低于即期价格时，我们不能期望得到全部的补偿。假如2012年6月的期货交易活跃的话，这时最好的希望是将价格锁定该期货的价格上。

在实践中，公司通常每个月对标的资产都有风险暴露，同时利用一个月的期货合约来对冲，

因为这样的短期限合约流动性较强。在最初，公司会进入足够多的头寸(即将合约叠在一起)来覆盖所有在对冲展望期内的风险暴露。一个月后，公司将所有期货合约平仓，并向前滚动，即进入到新的合约以应对新的风险暴露等。

如业界事例3-2所示，德国金属公司在20世纪90年代曾按这种方法对冲公司由于提供固定价格商品而带来的风险。在商品价格下跌时，公司运作产生困难，原因是对短期期货损失要立即支付保证金，而所期望的长期收益却无法马上实现。对冲产品所产生的收益与对冲产品带来的损失时间不匹配，因此给公司带来了无法克服的流动性困难。这一事例的警示是，制定对冲计划时，一定要将流动性可能导致的潜在问题考虑在内。

业界事例3-2 德国金属公司对冲的失调

有时，向前滚动对冲会造成现金流压力。在20世纪90年代初，这一问题在德国金属公司(Metallgesellschaft，MG)身上体现得淋漓尽致。

MG公司以高于市场价6~8美分的固定价格向其客户出售了大量的5~10年加热油及汽油合约，然后采用期限较短的期货合约的长头寸来对冲其风险暴露，在对冲过程中，短期合约向前滚动。随后石油价格下跌，因持有期货，MG需要补充保证金，这给公司造成了短期现金流的压力。公司内主张这一对冲策略的成员认为这些短期现金流可被长期固定价格合约的现金流抵消，然而公司高管及银行家对这笔巨额现金流十分担心，最后公司只好对所有对冲交易进行平仓，同时放弃了向其客户支付固定价格的合约。结果MG损失了13.3亿美元。

小 结

本章讨论了公司采用期货来对冲资产价格风险的几种不同形式。如果资产价格上升，公司会盈利，而资产价格下跌，公司会亏损，此时应当采用期货的短头寸对冲。如果资产价格下跌公司会有收益，而当资产价格上升公司会有亏损时，应当采用期货的长头寸对冲。

对冲是减少风险的一种形式，因此受到多数高管的欢迎。在实际中，多种理论以及实际的原因会使得公司不进行对冲。从理论上讲当公司股东持有一个风险分散良好的组合时，公司的许多风险会被消除掉，因此并不需要公司去对冲这些风险。从实践的角度来讲，在同业竞争者都不进行对冲时，选择对冲会增大而不是降低风险。还有，当公司从价格上涨中收益，但在对冲中遭受损失时，公司资金部主管可能担心其他高管会对这一情形进行批评。

在对冲中，一个重要概念是基差风险。基差定义为即期价格与期货价格之差。基差风险的产生是由于在对冲到期日基差的不确定性。

对冲比率是期货合约的头寸与风险暴露资产头寸的比率。对冲比率为1.0并不一定总是最优。如果对冲者希望让头寸的方差最小，对冲比率可能并不等于1.0。最佳对冲比率是以即期价格变化与期货价格变化进行回归后所得最佳拟合直线的斜率。

股指期货可以用来对冲股权组合中的系统风险。所需要的期货合约数量等于等于组合的Beta乘以组合价值与一份期货合约的价值比。股指期权也可以在不改变组合股票构成的前提下，改变其Beta系数。

当不存在到期日比对冲期限更晚，并具有充分流动性的期货合约时，我们可以采用一个向前滚动的策略来进行对冲，包括进入一系列的期货交易。当第1个期货接近到期日时，该合约会被平仓，对冲者进入第2个具有更晚到期日的合约；当第2个期货接近到期日时，该合约会被平仓，对冲者进入第3个具有更晚到期日的合约；依此类推。这样做可由一系列短期合约来生成一个长期的期货合约。

推荐阅读

Allayannis, G., and J. Weston. "The Use of Foreign Currency Derivatives and Firm Market Value," *Review of Financial Studies*, 14, 1 (Spring 2001): 243–76.

Bodnar, G.M., G.S. Hayt, and R.C. Marston. "1998 Wharton Survey of Financial Risk Management by U.S. Non-Financial Firms," *Financial Management*, 2, 4 (1998): 70–91.

Brown, G.W. "Managing Foreign Exchange Risk with Derivatives." *Journal of Financial Economics*, 60 (2001): 401–48.

Culp, C. and M.H. Miller. "Metallgesellschaft and the Economics of Synthetic Storage," *Journal of Applied Corporate Finance*, 7, 4 (Winter 1995): 62–76.

Campbell, J.Y., K. Serfaty-de Medeiros, and L.M. Viceira. "Global Currency Hedging," *Journal of Finance*, 65, 1 (February 2010): 87–121.

Cotter, J., and J. Hanly. "Hedging: Scaling and the Investor Horizon," *Journal of Risk*, 12, 2 (Winter 2009/2010): 49–77.

Ederington, L.H. "The Hedging Performance of the New Futures Market," *Journal of Finance*, 34 (March 1979): 157–70.

Edwards, F.R. and M.S. Canter. "The Collapse of Metallgesellschaft: Unhedgeable Risks, Poor Hedging Strategy, or Just Bad Luck?" *Journal of Applied Corporate Finance*, 8, 1 (Spring 1995): 86–105.

Geczy, C., B.A. Minton, and C. Schrand. "Why Firms Use Currency Derivatives," *Journal of Finance*, 52, 4 (1997): 1323–54.

Graham, J.R. and C.W. Smith, Jr. "Tax Incentives to Hedge," *Journal of Finance*, 54, 6 (1999): 2241–62.

Haushalter, G.D. "Financing Policy, Basis Risk, and Corporate Hedging: Evidence from Oil and Gas Producers," *Journal of Finance*, 55, 1 (2000): 107–52.

Mello, A.S. and J.E. Parsons. "Hedging and Liquidity," *Review of Financial Studies*, 13 (Spring 2000): 127–53.

Neuberger, A.J. "Hedging Long-Term Exposures with Multiple Short-Term Futures Contracts," *Review of Financial Studies*, 12 (1999): 429–59.

Petersen, M.A. and S.R. Thiagarajan, "Risk Management and Hedging: With and Without Derivatives," *Financial Management*, 29, 4 (Winter 2000): 5–30.

Rendleman, R. "A Reconciliation of Potentially Conflicting Approaches to Hedging with Futures," *Advances in Futures and Options*, 6 (1993): 81–92.

Stulz, R.M. "Optimal Hedging Policies," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19 (June 1984): 127–40.

Tufano, P. "Who Manages Risk? An Empirical Examination of Risk Management Practices in the Gold Mining Industry," *Journal of Finance*, 51, 4 (1996): 1097–1138.

Tufano, P. "The Determinants of Stock Price Exposure: Financial Engineering and the Gold Mining Industry," *Journal of Finance*, 53, 3 (1998): 1015–52.

练习题

3.1 在什么情况下采用以下对冲：短头寸对冲；长头寸对冲。

3.2 采用期货合约来对冲会产生基差风险，这句话的含义是什么？

3.3 什么是完美对冲？一个完美对冲的后果一定好过不完美对冲吗？解释你的答案。

3.4 在什么情况下使得对冲组合方差为最小的对冲不会产生任何对冲效果？

3.5 列举资金部主管选择不对冲公司风险暴露的三种原因。

3.6 假定某商品价格每季度变化的标准差为0.65，商品的期货价格每季度变化的标准差为0.81，两种价格变化之间的相关系数为0.8。这时一个3月期合约的最佳对冲比率为多少？其含义是什么？

3.7 一家公司持有价值为2 000万美元，Beta值

为 1.2 的股票组合，该公司想采用 S&P 500 期货来对冲风险。股指期货的当前价格为 1 080，每一个期货是关于 250 倍的股指，什么样的对冲可以使风险极小化？公司怎么做才可以将组合的 Beta 值降至为 0.6？

3.8 芝加哥交易所的玉米期货合约的交割月份包括：3 月、5 月、7 月、9 月、12 月。当对冲期限如下所示时，对冲者应选用哪种合约来进行对冲？

(a) 6 月　(b) 7 月　(c) 1 月

3.9 一个完美对冲是否总能成功地将未来交易的价格锁定在当前的即期价格上？解释你的答案。

3.10 解释为什么短头寸对冲在基差意想不到地扩大时，对冲效果会有所改善；当基差意想不到地减小时，对冲效果会有所恶化。

3.11 假设你是一位向美国出口电子设备的某日本公司资金部主管，讨论你将采用什么样的策略来对冲外汇风险，你将如何使用这一策略并获得其他高管认可。

3.12 假定在第 3.3 节里的例 3-2 中，公司选择对冲比率为 0.8。这一选择将如何影响对冲的实施与结果。

3.13 “最小方差对冲比率为 1.0，这一对冲一定为完美对冲。”这一说法正确吗？解释你的答案。

3.14 “如果没有基差风险，最小方差对冲比率总为 1.0。”这句话是否正确，为什么？

3.15 “如果一个资产的期货价格通常低于其即期价格，这时长头寸对冲会很吸引人。”解释这一观点。

3.16 活牛市场价格的月变化标准差为每磅 1.2 美分，而活牛期货价格月变化的标准差为每磅 1.4 美分，这两个价格变化之间的相关系数为 0.7。现在时间是 10 月 15 日，一个牛肉商必须在 11 月 15 日买入 200 000 磅活牛，这一牛肉商想采用 12 月到期的期货合约来对冲其风险，每一个合约面值为 40 000 磅活牛，牛肉商应该采用什么样的对冲决策？

3.17 一个玉米农场的农场主有以下观点：“我不采用期货来对冲我面临的风险，我的真正风险并不是玉米价格的变化，而是气候可能会使我颗粒无收。”讨论这一观点，这个农民是否应该对玉米预期产量有所估计然后采用对冲策略来锁定预期价格。

3.18 在 7 月 1 日，某投资者持有 50 万股股票，股票价格为每股 30 美元，投资者想在今后一个月内对其持有股票进行对冲，并决定采用 9 月份的小型标准普尔 500 指数期货合约（Mini S&P 500），股指期货的当前价格为 1 500，一个合约是关于 50 倍的股指，Beta 值为 1.3。投资者应采取什么样的策略？在什么情况下会盈利？

3.19 假定在表 3-5 中，公司决定采用对冲比率 1.5，这一决定将会怎样影响对冲的实施以及结果？

3.20 使用期货来对冲，解释将这一合约采用每日按市场定价制度会产生的现金流问题。

3.21 一位航空公司主管有以下论点：“对冲航空燃料价格毫无意义，将来油价比期货价格低的情形与比期货价格高的情形有同样的可能性。”解释这位主管的观点。

3.22 假定 1 年黄金租赁利率为 1.5%，1 年无风险利率为 5%。这里的两个利率均为每年复利。利用业界事例 3-1 的讨论，计算当黄金的即期价格为 1 200 美元时，高盛公司应该报出的 1 年期的远期最大价格。

3.23 标准普尔 500 的期望收益率为 12%，无风险利率为 5%，以下投资的回报率期望分别是多少：(a) $\beta=0.2$；(b) $\beta=0.5$；(c) $\beta=1.4$。

作业题

3.24 一家公司希望通过汽油期货来对冲对一种新燃料价格变化的风险，这种新燃料价格变化与汽油期货价格变化之间的相关性为 0.6。在之后 3 个月内，新燃料价格每加仑上涨 1 美分，该公司就会损失 100 万美元；新燃料价格变化的标准差比汽油期货

价格的标准差大50%。如果用汽油期货来对冲，对冲比率是多少？公司对新燃料的风险暴露是多少(以加仑计)？该公司应该采用什么样的汽油期货头寸(以加仑为单位)？需要交易多少份汽油期货合约？每份合约为42 000加仑汽油。

3.25 一位基金经理管理一个β为0.2的组合。在过去的一年中，无风险利率为5%，股市表现非常糟糕，为-30%。该经理的组合回报是-10%。他声称在这种情况下，其管理的基金表现良好。请讨论他的结论。

3.26 表3-6是关于某商品的即期以及期货每月价格变化的数据，利用这些数据来计算使方差最小化的对冲比率。

表 3-6

即期价格变化	+0.50	+0.61	-0.22	-0.35	+0.79
期货价格变化	+0.56	+0.63	-0.12	-0.44	+0.60
即期价格变化	+0.04	+0.15	+0.70	-0.51	-0.41
期货价格变化	-0.06	+0.01	+0.80	-0.56	-0.46

3.27 假定今天是7月16日，一家公司持有价值1亿美元的股票组合，此股票组合的Beta系数为1.2，这家公司希望采用CME在12月份到期的S&P 500股指期货在7月16日至11月16日之间将Beta系数由1.2变为0.5。S&P 500股指当前价值为1 000，而每一份期货合约面值为250美元与股指的乘积。
(a) 公司应做什么样的交易？
(b) 假如公司改变初衷而想将投资组合的Beta值由1.2增加到1.5，公司应持什么样的头寸？

3.28 一个基金经理持有一价值为5 000万美元、Beta等于0.87的股票组合。该经理担心在今后两个月内市场的表现，因此打算采用3个月期的关于S&P 500的期货合约来对冲其风险。股指的当前水平为1 250，期货合约是关于250美元乘以股指，无风险利率为每年6%，股息收益率为每年3%，当前3个月期的期货价格为1 259。
(a) 基金经理应采用什么样的头寸来对冲今后两个月内的市场风险？
(b) 当股指在两个月后分别为1 000、1 100、1 200、1 300和1 400时，你的策略对于基金经理的收益影响会如何？假定一个月期的期货价格比现在的股指水平高0.25%。

3.29 假设今天是2010年10月。一家公司预计在2011年2月、2011年8月、2012年2月以及2012年8月都要买入100万磅铜。公司决定采用CME的期货合约来对冲风险。每个合约规模为25 000磅铜。对于每个合约，最初保证金为2 000美元，维持保证金为1 500美元。公司的政策是要对冲其80%的头寸暴露。期限在13个月内的合约都有很好的流动性，这些合约可以满足公司的需求。设计一个适当的对冲策略(不需做3.4节的尾随对冲调整)。

假定今天的市场价格(每磅的美分数量)和期货价格如表3-7所示。你所提出的策略对于公司买入铜的价格有什么影响？在2010年需要的初始保证金为多少？公司会收到保证金催付通知吗？

表 3-7

日　期	2010年10月	2011年2月	2011年8月	2012年2月	2012年8月
即期价格	372.00	369.00	365.00	377.00	388.00
2011年3月期货价格	372.30	369.10			
2011年9月期货价格	372.80	370.20	364.80		
2012年3月期货价格		370.70	364.30	376.70	
2012年9月期货价格			364.20	376.50	388.20

附录3A

资本资产定价模型

利用**资本资产定价模型**(capital asset pricing model, CAPM)，我们可以用一段时间内资产回报的风险来计算资产的回报期望值。资产回报的风险分成两个部分：系统风险与市场作为一个整体的回报有关，这一部分风险无法分散；非系统风险与资产的特点有关，这一部分风险可以通过选取一个由不同资产组成的交易组合来分散。CAPM 公式为[㊀]

$$预期资产回报 = R_F + \beta(R_M - R_F) \tag{3A-1}$$

其中 R_M 是由所有可投资资产组合产生的回报，R_F 是无风险投资回报，参数 β(希腊字母)是对系统风险的一种度量。

包含所有投资的回报 R_M 叫**市场回报**(return on the market)，通常以像 S&P 500 这样充分分散化的股指作为近视。Beta(β)是衡量资产回报对市场回报的敏感程度。Beta 利用历史数据来估计：将资产高于无风险利率的额外回报与市场交易组合高于无风险利率的额外回报进行线性回归时，β 是回归方程的斜率。当 $\beta=0$ 时，敏感度为零(即无敏感度)，这时资产无系统性风险，式(3A-1)显示资产的回报期望值等于无风险利率。当 $\beta=0.5$ 时，资产回报率超过无风险利率的那一部分(平均来讲)是市场回报率超出无风险利率的一半；当 $\beta=1$ 时，资产回报的期望值等于市场回报，等等。

假定无风险利率 R_F 为5%，市场回报率为13%，式(3A-1)显示，当 β 为0时，回报期望为5%；当 β 等于0.75时，回报期望为 $0.05+0.75\times(0.13-0.05)=0.11$，即11%。

CAPM 的推导是建立在以下假设之上的[㊁]：

- 投资者只关心资产投资组合回报的期望值与标准差。
- 任意两个资产的相关性只是来自于这些资产与市场组合的关联，该假设等价于资产回报只取决于一个因子。
- 投资者只关心在某一特定时间区间内的投资回报，而且不同投资者所选定的时间区间均相同。
- 投资者可以按相同的无风险利率借入或借出资金。
- 税务不影响投资决策。
- 所有投资者对所有投资资产回报的期望值、标准差以及对投资产品之间的相关系数都有相同的估计。

以上假设最多也只是在近似意义下成立，即使如此，CAPM 模型仍被证明是投资组合经理的一个有用的工具，该模型常常被用来作为检验投资组合经理表现的标准。

当资产是单个股票时，根据式(3A-1)得出的回报期望并非是真实回报的一个有效预测，但当资产是一个充分分散后的股票组合时，预测效果就要好很多。所以，如3.5节所述，以下关系式可以作为对冲分散化组合的基础：

$$分散化的组合回报 = R_F + \beta(R_M - R_F)$$

其中 β 是组合的总体 beta，该系数可以根据组合中的每只股票 beta 的加权平均来计算。

㊀ 如果市场回报率未知，R_M 由期望值来代替。

㊁ 关于推导细节，见约翰·赫尔《风险管理与金融机构》第2版，机械工业出版社，2010年。



第 4 章

利 率

利率是决定所有衍生产品价格的一个因素，在本书后面的内容中，利率将占据非常显著的位置。本章我们将讨论利率的度量与分析利率的基本方式。我们将解释定义利率所用的复利频率以及在衍生产品分析中有着广泛应用的连续复利利率的含义。本章包括零息利率、平价收益率、收益率曲线以及债券定价分析方面的内容，而且还描述了衍生产品交易员经常采用的计算零息国债利率的方法。本章还将讨论远期利率、远期利率协议以及利率期限结构的不同理论。最后，我们讨论如何利用久期与曲率来确定债券价格对利率的敏感度。

第 6 章我们将要讨论利率期货，并说明当对冲利率风险暴露时如何利用久期的测度。为了便于解释，我们在本章将忽略天数计量惯例。第 6 章、第 7 章将讨论这些惯例的实质以及它对于计算的影响。

4.1 利率的种类

利率定义了在一定情况下资金借入方承诺支付给资金借出方的资金数量。对于任意给定货币均有几种类型的利率，其中包括住房抵押贷款利率、存款利率、最优客户利率(prime borrowing rate)等。各种情形下所使用的利率均与信用风险有关。这一风险是因为资金借入方对偿还本金和利息违约而造成的风险。信用风险越大，资金借入方承诺的利率也越高。

4.1.1 国债利率

国债收益率是投资者投资国库券或国债时所挣得的收益率。国库券和国债是政府借入以自身货币为计量单位的资金而发行的金融产品。日元国债收益率是指日本政府借入日元资金的利率；美国国债收益率是指美国政府借入美元的利率，等等。通常我们认为一个政府不会对其自身发行的以自身货币为计量的债务违约。因此国债利率为无风险利率，即买入短期和中长期国债的投资者可以确信国债的本金和利息将会像政府所承诺的那样得到偿还。

4.1.2 LIBOR

LIBOR 是**伦敦同业银行拆出利率**(London Interbank Offered Rate)的缩写，它是一个参照利率，每天由英国银行家协会(BBA)提供。银行提供的 LIBOR 利率是指此银行给其他大银行提供企业资金时所收取的利率，也就是说这一银行同意用此利率将资金存入其他大银行。一些大银行或其他金融机构对许多主要货币都提供期限长达 12 个月的 LIBOR 利率报价。这里 1 个月期的 LIBOR 利率对应于银行提供 1 个月期资金的利率，3 个月期的 LIBOR 利率对应于银行提供 3 个月资金的利率，等等。

在某一家银行的存款可以看成是给这家银行的贷款，该银行必须达到一定的信用级别才能接受以 LIBOR 计息的存款，通常这一信用级别为 AA 级[⊖]。

⊖ 如第 23 章所示，标普和惠誉给出的最好信用级别为 AAA，其次为 AA，与之相对应的穆迪(Moody's)信用级别分别是 Aaa 及 Aa。

一个与 LIBOR 关系密切的利率是 LIBID，即**伦敦同业银行拆入利率**(London Interbank Bid Rate，LIBID)。银行同意其他银行以 LIBID 利率将资金存入自己的银行。在任意给定时刻，银行给出的关于 LIBID 与 LIBOR 的报价之间会有一个小的溢差(LIBOR 略高于 LIBID)。这些利率取决于银行的交易行为，并且不断变动以保证资金供需之间的平衡。例如，如果有更多的银行需要借入3个月期的美元，这时银行的美元 LIBOR 和 LIBID 报价将会上升。类似地，如果有更多的银行想借出资金而不是借入资金，3个月期的 LIBID 和 LIBOR 利率将会下降。LIBOR 和 LIBID 交易市场被称为**欧洲货币市场**(Eurocurrency market)。这一市场不受任何一国政府的控制。

4.1.3 再回购利率

有时交易活动的融资来自于**再回购合约**(repo 或 repo agreement)。在这一合约中，持有证券的投资者同意将证券出售给合约的另一方，并在将来以稍高价格将证券买回。合约中的另一方给该投资者提供了资金贷款。证券卖出与买回的差价即为贷款利息，相应的利率被称为**再回购利率**(repo rate)。如果将再回购合约精心地设计，交易中会包含很小的信用风险。如果借款人不遵守合约，那么资金的借出方可以保留证券。如果资金借出方不遵守合约，那么原证券的拥有人可以保留现金。

市场上最流行的再回购合约为**隔夜回购**(overnight repo)，这一回购合约每天都要重新设定。但是期限较长的合约，即所谓的**期限回购**(term repo)有时也会得以使用。

4.1.4 无风险利率

无风险利率被广泛用于衍生产品的定价。人们也许认为交易员会将由政府短期和长期债券所隐含的利率作为无风险利率，事实并非如此。如业界事例4-1所示，税务和监管规则等使得政府债券利率过低。

在传统上，金融机构将 LIBOR 利率作为无风险利率。对于一个 AA 级的金融机构而言，LIBOR 是短期资本融资的费用，金融机构能够以其他金融机构给出的 LIBOR 利率报价借入资金，同时以自身的 LIBOR 利率报价借出资金。LIBOR 利率并非完全没有信用风险。例如，当我们将资金按3个月的 LIBOR 利率借给一家 AA 级的金融机构时，仍然存在这家金融机构在3个月后违约的可能性。但是在正常市场条件下，该贷款几乎是无风险的。LIBOR 的期限可以长至1年，后面的内容将解释，交易员可以利用欧洲美元期货和利率互换将 LIBOR 利率延伸到1年以上。

2007年开始的信用危机促使许多衍生产品的交易员对以往做法进行认真思考，这是因为发生危机时银行不愿将资金借给其他人，因此 LIBOR 利率激增。许多市场参与者开始使用隔夜指数互换利率(overnight indexed swap，OIS)作为对无风险利率的近似，我们在7.8节将解释这一利率。和 LIBOR 相比，OIS 利率更接近于无风险利率。

业界事例4-1　什么是无风险利率

衍生产品交易员认为由国债隐含出的利率过低，这是因为：

- 金融机构为满足一定的监管要求，必须买入一些长期与短期国债，而这一需求会造成国债价格较高，从而收益率较低。
- 同持有其他类似的低风险投资相比，银行持有国债所需要的资本金要低得多。
- 在美国，对于国债产品的税务规定比其他定息投资更为有利，这是因为投资国债时无须缴纳州税。

传统上，衍生产品交易员假定 LIBOR 利率就是无风险利率，为了方便讨论，我们在本书也采用类似的假设，但 LIBOR 并非是完全无风险的。自2007年信用危机以来，许多交易员已经开始采用隔夜指数互换利率作为无风险利率，我们将在7.8节对这一利率进行讨论。

4.2 利率的计量

某银行注明年储蓄利率为 10%，这句话听起来虽然非常直接并且含义清楚，但事实上这句话的精确含义依赖于利率的计算方式。

如果利率计算方式是一年复利一次，银行借贷表中的 10% 利率是指 100 美元在年终会增长为

$$100 \times 1.1 = 110 \text{ 美元}$$

如果利率的计算方式为每半年复利一次，表示每 6 个月会赚取 5% 的利息，而且利息也用于再投资。这时 100 美元在一年后将会增长为

$$100 \times 1.05 \times 1.05 = 110.25 \text{ 美元}$$

当利率计算方式为每季度复利一次，银行借贷表说明每 3 个月会赚取 2.5% 的利息收入，而且所得利息均用于再投资。这样 100 美元在一年后将会增长为

$$100 \times 1.025^4 = 110.38 \text{ 美元}$$

表 4-1 显示了复利频率增加对投资回报的影响。

表 4-1　利率每年 10% 时复利频率增加对投资回报的影响

复利频率	100 美元的投资在一年后的价值(美元)	复利频率	100 美元的投资在一年后的价值(美元)
每年复利 1 次($m=1$)	110.00	每年复利 12 次($m=12$)	110.47
每年复利 2 次($m=2$)	110.25	每年复利 52 次($m=52$)	110.51
每年复利 4 次($m=4$)	110.38	每年复利 365 次($m=365$)	110.52

复利频率定义了利率的计量方式。一个一年复利一次的利率可以被转换成一个以不同频率复利的等价利率。例如，由表 4-1 我们可以看到一年复利一次利率 10.25% 与一年复利 2 次利率 10% 等价，利率在不同计息频率下的关系可类比为公里同英里之间的关系，不同的利息频率代表不同的利息计量方式。

为了推广以上结果，我们假设将数量为 A 的资金投资 n 年。如果利率是按年复利，那么投资的终值为

$$A(1+R)^n$$

如果利率是对应于一年复利 m 次，投资终值为

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn} \tag{4-1}$$

$m=1$ 时所对应的利率有时被称为**等值年利率**(equivalent annual interest rate)。

连续复利

复利频率 m 趋于无穷大时所对应的利率被称为**连续复利**(continuous compounding)利率[⊖]。在连续复利情况下，可以证明数量为 A 的资金投资 n 年时，投资的终值为

$$Ae^{Rn} \tag{4-2}$$

式中，$e=2.71828$，在大多数计算器中都有计算函数 e^x 的功能，所以计算式(4-2)不会产生任何问题。在表 4-1 的例子中，$A=100$，$n=1$，$R=0.1$，按连续复利时数量为 A 的资金在投资一年后将增长到

$$100e^{0.1} = 110.52 \text{ 美元}$$

⊖ 在精算领域，连续复利利率也被称为**利息力**(force of interest)。

这个精确到小数点后两位的数值与用每天复利所得的结果一样。在大多数实际情况下，我们认为连续复利与每天计算复利等价。对一笔资金以利率 R 连续复利 n 年相当于乘上 e^{Rn} 项。而对一笔在第 n 年后的资金以利率 R 按连续复利进行贴现，其效果相当于乘上 e^{-Rn}。

在本书中，除非指明，利率将按连续复利来计算。习惯于按年、半年、季度或其他复利频率的读者可能在开始时感到奇怪，但是在衍生产品定价中连续复利利率用得非常广泛，所以应当习惯使用按连续复利的利率。

假设 R_c 是连续复利利率，R_m 是与之等价的每年 m 次复利利率。由式(4-1)以及式(4-2)，我们得出

$$Ae^{R_c n} = A\left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^{mn}$$

或

$$e^{R_c} = \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^{m}$$

这就是说

$$R_c = m\ln\left(1 + \frac{R_m}{m}\right) \tag{4-3}$$

和

$$R_m = m(e^{R_c/m} - 1) \tag{4-4}$$

这些方程可将每年 m 次复利的利率转换为连续复利的利率，反之亦然。函数 $\ln x$ 是大多数计算器都有这项计算功能的自然对数。此函数是指数函数的**反函数**(inverse function)，其定义为：如果 $y = \ln x$，那么 $x = e^y$。

【例4-1】 利率报价为每年10%按半年复利。因此 $m=2$，$R_m=0.1$，由式(4-3)得出，与之等价的连续复利利率为

$$2\ln\left(1 + \frac{0.1}{2}\right) = 0.097\,58$$

即年率为9.758%。

【例4-2】 假设某贷款人对贷款利率报价为每年8%，连续复利，利息每季度支付一次，因此 $m=4$，$R_c=0.08$，由式(4-4)得出，与之等价的按季度复利的利率为

$$4 \times (e^{0.08/4} - 1) = 0.080\,8$$

即每年8.08%。这意味着，对于1 000美元的贷款，每季度支付利息为20.20美元。

4.3 零息利率

N 年的零息利率是指在今天投入资金在连续保持 N 年后所得的收益率。所有的利息以及本金都在 N 年末支付给投资者，在 N 年满期之前，投资不支付任何利息收益。N 年期的零息利率有时也称做 N 年期的**即息利率**(spot rate)，或者 N 年期**零息利率**(zero rate)，或者 N 年期的零率(zero)。假如一个5年期连续复利的零息利率是每年5%，这意味着今天的100美元投资在5年后会增长到

$$100 \times e^{0.05\times5} = 128.40$$

许多在市场上直接观察到的利率并不是纯零息利率。考虑一个券息为6%的5年期政府债券，这个债券本身的价格并不能决定5年期的零息利率，因为债券的一些券息并不发生在5年后的到期日。在本章后面的内容中，我们将讨论如何由支付券息的债券市场价格计算零息利率。

4.4 债券定价

大多数债券提供周期性的券息，债券发行人在债券满期时将债券的本金（有时也被称为票面值或面值）偿还给投资者。债券的理论价格等于对债券持有人在将来所收取的现金流贴现后的总和。有时债券交易者用同样的贴现率对债券的所有现金流进行贴现，但更精确的办法是对不同现金流采用不同的零息贴现率。

为了说明这一点，假设零息利率由表4-2给出（后面将说明如何计算这些值），其中的利率是连续复利。假设一个两年期债券的面值为100美元，券息为6%，每半年付息一次。为了计算第一个3美元券息的现值，我们用5%的6个月贴现率贴现；为了计算第二个3美元券息的现值，我们用5.8%的1年贴现率，依此类推。因此债券的理论价格为

$$3e^{-0.05\times0.5}+3e^{-0.058\times1.0}+3e^{-0.064\times1.5}+103e^{-0.068\times2.0}=98.39$$

即98.39美元。

表4-2　国债零息利率

期限（年）	零息利率（连续复利，%）	期限（年）	零息利率（连续复利，%）
0.5	5.0	1.5	6.4
1.0	5.8	2.0	6.8

4.4.1 债券收益率

债券收益率等于对所有现金流贴现并使债券的价格与市场价格相等的贴现率。假定我们上面考虑的债券理论价格也等于市场价格，即98.39美元（这里的债券的市场价格与表4-2中的数据完全一致）。如果y表示按连续复利的债券收益率，我们有

$$3e^{-y\times0.5}+3e^{-y\times1.0}+3e^{-y\times1.5}+103e^{-y\times2.0}=98.39\text{ 美元}$$

这一方程式的解可以通过迭代法（“试错法”）得出，其解为$y=6.76\%$[⊖]。

4.4.2 平价收益率

对应于具有一定期限的债券**平价收益率**（par yield）是使债券价格等于**面值**（par value）（这里的面值与本金相同）的券息率。债券通常每半年支付一次券息。假定债券每年支付的券息为c（或每6个月$c/2$）。采用表4-2中的零息利率，当以下方程成立时债券价格等于其面值，即100美元

$$\frac{c}{2}e^{-0.05\times0.5}+\frac{c}{2}e^{-0.058\times1.0}+\frac{c}{2}e^{-0.064\times1.5}+\left(100+\frac{c}{2}\right)e^{-0.068\times2.0}=100\text{ 美元}$$

该式的解可以直接得出，即$c=6.87\%$。两年的平价收益率为6.87%，按半年复利（或6.75%按连续复利）。

一般地讲，如果d为债券到期时收到1美元的贴现值，A为一个年金（annuity，即在每个券息日支付1美元）现金流的当前价值，m是每年券息支付的次数，那么平价收益率满足

$$100=A\frac{c}{m}+100d$$

因此

$$c=\frac{(100-100d)m}{A}$$

⊖　解类似的非线性方程$f(y)=0$的一种方法是利用Newton-Raphson方法。我们从方程解的一个估计开始，并利用公式$y_{i+1}=y_i-f(y_i)/f'(y_i)$逐步得到更好的估计$y_1,y_2,y_3,\cdots$，其中$f'(y)$为$f(y)$关于$y$的一阶导数。

在我们的例子中，$m=2$，$d=e^{-0.068\times 2}=0.87284$，以及

$$A=e^{-0.05\times 0.5}+e^{-0.058\times 1.0}+e^{-0.064\times 1.5}+e^{-0.068\times 2.0}=3.70027$$

该式证实了平价收益率为每年6.87%。

4.5 国库券零息利率的确定

一种计算表4-2所示的零息利率的方法是直接观测**票息剥离产品**(strips)所对应的利率，这些产品是由交易员在卖出与本金分离后的票息时人工生成的无息证券。

另一种确定零息收益率曲线的方法是从一般的国债和国库券价格入手来计算零息利率，最流行的方法就是所谓的**票息剥离法**(bootstrap method)。为了说明这种方法，考虑表4-3中关于5个债券价格的数据。因为前三个债券不支付券息，对应于这些到期日的零息利率很容易计算。第一个债券对97.5美元的投资在第三个月后的总收入为100美元，因此3个月的连续复利利率R满足

$$100=97.5e^{R\times 0.25}$$

即10.127%，同样6个月的连续复利利率R满足

$$100=94.9e^{R\times 0.5}$$

即10.469%，类似地，一年连续复利利率R满足

$$100=90e^{R\times 1.0}$$

即10.536%。

表4-3　票息剥离法采用的数据

债券本金（美元）	期限（年）	年票息（美元）[①]	债券价格（美元）
100	0.25	0	97.5
100	0.50	0	94.9
100	1.00	0	90.0
100	1.50	8	96.0
100	2.00	12	101.6

①票息每半年支付一次。

第四个债券的期限为1.5年，券息和本金支付如下：

6个月时：4美元

1年时：4美元

1.5年时：104美元

从前面的计算得出，对于在6个月末支付的利息应采用贴现率10.469%，对于在1年末支付的利息应采用贴现率10.536%。我们知道债券价格必须等于债券持有人所有收入的现值。假定在1.5年所对应的零息利率为R，那么

$$4e^{-0.10469\times 0.5}+4e^{-0.10536\times 1.0}+104e^{-R\times 1.5}=96$$

上式可被简化为

$$e^{-1.5R}=0.85196$$

即

$$R=-\frac{\ln(0.85196)}{1.5}=0.10681$$

因此，1.5年所对应的零息利率为10.681%。这是唯一与6个月期限、1年期限以及表4-3数据一致的零息利率。

2年期的零息利率也可以通过6个月、1年以及1.5年的零息利率以类似的方法求得。假定R为两年期的零息利率，有

$$6e^{-0.10469\times 0.5}+6e^{-0.10536\times 1.0}+6e^{-0.10681\times 1.5}+106e^{-R\times 2.0}=101.6$$

由此得出$R=0.10808$，即10.808%。

表4-4总结了计算结果。表示零息利率与期限关系的图形被称为**零息利率曲线**(zero curve)。关于零息利率曲线一个常用假设是：在由票息剥离法所得数值节点之间为线性(这意味着在我们的例子中1.25年的零息利率等于$0.5\times 10.536+0.5\times 10.381=10.608\%$)。通常还假定在零息曲线上第一个节点之前的利率和超出最后一个节点的利率为水平。图4-1是建立在这些假设前提下

的零息利率曲线。采用期限更长的债券，我们可以将零息利率曲线推广到两年以上。

表 4-4　由表 4-3 数据所得出的连续复利利率

期限（年）	零息利率（连续复利，%）
0.25	10.127
0.50	10.469
1.00	10.536
1.50	10.681
2.00	10.808

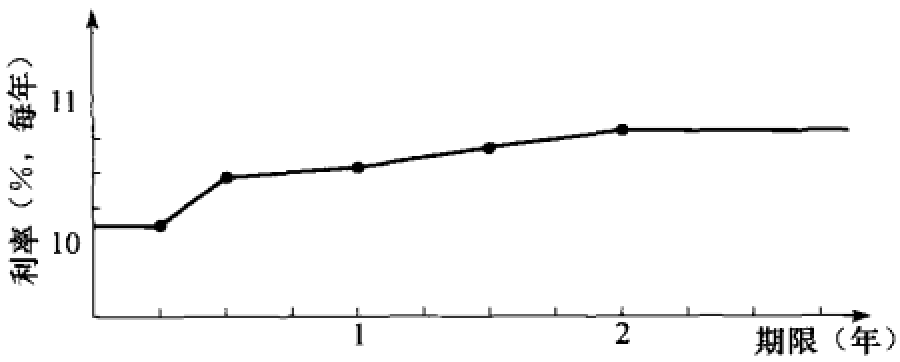


图 4-1　由票息剥离法得出的零息利率

在实践中，市场上通常没有期限等于 1.5 年、2 年以及 2.5 年的债券。分析员通常的做法是在计算零息利率曲线之前首先对债券曲线进行插值。例如，如果已知在 2.3 年到期券息为 6% 的债券的价格为 98 美元，以及在 2.7 年到期券息为 6.5% 的债券的价格为 99 美元，分析员可能会假定 2.5 年到期、息票率为 6.25% 的债券价格为 98.5 美元。

4.6　远期利率

远期利率（forward interest rate）是由当前零息利率所蕴含出的将来一定期限的利率。为了说明远期利率的计算方式，我们假设一组零息利率如表 4-5 的第 2 列所示（在第 7 章，零息 LIBOR 利率的计算与 4.5 节计算国债零息利率的方式类似）。假设这些利率为连续复利，因此，1 年期 3% 年利率意味着今天投资 100 美元，一年后投资者将收入 $100e^{0.03\times1}=103.05$ 美元；2 年期 4% 年利率意味着今天投资 100 美元，2 年后投资者收到 $100e^{0.04\times2}=108.33$ 美元，依此类推。

表 4-5 中第 2 年的远期利率为每年 5%。这是由第 1 年末与第 2 年末的零息利率而隐含出的从第 1 年末到第 2 年末之间的利率，即由 1 年期每年 3% 的利率与 2 年期每年 4% 的零息利率计算得出的。这个用于第 2 年（即从第 1 年末至第 2 年末）的利率与第 1 年的利率结合将会得出 2 年期的利率 4%。为了说明正确答案为每年 5%，假定你投资 100 美元。第 1 年利率是 3% 和第 2 年利率是 5% 将意味着在第 2 年末的收益为

$$100e^{0.03\times1}e^{0.05\times1}=108.33\text{ 美元}$$

将投资连续以 4% 利率投资两年得出的收益为

$$100e^{0.04\times2}$$

也为 108.33 美元。这一例子说明一个一般结论：当利率按连续复利表达时，将相互衔接的时间段上的利率结合在一起，整个时段的等价利率为各个时段利率的平均值。在我们的例子中，把第 1 年利率 3% 和第 2 年利率 5% 平均将会得到两年的利率为 4%。对于非连续复利的利率，这一结论只是近似成立。

表 4-5　计算远期利率

期限（年）	对应于 n 年投资零息利率（每年，%）	第 n 年的远期利率（每年，%）	期限（年）	对应于 n 年投资零息利率（每年，%）	第 n 年的远期利率（每年，%）
1	3.0		4	5.0	6.2
2	4.0	5.0	5	5.3	6.5
3	4.6	5.8			

第 3 年的远期利率是由 2 年的零息利率 4% 与 3 年的零息利率 4.6% 隐含得出，其结果为每年 5.8%。这是因为以 4% 利率投资 2 年以后再以 5.8% 利率投资 1 年将得出 3 年期平均年利率为每年 4.6%。其他远期利率也可以用类似的方法计算，结果如表 4-5 第 3 列所示。一般来说，如果

R_1 和 R_2 分别对应期限为 T_1 和 T_2 的零息利率，R_F 为 T_1 与 T_2 之间的远期利率，那么

$$R_F = \frac{R_2T_2 - R_1T_1}{T_2 - T_1} \tag{4-5}$$

为了说明式(4-5)，考虑表4-5中第4年的远期利率：$T_1 = 3$，$T_2 = 4$，$R_1 = 0.046$，$R_2 = 0.05$，由公式给出 $R_F = 0.062$。

式(4-5)可以写成

$$R_F = R_2 + (R_2 - R_1)\frac{T_1}{T_2 - T_1} \tag{4-6}$$

式(4-6)说明如果零息利率曲线在 T_1 与 T_2 之间向上倾斜，即 $R_2 > R_1$，那么 $R_F > R_2$(即远期利率比两个零息利率都大)。类似地，如果零息曲线为向下倾斜，即 $R_2 < R_1$，那么 $R_F < R_2$(即在远期利率比两个零息利率都小)。在式(4-6)中令 T_2 接近于 T_1，并将共同值记为 T，我们得到

$$R_F = R + T\frac{\partial R}{\partial T}$$

式中，R 为期限为 T 的零息利率。以这种方式得到的 R_F 叫做期限为 T 的**瞬时远期利率**(instantaneous forward rate)。这是用于在 T 开始的一段很短时间内的远期利率。这一利率适用于由时间 T 开始的一个小的时间段。定义 $P(0, T)$ 为在时间 T 到期的零息债券的价格，因为 $P(0, T) = e^{-RT}$，瞬时远期利率的方程也可以写成

$$R_F = -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(0,T)$$

假定大型金融机构借入与借出资金的利率均为LIBOR，这时可以锁定LIBOR远期利率。例如，假设零息利率如表4-5所示，如果投资者以3%利率借入100美元，期限为1年，然后以4%的利率投资两年。结果现金流是在第1年末流出 $100e^{0.03\times1} = 103.05$ 美元，在第2年末流入为 $100e^{0.04\times2} = 108.33$ 美元。因为 $108.33 = 103.05e^{0.05}$，因此在第2年的收益等于远期利率5%。接下来假定一投资者以5%的利率借入100美元，期限为4年，并同时以4.6%利率投资3年。结果现金流是在第3年末流入 $100e^{0.046\times3} = 114.80$ 美元，在第4年末流出 $100e^{0.05\times4} = 122.14$ 美元。因为 $122.14 = 114.80e^{0.062}$，资金在第4年的借入利率为远期利率6.2%。

如果投资者认为将来的利率与今天的远期利率有所不同，那么该投资者就会发现市场上有许多交易策略非常具有吸引力(见业界事例4-2)。其中一种做法是利用远期利率合约(forward rate agreement)，我们在下面将讨论这种合约的运作机制和定价方式。

业界事例4-2 奥兰治县对收益曲线的赌博

考虑一大型投资者可以按表4-5所示的利率借出或借入资金，并且在今后5年内1年期的利率不会有大的变化。这个投资者可以借入1年期的资金并且将资金投资5年。1年期借款可以在1年末、2年末、3年末和4年末向前滚动一年。如果利率确实保持不变，这种投资策略会大约每年盈利2.3%，这是因为收入利率为5.3%而支出利率为3%。这种投资方式叫做骑乘收益曲线(yield curve play)。投资者认为将来的利率会不同于由今天市场所观察到的远期利率，并在此假设下进行投机(在我们的例子中，由市场今天观察到的1年的远期利率分别为5%、5.8%、6.2%和6.5%)。

美国奥兰治县(Orange County)资金主管罗伯特·西特伦(Robert Citron)在1992年和1993年非常成功地采用了以上投资方式。西特伦所做交易的盈利为奥兰治县的预算做出了巨大贡献，而他本人也因此得以连任(在选举中有人指出这一投资方式风险太大，但没有人听取这一反对意见)。

1994 年西特伦进一步扩大了这种方式的投资，他在投资中选用了大量**反向浮息债券**(inverse floaters)，这种债券的券息为某一固定利率同某一浮动利率之间的利差。他以借入短期资金的方式进一步加大了投资的杠杆效应。假如短期利率保持不变或下降的话，他的投资依然保持很好。但在 1994 年利率急剧上扬，在 1994 年 12 月 1 日奥兰治县宣布其投资组合损失了 15 亿美元。在几天之后，奥兰治县宣布寻求破产保护。

4.7 远期利率合约

远期利率合约(FRA)是一种场外交易，这种交易约定在将来某一段时间交易的一方将以某一利率借入或借出固定数量的资金。在 FRA 合约中，借入和借出资金的利率常常设为 LIBOR。

考虑以下远期利率合约，其中公司 X 同意在 T_1 和 T_2 之间将资金借给公司 Y。定义：

R_K ——FRA 中的约定利率；

R_F ——由今天计算的介于时间 T_1 和 T_2 之间的 LIBOR 利率[⊖]；

R_M ——在时间 T_1 观察到的 T_1 和 T_2 之间的真正 LIBOR 利率；

L ——合约的本金。

与以往不同，在这里我们不采用连续复利的假设。我们假设 R_K、R_F 和 R_M 的复合频率均与这些利率适用的区间保持一致。这意味着，如果 $T_2-T_1=0.5$，那么这些利率为每半年复利一次；如果 $T_2-T_1=0.25$，那么这些利率为每季度复利一次，等等。(这个假设与市场上关于 FRA 的实践相一致。)

一般来讲，公司 X 由 LIBOR 贷款的收益为 R_M，但 FRA 会使其收益为 R_K。进入 FRA 会使公司 X 得到额外利率(也可能为负)为 R_K-R_M。利率是在 T_1 设定并在 T_2 付出。对于 X 而言，额外利率会导致在 T_2 时刻有以下数量的现金流

$$L(R_K-R_M)(T_2-T_1) \tag{4-7}$$

与此类似，对于 Y 而言，在 T_2 时刻的现金流为

$$L(R_M-R_K)(T_2-T_1) \tag{4-8}$$

由式(4-7)和式(4-8)，我们可以得出对于 FRA 的另外一种解释。在 FRA 中，X 同意在 T_1 与 T_2 之间收入固定利率 R_K，并同时付出市场实现的 LIBOR 利率 R_M，公司 Y 对本金在 T_1 与 T_2 之间付出固定利率 R_K，并同时收入 LIBOR 利率 R_M。

通常，FRA 是在 T_1 时刻而不是在 T_2 时刻进行交割，因此必须将收益从 T_2 贴现到 T_1。对于公司 X，在 T_1 时刻的收益为

$$\frac{L(R_K-R_M)(T_2-T_1)}{1+R_M(T_2-T_1)}$$

而对于公司 Y，在 T_1 时刻的收益为

$$\frac{L(R_M-R_K)(T_2-T_1)}{1+R_M(T_2-T_1)}$$

【例 4-3】 假定一家公司进入一个 FRA 合约，在合约中这家公司将在 3 年后收入 3 个月期限 4% 的固定利率的现金流。在 FRA 中，公司要支付 LIBOR，同时收入 4% 的固定利率，期限为 3 个月。FRA 的本金为 1 亿美元。如果在 3 年后，3 个月期限 LIBOR 为 4.5%，那么对于资金借出方而言(即这家公司)，在 3.25 年时现金流为

⊖ LIBOR 远期利率可以由 4.6 节描述的方式由 LIBOR/互换零息曲线计算得出，我们将在 7.6 节描述 LIBOR/互换曲线。

$$100\,000\,000\times(0.040-0.045)\times0.25=-125\,000$$

这一现金流与以下3年时的现金流等价

$$-\frac{125\,000}{1+0.045\times0.25}=-123\,609$$

因此，对于交易对手而言，在3.25年时现金流为+125 000美元，或在3年时现金流为+123 609美元(在这一例子中所有利率均为按季度复利)。

定价

为了对FRA定价，我们首先注意当$R_K=R_F$时，FRA的价格永远是0[㊀]。这是因为一个大型金融机构可以在没有任何费用前提下以远期利率来锁定将来利率。例如，金融机构可以借入2年期的资金而投资3年来保证第2年到第3年的投资收益率，该收益率即为远期利率。类似地，金融机构也可以借入3年期利率并投资2年来保证第2年到第3年的借入资金的利率为远期利率。

比较两个FRA。第一个FRA承诺在T_1和T_2之间收益率为LIBOR，远期利率R_F，本金为L；第二个FRA承诺在同样两个期限之间的收益率为R_K，本金也是L。以上两个FRA的唯一不同之处在于T_2时的付款数量。第二个FRA与第一个FRA价格之间的差是这两项利息值之间的差，即

$$L(R_K-R_F)(T_2-T_1)e^{-R_2T_2}$$

式中，R_2为T_2期限的无风险利率[㊁]。因为收入R_F的FRA在0点价值为0，因此，收入R_K的FRA的价值为

$$V_{\text{FRA}}=L(R_K-R_F)(T_2-T_1)e^{-R_2T_2}\tag{4-9}$$

与此类似，付出R_K的FRA的价值为

$$V_{\text{FRA}}=L(R_F-R_K)(T_2-T_1)e^{-R_2T_2}\tag{4-10}$$

将式(4-7)与式(4-9)，或将式(4-8)与式(4-10)进行比较，我们看到可以采取以下过程为FRA定价

- 假定在远期利率会被实现的前提下(即$R_M=R_K$)计算收益。
- 将收益用无风险利率进行贴现。

在第7章对互换(FRA组合)定价时，会用到这个结果。

【例4-4】 假定LIBOR零息利率和远期利率如表4-5所示。考虑一个FRA。在该FRA中，某公司将收入6%固定利率(按年复利)，支付LIBOR，本金为1亿美元，FRA开始日期为第1年底，结束日期为第2年底。这时，介于第1年底与第2年底的连续复利远期利率5%或5.127%按年复利。由式(4-9)，我们得出FRA的价值为

$$100\,000\,000\times(0.06-0.051\,27)e^{-0.04\times2}=805\,800\text{ 美元}$$

4.8 久期

顾名思义，债券的**久期**(duration)是指投资者收到所有现金流所要等待的平均时间。一个n年期零息国债的久期为n年，而一个n年带息(coupon-bearing)国债的久期小于n年，因为持有人在n年之前就已经收到一些现金付款。

假定一个债券在t_i时刻给债券持有人提供的资金流为c_i，$1\leqslant i\leqslant n$。债券价格B与连续复利收益率y的关系式为

㊀ 通常情形，FRA在起始时，$R_K=R_F$。

㊁ 注意R_K、R_M及R_F的复利频率与T_2-T_1的长度一致，而R_2为连续复利。

$$B = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-yt_i} \tag{4-11}$$

债券久期 D 被定义成

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-yt_i}}{B} \tag{4-12}$$

也可以写成

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \left[\frac{c_i e^{-yt_i}}{B} \right]$$

式中，方括号中的项为 t_i 时刻债券支付的现金流现值与债券价格的比率，债券价格等于所有将来支付的现值总和，因此久期是付款时间 t_i 的加权平均，而对应于 t_i 时刻的权重等于 t_i 时刻的支付现值与债券总贴现值的比率，这里的所有权重相加等于 1。注意为了定义久期，所有的贴现均采用债券收益率 y（我们不采用 4.4 节描述的对于不同现金流，采用不同零息利率的方式）。

当考虑收益率有微小变化时，以下公式近似成立

$$\Delta B = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}y} \Delta y \tag{4-13}$$

根据式(4-11)，上式可以写成

$$\Delta B = -\Delta y \sum_{i=1}^{n} c_i t_i e^{-yt_i} \tag{4-14}$$

（注意 B 与 y 之间呈反向关系：当收益率增加时，债券价格降低；而当收益率减小时，债券价格增加）。由式(4-12)和式(4-14)，我们可以得出下面关于久期的重要公式

$$\Delta B = -BD\Delta y \tag{4-15}$$

或写成

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y \tag{4-16}$$

式(4-16)是关于债券价格同收益率的一个近似关系式，这一公式非常易于使用，这也是为什么当麦考利在 1938 年最初提出久期概念以后被广泛采用的原因。

考虑某个面值为 100 美元、券息利率为 10% 的 3 年期债券。该债券按连续复利的年收益率为 12%，即 $y=0.12$。债券每 6 个月付息一次，息值为 5 美元。表 4-6 显示有关债券久期的计算步骤，在计算中将收益率作为贴现率，计算出的现值被列在表中的第 3 列（例如第一次付息的现值为 $5e^{-0.12\times0.5}=4.709$），第 3 列数字之和等于债券价格 94.213。将第 3 列中数字除以 94.213 即可得到久期的权重，第 5 列数字之和等于久期，即 2.653 年。

表 4-6　久期的计算

时期（年）	现金流（美元）	现值（美元）	权重	年份×权重
0.5	5	4.709	0.050	0.025
1.0	5	4.435	0.047	0.047
1.5	5	4.176	0.044	0.066
2.0	5	3.933	0.042	0.083
2.5	5	3.704	0.039	0.098
3.0	105	73.256	0.778	2.333
合计	130	94.213	1.000	2.653

利率的微小变化通常是用**基点**（basis point）来测量，一个基点对应于 0.01%。例 4-5 验证了久期关系式(4-15)的准确性。

【例 4-5】　由表 4-6 所描述的债券价格为 94.213 美元，久期为 2.653，根据式(4-15)

$$\Delta B = -94.213 \times 2.653 \times \Delta y$$

即

$$\Delta B = -249.95 \times \Delta y$$

当收益率增加了 10 个基点(=0.1%)，即 $\Delta y = +0.001$ 后，久期公式给出了 ΔB 的近似结果为

$$\Delta B = -249.95 \times 0.001 = -0.250$$

久期公式预计债券价格会下降到 94.213 - 0.25 = 93.963，为了检验这个预测的准确性，我们计算当收益率增加 10 个基点到 12.1% 时的债券价格

$$5e^{-0.121\times0.5} + 5e^{-0.121\times1.0} + 5e^{-0.121\times1.5} + 5e^{-0.121\times2.0} + 5e^{-0.121\times2.5} + 105e^{-0.121\times3.0} = 93.963$$

这一数值同我们用久期公式预计的变化相同(精确到小数点第 3 位)。

4.8.1 修正久期

以上分析是建立在收益率 y 为连续复利的前提下的。如果 y 为一年复利一次的利率，可以证明这时的相应近似式(4-15)为

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y}$$

在 y 为一年 m 次复利的一般情形下

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y/m}$$

定义变量 D^* 为

$$D^* = \frac{D}{1+y/m}$$

这一变量被称为债券的**修正久期**(modified duration)，此变量可使久期关系式简化为

$$\Delta B = -BD^*\Delta y \tag{4-17}$$

式中，y 为每年复利 m 次的利率，例 4-6 验证了修正久期的准确性。

【例 4-6】 由表 4-6 描述的债券价格为 94.213 美元，久期为 2.653。每年复利两次的收益率为 12.3673%，修正久期为

$$D^* = \frac{2.653}{1+0.123\,673/2} = 2.498\,5$$

由式(4-17)，我们得出

$$\Delta B = -94.213 \times 2.498\,5 \times \Delta y$$

或

$$\Delta B = -235.39 \times \Delta y$$

当收益率(一年复利 2 次)增加 10 个基点(0.1%)，即 $\Delta y = +0.001$ 时，久期关系式预计债券价格变化 ΔB 为 $-235.39 \times 0.001 = -0.235$，因此债券价格下降到 94.213 - 0.235 = 93.978 美元。当收益率增加 10 个基点，即对应的收益率 y = 12.467 3% 时(或 12.094 1% 以连续复利计量)的债券价格，通过与前面例子几乎相同的计算，我们可以得出债券的价格为 93.978 美元，这一例子说明：当债券收益率变化较小时，修正久期计算公式非常精确。

另一个常用名词为**绝对额久期**(dollar duration)，这一变量为修正久期与债券价格的乘积，因此 $\Delta B = -D^{**}\Delta y$，式中 D^{**} 为绝对额久期。

4.8.2 债券组合

债券组合的久期 D 可以被定义为构成债券的组合中每一个债券的久期的加权平均，其权重与相应债券价格成正比。式(4-15)~式(4-17)在这里适用，其中 B 为债券组合的价值。这些公式可

以用来估计债券收益的一个微小变化对证券组合价值的影响。

当把久期的概念用于债券组合时，我们隐含地假设债券所有的收益率的变化相同，认识到这一点很重要。我们因此将式(4-15)~式(4-17)解释为收益率曲线的一个平行移动 Δy 对于债券组合价值的影响。

金融机构常常通过确保其资产平均久期等于其负债平均久期来对冲其面临的利率风险(即净久期为0)，但资产组合对于利率较大的平行移动和非平行移动仍有风险暴露。

4.9 曲率

久期仅适用于当收益率变化很小的情形。图4-2显示了两个具有相同久期的交易组合价值与收益率之间的不同变化。这两个投资组合在原点的导数(切线)相同，这意味着，当收益率的变化较小时，两个交易组合价值变化的百分比相同，这与式(4-16)一致。但当利率变化较大时，两个组合价值变化有所不同。组合 X 的曲率要比组合 Y 大。**曲率**(convexity)作为一种变量用于衡量曲线的**凸凹**(curvature)程度，而且可用于改善式(4-16)的准确性。

一种测量曲率的方法是

$$C=\frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}c_it_i^2e^{-yt_i}}{B}$$

利用泰勒阶数展开，我们可以得到一个比式(4-13)更精确的表达式

$$\Delta B=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}y}\Delta y+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}y^2}\Delta y^2$$

由此可以得出

$$\frac{\Delta B}{B}=-D\Delta y+\frac{1}{2}C(\Delta y)^2$$

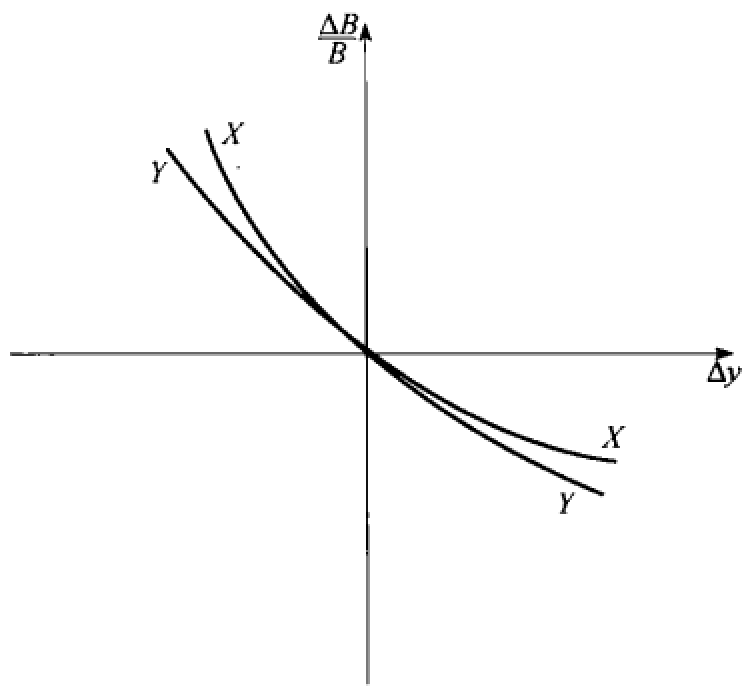


图4-2 两个具备同样久期的交易组合

对于给定的久期，当债券组合提供的收入均匀地分布在很长时间区间上时，组合的曲率一般是最大的，而当收支都集中在某一个时间附近时，曲率会较小。确保资产和负债组合的净久期和净曲率为零，公司可以使组合价值对零息利率曲线相对较大的平行移动所引起的风险免疫，然而组合仍具有零息曲线非平行移动的风险。

4.10 利率期限结构理论

我们很自然会问是什么因素决定了零息利率曲线的形状。为什么有时曲线向下倾斜，有时向上倾斜，而有时会部分向下倾斜以及部分向上倾斜。关于这一点有几种理论。其中最简单是**预期理论**(expectations theory)，这一理论假设长期利率应该反映所期望的将来短期利率。更精确地讲，这一理论认为对应于将来某一时间的远期利率等于这一时段未来的即期利率的期望值。另外一种理论是**市场分割理论**(market segmentation theory)。这一理论认为短期、中期以及长期理论之间没有任何关系。在这一理论中，类似于投资大型退休金等投资者投资于不同期限的债券，并不会转换期限。短期利率由短期债券市场的供需关系决定，中期利率由中期市场的供需关系决定，依此类推。

最有说服力的是**流动性偏好理论**(liquidity preference theory)。这一理论的基本假设是投资者喜欢保持资金的流动性，并因此将资金投资于较短的期限。另一方面，借贷人一般喜欢借较长期限的固定利率。流动性偏好理论使得远期利率出现高于将来零息利率期望值的情形。这与所观察

到的收益率曲线常常是向上倾斜而不是向下倾斜的实证结果一致。

4.10.1 净利息收入管理

为了理解利率期限结构理论，我们可以考虑银行接受存款和发行贷款时所面临的利率风险。**净利息收入**(net interest income)是指利息收入与利息支出的差，银行必须妥善管理净利息收入。

为了展示利息收入的不同变化，我们假定某银行给客户提供1年以及5年的存款利率，同时又给客户提供1年以及5年的住房贷款利率，这些利率由表4-7所示。为了简化分析，我们假设市场投资者认为将来的1年期利率与今天市场上的1年期利率相同。简单地讲，市场认为利率增加与利率减少具有相同的可能性，由此我们可以说由表4-7显示的利率是“公平”的，它们正确反映了市场的期望。将资金投放1年然后再滚动投资4年会同一个5年的投资带来相同的回报。类似地，以1年期借入资金然后再滚动4年借入资金会同一个5年的贷款带来一样的融资费用。

表4-7 银行给客户提供各种利率

期限（年）	存款利率（连续复利,%）	住房贷款(按揭)利率(%)
1	3	6
5	3	6

假定你将资金存入银行，并且你认为利率增加与利率减少具有相同的可能性，你此时会将资金以3%的利率存入1年还是会以3%的利率存入5年？你此时往往会将资金存入1年，因为将资金锁定在一个较短期限会给你带来许多方便。

下一步假定你需要一笔住房贷款，你仍然认为利率上升与下降的可能性均等，你此时是会选一个1年期6%的住房贷款还是会选一个5年期6%的住房贷款？这时你往往会选择一个5年期的住房贷款。因为这样做会给你带来较少的融资风险。

根据银行提供的由表4-7所示利率，大多数存款客户会选择1年期存款，同时大多数住房贷款客户会选择5年期贷款。这样一来，银行的资产和负债就会产生不匹配，从而对净利息收入产生风险冲击。利息降低时不会产生问题，银行的贷款收入仍为6%，而支撑贷款的存款利息低于3%。因此利息收入会增加。但当利率增加时，银行贷款收入仍为6%，存款费用高于3%，由此触发银行净利息收入降低，当1年利率增长达3%时，利息收入会变为零。

资产负债管理部门的职责就是将带来收入的资产与带来利息费用的负债进行匹配。一种达到这种匹配目的的手段是提高5年的存款以及住房贷款利率。例如，我们可以将利率调节为表4-8的形式，这时1年期的存款利率为4%，5年期的贷款利率为7%。这样做会将5年期存款以及1年期住房贷款变得相对更有吸引力，一些选择表4-7中的1年期存款人会将自己的资金转入表4-8中所示5年期存款；一些选择表4-7中的5年期住房贷款人的顾客会选择1年住房贷款。这样所带来的效果会使得资产和负债得以匹配。如果顾客仍然过多地选择1年期存款和5年期住房贷款而造成资产负债的不平衡，我们可以进一步提高5年期存款和贷款利率，这样会逐渐消除资产负债的失衡。

表4-8 提高5年期利率以达到资产负债的匹配

期限（年）	存款利率（连续复利,%）	住房贷款(按揭)利率(%)
1	3	6
5	4	7

如果所有的银行均按以上所描述的方式进行资产负债管理，其效果是长期利率要比预期的将来短期利率要高，这一现象就是所谓的流动性偏好理论。大多时候收益率曲线都是向上倾斜，只有当市场预期短期利率会剧烈下跌时才会出现向下倾斜的现象。

许多银行已经建立了完善的系统来检测客户业务决策行为，当看到资产与负债有不匹配现象时，他们可以对利率进行细微调整，有时利率互换(将在第7章讨论)等衍生产品也会被用来管理利率风险暴露，这样做银行会保证利息收入的稳定并达到减少风险的目的，当然就像业界事例4-3所示的那样，并不是所有的银行都能做到这一点。在美国，20世纪80年代信贷公司和1984年大

陆伊利诺伊公司破产的原因在很大程度上都是由于资产和负债的不匹配引起的，以上两个破产案都为美国纳税人带来了巨大损失。

业界事例 4-3　流动性和 2007—2009 年金融危机

在 2007 年 7 月开始的信用危机中，有一种“择优而栖”现象，这是指金融机构和投资者不愿承担信用风险，只进行安全投资。依赖于短期融资的金融机构遭遇流动性困难。英国的北岩（Northern Rock）银行就是一个实例。北岩按揭贷款资金依赖于批发存款，这些存款的期限只有 3 个月。2007 年 9 月，忧心忡忡的贷款人不再愿意将贷款续借给北岩，即在 3 个月时不愿将资金续存在北岩。这造成了北岩对自身资产失去了资金支持，英国政府在 2008 年初接管北岩。在美国，像贝尔斯登和雷曼兄弟这样的银行也遭遇了类似的流动性困难，这些金融机构同样利用短期批发存款作为融资来源支撑运作。

4.10.2 流动性

除了以上描述的问题以外，交易组合期限的不匹配还会造成流动性困难。考虑一家金融机构，其 5 年期的固定利率贷款由 3 个月的批发存款支撑。金融机构认识到自身对利率上升的风险暴露，因此对利率风险进行了对冲（一种做法是利用前面提到过的利率互换）。这样做以后，金融机构仍然会有流动性风险。批发存款的贷款人有可能对金融机构失去信心，因此不愿意再将资金借给金融机构，即使金融机构此时还有足够多的股权资本，仍会深陷流动性的泥潭，遭遇破产。如业界事例 4-3 所示，此类流动性问题是 2007 年开始的金融危机中一些金融机构破产的主要原因。

小　结

对于衍生产品交易员来讲，国债利率和 LIBOR 利率是两个非常重要的利率。国债利率是当政府借入自身货币的资金而支付的利率；LIBOR 利率是银行在行业之间为借入短期资产而支付的利率。衍生产品交易员通常用 LIBOR 利率作为资金被借入和借出的短期无风险利率。

利率的复利频率定义了度量利率的单位。一年复利一次的利率与一年复利 4 次的利率差别可以类比为英里和公里的差别。在分析衍生产品时，分析员常常采用连续复利形式。

在金融市场中有许多类型的利率用于报价，而且分析员也常常计算这些利率。n 年零息（或 n 年现期市场）利率对应于一个 n 年期并且所有投资收益均发生在到期时的一种投资的收益率，债券的平价收益率是使得其价格等于面值的票息率。远期利率是从今天零息收益曲线所导出的并且可以应用于将来某一段时间的利率。

一种计算零息曲线的最常用方法是所谓的票息剥离法，这种方法由短期产品出发，循序逐渐进入长期产品来计算利率，在计算过程中要保证在每一阶段计算的零息利率使得输入的产品价格与计算出的产品价格一致。这种方法常常被交易平台采用来计算国债零息利率曲线。

远期利率合约（FRA）是一种场外交易，在此交易中，在将来某一时段，一方将以某一利率借入或借出一定数量的资金。通过假定远期利率等于在将来实现的利率，然后对相应的收益进行贴现，我们可以对 FRA 进行定价。

在利率市场中，久期是一个重要概念。久期衡量了交易组合价格对零息收益率曲线微量平行变化的敏感度。准确地讲

$$\Delta B = -BD\Delta y$$

式中 B 为交易组合价值，D 为组合价值的久期，Δy 为零息曲线平行移动的微小变量，ΔB 是由 Δy 产生组合价值变化。

PDG

流动性偏好理论可以用于解释实际生活中的利率期限结构，这一理论指出：大多数个人以及公司喜欢借长放短。为了保证便利借入资金与借出资金期限的匹配，金融机构有必要提高长期利率以使得远期利率高于未来即期利率的期望值。

推荐阅读

Allen, S. L., and A. D. Kleinstein. *Valuing Fixed-Income Investments and Derivative Securities: Cash Flow Analysis and Calculations*. New York: New York Institute of Finance, 1991.

Fabozzi, F. J. *Fixed-Income Mathematics: Analytical and Statistical Techniques*, 4th edn. New York: McGraw-Hill, 2006.

Fabozzi, F. J. *Duration, Convexity, and Other Bond Risk Measures*. Frank J. Fabozzi Assoc., 1999.

Grinblatt, M., and F. A. Longstaff. "Financial Innovation and the Role of Derivatives Securities: An Empirical Analysis of the Treasury Strips Program," *Journal of Finance*, 55, 3 (2000): 1415–36.

Jorion, P. *Big Bets Gone Bad: Derivatives and Bankruptcy in Orange County*. New York: Academic Press, 1995.

Stigum, M., and F. L. Robinson. *Money Markets and Bond Calculations*. Chicago: Irwin, 1996.

练习题

4.1 一个银行的利率报价为每年14%，每季度复利一次。在以下不同的复利机制下对应的利率是多少？(a)连续复利，(b)一年复利一次。

4.2 LIBOR与LIBID的含义是什么？哪一个更高？

4.3 6个月期与1年期的零息利率均为10%。一个剩余期限还有18个月，券息利率为8%（刚刚付过半年一次的利息）的债券，收益率为10.4%的债券价格为多少？18个月期的零息利率为多少？这里的所有利率均为每半年复利一次利率。

4.4 一个投资者在年初投入1 000美元，年末收入1 100美元。计算投资在不同复利机制下的收益率：(a)一年复利一次，(b)一年复利2次，(c)每月复利一次，(d)连续复利。

4.5 假设连续复利的零息利率如表4-9所示。

表 4-9

期限(以月计)	利率(每年的利率,%)
3	8.0
6	8.2
9	8.4
12	8.5
15	8.6
18	8.7

计算第2季度、第3季度、第4季度、第5季度和第6季度的远期利率。

4.6 假定零息利率如练习题4.5所示，一个收入3个月期固定利率9.5%的FRA价值为多少？这里FRA的面值为1 000 000美元，起始日期为1年以后，利率复利为每季度一次。

4.7 利率期限结构向上倾斜，将以下变量按大小排列。

(a) 5年期零息利率；

(b) 5年期带息债券（coupon bearing bond）的收益率；

(c) 将来从第5年到5年零3个月期间远期利率。

当利率期限结构向下倾斜时，结果会如何变化？

4.8 从久期你能知道债券组合对于利率有什么样的敏感度？久期有什么局限性？

4.9 与每年15%，按月复利等价的连续复利的年利率是多少？

4.10 一个存款账户以每年12%的连续复利利率来计算利息，但利息每个季度付出一次，10 000美元存款对应于每季度的利息为多少？

4.11 假定6个月期、12个月期、18个月期、24个月期和30个月期的零息利率分别为每年4%、4.2%、4.4%、4.6%和4.8%，利率以连续复利为计。估计一个面值为100美元的债券的价格，假定此债券在第

30 个月后到期，债券息票利率为每年 4%，每半年付息一次。

4.12 一个 3 年期债券的券息率为 8%，每半年付息一次，债券的现金价格为 104，债券的收益率为多少？

4.13 假定 6 个月期、12 个月期、18 个月期和 24 个月期的零息利率分别为每年 5%、6%、6.5% 和 7%。两年的债券平价收益率为多少？

4.14 假设连续复利的零息利率如表 4-10 所示。

表 4-10

期限(以年计)	利率(每年的利率,%)
1	2.0
2	3.0
3	3.7
4	4.2
5	4.5

计算第二年、第三年、第四年和第五年的远期利率。

4.15 利用练习题 4.14 中的利率对以下 FRA 定价。在 FRA 中你在第三年内支付 5% 利率(按年复利)，面值为 100 万美元。

4.16 10 年期券息为 8% 的债券价格为 90 美元，10 年期券息为 4% 的债券的价格为 80 美元，10 年期的零息利率为多少(提示：考虑两个券息为 4% 的债券的长头寸和一个券息为 8% 的债券的短头寸)。

4.17 仔细解释为什么流动性偏好理论与市场上所观察到的利率期限结构向上倾斜多于向下倾斜这种现象一致。

4.18 “当零息利率曲线向上倾斜时，对应于某一期限的零息利率比相应期限的平价收益率要高。当零息利率向下倾斜时，对应于某一期限的零息利率要比相应同一期限的平价收益率低。”请对此做出解释。

4.19 为什么美国国债收益率远低于几乎无风险投资收益率？

4.20 为什么再回购市场的贷款的信用风险很低？

4.21 解释为什么一个 FRA 等价于以浮动利率交换固定利率？

4.22 一个年收益率为 11%(连续复利)的 5 年期债券在每年年底支付 8% 的票息，(a)此债券价格为多少？(b)债券久期为多少？(c)运用久期公式来说明幅度为 0.2% 的收益率下降对债券价格的影响。(d)重新计算年收益率为 10.8% 时债券的价格，并验证计算结果同(c)的一致性。

4.23 6 个月期和 1 年期国库券(零息)的价格分别为 94.0 美元以及 89.0 美元。1.5 年期的债券每半年付券息 4 美元，价格为 94.89 美元。2 年期的债券每半年付券息 5 美元，价格为 97.12 美元。计算 6 个月期、1 年期、1.5 年期以及 2 年期的零息利率。

4.24 “一个利率互换，其浮动利率为 6 个月期 LIBOR、固定利率为 5%、面值为 1 亿美元，这样的互换是 FRA 的一个组合。”解释这一说法。

作业题

4.25 一个 5 年期的债券提供每年 5% 的券息，每半年支付一次，价格为 104 美元。债券的收益率为多少？

4.26 假设到期日为 1、2、3、4、5 和 6 个月的 LIBOR 利率分别为 2.6%、2.9%、3.1%、3.2%、3.25% 和 3.3%，连续复利。在将来的 1 个月期的远期利率分别为多少？

4.27 银行以 LIBOR 利率进行借款或贷款，2 个月期的 LIBOR 利率为每年 0.28%(连续复利)；假设利率不能为负，那么当 3 个月的 LIBOR 为每年 0.1% 时(连续复利)，存在什么样的套利机会？为保证无套利机会，3 个月期的 LIBOR 利率最低能达到多少？

4.28 银行以 LIBOR 利率进行借款或贷款，假定 6 个月期利率为 5%，而 9 个月期利率为 6%；在 6 ~ 9 个月之间的利率可以通过 FRA 来锁定，其值为 7%。假设所有利率均为连续复利，银行可以如何进行套利？

4.29 对一个年息 5%，按半年复利的利率，

在以下复利形式下所对应的利率为多少？(a)一年复利一次，(b)每月复利一次，(c)连续复利。

4.30 6个月、12个月、18个月和24个月期限的零息利率分别为4%、4.5%、4.75%和5%，这里利率为每半年复利一次。

(a) 相应的连续复利利率为多少？

(b) 在18个月开始的6个月期的远期利率为多少？

4.31 当零息利率由作业题4.30给定后，2年的平价收益率为多少？一个两年期券息等于平价收益率的债券的收益率是多少？

4.32 表4-11给出了债券价格

表 4-11

债券面值（美元）	期限（以年为计）	年券息（美元）	债券价格（美元）
100	0.5	0.0	98
100	1.0	0.0	95
100	1.5	6.2	101
100	2.0	8.0	104

表4-11中，每6个月支付所示利息的一半。

(a) 计算对应于6个月、12个月、18个月和24个月期限的零息利率。

(b) 以下时间段的远期利率为多少？6～12个月；12～18个月；18～24个月。

(c) 对于每半年支付一次券息，期限分别为6个月、12个月、18个月和24个月的债券的平价收益率为多少？

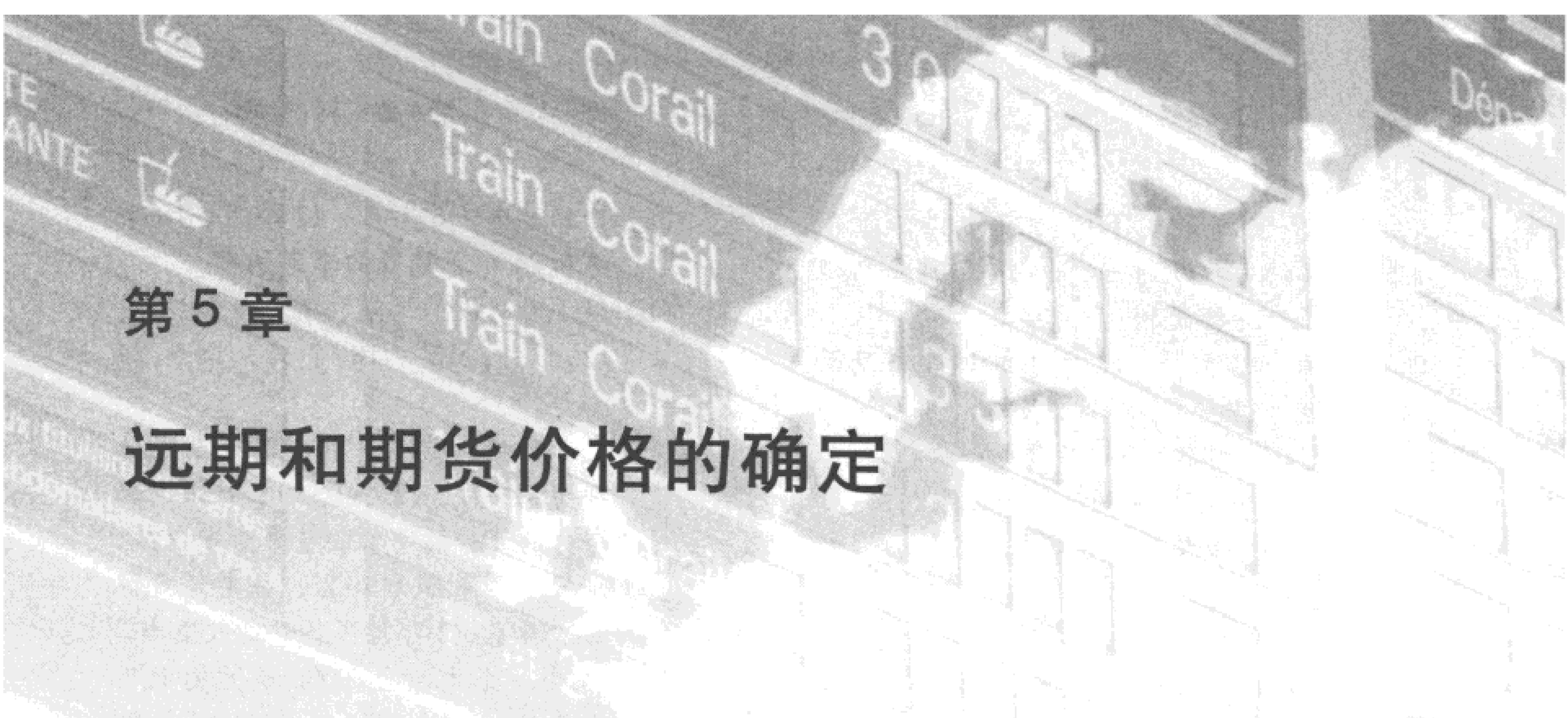
(d) 估算年券息率为10%，每半年支付一次券息，2年期限债券的收益率。

4.33 组合A由一个本金为2 000美元的1年期零息债券和一个面值为6 000美元的10年期零息债券组成。组合B由一个面值为5 000美元的5.95年期的零息债券组成。每个债券目前的收益率均是10%。

(a) 证明两个组合具有相同的久期。

(b) 证明当两个组合的收益率每年都增长0.1%时，两个组合价值变化的百分比相同。

(c) 当收益率每年增长5%时，两个组合价值变化的百分比是多少？



第 5 章

远期和期货价格的确定

本章我们将讨论远期价格和期货价格与标的资产即期价格之间的关系。远期合约比期货合约更容易分析，这是因为远期合约不用每日结算，而只是在到期日一次性结算。幸运的是，同一资产上的远期合约和期货合约有相同期限时，可以证明远期价格和期货价格通常非常接近。这对我们的分析非常有用，因为有关远期合约的结论通常对期货合约也是适用的。

本章首先将推导远期价格与即期价格之间一个重要的关系式，然后采用这一结果来研究对于股指、外汇以及商品期货价格与即期价格之间的关系。我们在第 6 章将考虑利率期货。

5.1 投资资产与消费资产

在考虑远期合约与期货合约时，我们应该区分**投资资产**(investment asset)和**消费资产**(consumption asset)。投资资产是足够多的投资者为了投资而持有的资产。股票与证券显然是投资资产，黄金和白银也是投资资产。注意投资资产并不是只能用来投资(例如，白银也有一些工业用途)，但是，投资资产的一个条件是有足够多的投资者持有它的唯一目的就是投资。而持有消费资产的目的主要是为了消费而不是为了投资。消费资产的例子包括铜、原油和猪肉。

本章我们将看到，对于投资资产，我们可以从无套利假设出发，由即期价格与其他市场变量得出远期价格和期货价格。对于消费资产我们却做不到这一点。

5.2 卖空交易

本章所讨论的套利策略有时会涉及**卖空交易**(short selling)。这一交易策略是指卖出你并不拥有的资产。这种交易对某些资产可行，但并不是对所有资产都可行。我们将以卖空股票来说明如何进行这种交易。

假定某投资者想通过经纪人来卖空 500 股 IBM 股票，经纪人往往是通过借入其他客户的股票，并将股票在市场上卖出来执行投资者的指令。只要经纪人可以借到股票，投资者想持有这一卖空交易多久都可以。在将来某一时刻，投资者需要从市场上买入 500 股 IBM 股票来对自己的头寸平仓，这些买入的股票是用于偿还在此之前借入的股票。当股票价格下跌时，投资者将会盈利；而当股票价格上涨时，投资者将会亏损。当在卖空交易平仓之前，如果经纪人不能再借到股票，此时，无论投资者是否愿意，都必须对其头寸平仓，也就是说，此时投资者必须马上偿还所借的股票。有时，卖空方为借入股票和其他证券而需要支付一定的费用。

在卖空交易中，持有卖空头寸的投资者必须向经纪人支付卖空资产的所有收入，如股票的股息和债券的券息，等等(这些收入是在一般情况下被卖空资产应得的收入)，经纪人会将这些收入转入证券借出方的账户。假设某投资者在 4 月份股价为 120 美元时卖空 500 股股票。在 7 月份当

价格为 100 美元时，对头寸进行平仓。假定股票在 5 月份支付了每股 1 美元的股息。在 4 月份交易开始时，投资者收到500 × 120 = 60 000 美元，在 5 月份，投资者付出 500 × 1 = 500 美元，在 7 月份交易平仓时投资者要支付 500 × 100 = 50 000 美元。投资者的净收益为

$$60\,000 - 500 - 50\,000 = 9\,500 \text{ 美元}$$

这里假设无须对所借入的股票支付费用。在表 5-1 中，我们展示了这个例子。我们可以看到，在卖空交易中的投资者的现金流就如同一笔在 4 月份买入并在 7 月份卖出的一笔正常股票交易现金流的镜像反射(假设没有借贷费用)。

表 5-1　卖空交易以及正常股票买卖的现金流

股票的买卖	4 月：以每股 120 美元买入 500 股股票	-60 000 美元
	5 月：收到股息	+500 美元
	7 月：以每股 100 美元卖出 500 股股票	+50 000 美元
		净收益 = -9500 美元
股票卖空交易	4 月：借入 500 股股票并以每股 120 美元卖出	+60 000 美元
	5 月：支付股息	-500 美元
	7 月：以每股 100 美元买入 500 股股票，偿还借入股票，平仓卖空交易	-50 000 美元
		净收益 = +9 500 美元

在卖空交易中，卖空方需要在经纪人那里开一个**保证金账户**(margin account)，并在保证金账户中存入一定数量的现金或其他可变卖证券，以便保证在股票价格上涨时投资者不会违约。在账户刚刚开设时，投资者要投入一定的**初始保证金**(initial margin)，而且当市场变化对投资者不利时，即当借入股票的价格上涨时，投资者可能需要投入附加保证金，投资者投入的保证金并不代表投资费用，这是因为经纪人会按投资者账户上的金额数量支付利息，如果支付的利率对投资者来讲不可接受，投资者可以在保证金账户中存入可变卖证券，如国债，来满足要求。卖出这些资产时的收入属于投资者，并且一般会作为初始保证金的一部分。

随着时间的变化，关于卖空交易的监管条例也在变化。证券价格升档(uptick)规则在 1938 年首先被引入，在升档规则下，证券只有在价格与最近一次变动相比上升时才被允许卖空。2007 年 7 月，SEC 取消了升档规则，但于 2010 年 2 月引进了另类升档(alternative uptick)规则：当某一股票价格在某一天的跌幅超过 10% 时，在当天与第二天，对于这一股票的卖空交易将会受到限制。这些限制即为股票被卖空的价格要高于当时市场上最好的出价。有时也会暂时禁止卖空活动，2008 年一些国家实行了这一规则，因为监管当局认为卖空交易助长了当时市场上出现的剧烈波动。

5.3　假设与符号

本章我们假定对于某些市场参与者而言，以下假设全部成立：

- 市场参与者进行交易时没有手续费。
- 市场参与者对所有交易利润都适用同一税率。
- 市场参与者能够以同样的无风险利率借入和借出资金。
- 当套利机会出现时，市场参与者会马上利用套利机会。

注意，我们并不要求这些条件对于所有市场参与者均成立。我们只要求这些条件对像大型投资银行这样的关键参与者成立或大致成立即可。正是因为这些关键参与者的行为以及他们寻找套利机会的积极心态决定了远期价格与即期价格的关系。

本章我们将要采用以下符号：

T——远期或期货合约的期限(以年计)；

S_0——远期或期货合约标的资产的当前价格；

F_0——当前的远期或期货价格；

r ——按连续复利的无风险零息年利率，这一利率的期限对应于合约的交割日(即 T 年以后)。

无风险利率 r 在理论上是指在无信用风险的前提下(即资金一定全被偿还的情况下)，借入和借出资金的利率。如第 4 章所述，金融机构以及其他衍生产品市场参与者认为无风险利率是 LIBOR，而不是国债利率。

5.4　投资资产的远期价格

最容易定价的远期合约是基于不提供任何中间收入的投资资产的合约。无股息股票和零息债券都属于这一类资产。

考虑一个 3 月期的无股息股票的远期合约[⊖]。假定股票的当前价格为 40 美元，3 个月期的无风险利率为每年 5%。

首先假定远期价格相对较高，为 43 美元。一个套利者能够以无风险利率 5% 借入 40 美元，并利用所借资金购买一股股票，并同时进入 3 个月期的远期合约的短头寸(即在远期合约中将卖出股票)。在 3 个月后偿还贷款的现金总量为

$$40e^{0.05\times3/12}=40.50\text{ 美元}$$

通过这一策略，套利者在 3 个月结束时获得的盈利为 43 - 40.50 = 2.50 美元。

接下来我们假定远期的价格相对较低，为 39 美元。这时，一个套利者可以卖空一股股票，将卖空股票所得资金以 5% 的利率投资 3 个月，并同时进入一个 3 个月远期合约的长头寸。卖空股票资金的投资在 3 个月后会涨至 $40e^{0.05\times3/12}$，即 40.50 美元。在 3 个月后，套利者支付 39 美元，按照远期合约收入股票，并将股票用于卖空交易的平仓，套利者在 3 个月后的盈利为 40.50 - 39 = 1.50 美元。表 5-2 是对以上两个交易策略的总结。

表 5-2　远期价格与即期价格的脱节所引发的套利机会

	远期价格 = 43 美元	远期价格 = 39 美元
现在的交易	以 5% 利率借入 40 美元，期限为 3 个月 买入一份资产 进入一远期合约，在合约中同意在 3 个月时以 43 美元卖出资产	卖空一股股票，收入现金 40 美元 将 40 美元以 5% 利率投资 3 个月 进入一远期合约，在合约中同意在 3 个月时以 39 美元买入资产
3 个月后的交易	以 43 美元的价格卖出资产 偿还贷款本息 40.50 美元 实现盈利 2.50 美元	以 39 美元买入资产 对卖空交易进行平仓，收入 40.50 美元投资收入 实现盈利 1.50 美元

注：这里的标的资产不提供任何中间收入(资产价格为 40 美元，利率为 5%，远期合约的期限为 3 个月)。

在什么情况下表 5-2 所显示的套利机会就不再存在了呢？第一种套利在远期价格大于 40.50 美元时成立；第二种套利在远期价格小于 40.50 美元时成立。因此我们可以得出，为了保证无套利机会，远期价格必须为 40.50 美元。

5.4.1　实例推广

为了推广以上实例，我们考虑一个投资资产的远期价格，资产的当前价格为 S_0，并且不提供任何中间收入。采用我们前面的符号：T 为期限，r 为无风险利率，F_0 为远期价格。F_0 与 S_0 的关系式为

⊖　在实际中，关于单一股票的远期合约并不常见，但是这一例子对我们要说明的问题很有帮助。自 2002 年 11 月以来，美国市场也开始交易关于单一股票的期货。

$$F_0 = S_0e^{rT} \quad (5\text{-}1)$$

如果 $F_0 > S_0e^{rT}$，套利者可以买入资产并进入远期合作的短头寸来进行套利；如果 $F_0 < S_0e^{rT}$，套利者可以卖空资产并进入远期合约的长头寸来进行套利[⊖]。在我们的例子中，$S_0 = 40$，$r = 0.05$ 和 $T = 0.25$。因此，由式(5-1)得出

$$F_0 = 40e^{0.05\times0.25} = 40.50 \text{ 美元}$$

这同以上的计算结果一致。

远期合约的长头寸与在即期市场购买的结果都是在时间 T 拥有资产。买入资产并在远期期限内持有资产会带来融资成本，因此远期价格会高于即期价格，1994 年这一成本曾被投资商基德公司忽视(见业界事例 5-1)。

业界事例 5-1　基德公司令人难堪的错误

目前投资银行已经开发了一种产品叫**剥离零息债券**(strip Zero-Coupon bond)，其方法是将带息国家长期债券的每个现金流都当成一个单独的个体来出售。券商基德公司(Kidder Peabody)的一位交易员约瑟夫·吉特(Joseph Jett)有一种非常简单的交易策略：买入零息债券并在期货市场出售。如式(5-1)所示，不提供收入的债券上期货价格永远比即期价格高。例如，假定 3 个月期的利率为每年 4%，零息债券市价为 70 美元，3 个月期零息债券远期的价格应该是 $70e^{0.04\times3/12} = 70.70$ 美元。

基德公司的计算机系统显示吉特的每一笔交易的盈利都等于远期价格与即期价格的部分(我们的例子中为 0.70 美元)，事实上，这项所谓利润只不过是购买零息债券所用的融资成本。将每一笔远期延长，从而防止了将这笔费用累计到他的头上。

最后系统显示吉特交易盈利为 1 亿美元(吉特也因此拿到了一笔可观的分红)，但这笔交易的实际损失为 3.5 亿美元。这一例子显示一个大型金融机构也可能会犯简单低级的错误。

【例 5-1】 考虑一个 4 个月期限的远期合约，这一合约的长头寸持有者可以在 4 个月时买入从今天起 1 年后到期的零息债券(这意味着当远期合约到期时，债券的剩余期限为 8 个月)。债券的当前价格为 930 美元，我们假定 4 个月期限的无风险利率为每年 6%(连续复利)。因为零息债券不提供中间收入，我们可以采用式(5-1)，参数为 $T = 4/12$，$r = 0.06$，$S_0 = 930$。远期价格 F_0 为

$$F_0 = 930e^{0.06\times4/12} = 948.79 \text{ 美元}$$

这一价格为今天成交的远期合约的交割价格。

5.4.2　不允许卖空会怎么样

并不是所有的投资资产都可以用于卖空交易。但这种情形出现时，对以上结果没有影响。为了推导式(5-1)，我们并不需要卖空资产，而所需要的假设是，足够多的投资者拥有这种资产的唯一目的是为了投资(由定义我们知道，对于某个投资资产这一假设永远正确)。如果远期价格太低，投资者会卖出资产并进入远期合约的长头寸。

假定某标的资产没有储存费用与中间收入。如果 $F_0 > S_0e^{rT}$，某投资者可以采取以下交易策略：

⊖ 还有另一种证明式(5-1)的方法。我们考虑以下策略：买入一份资产并且进入远期合约的短头寸，在远期合约中以 F_0 价格卖出资产，这一交易成本为 S_0，在将来的现金流入为 F_0。因此 S_0 一定等于 F_0 的贴现值：$S_0 = F_0e^{-rT}$，或 $F_0 = S_0e^{rT}$。

- 按利率 r 借入数量为 S_0 的美元，期限为 T。
- 买入一份资产。
- 进入期货短头寸。

在 T 时刻，标的资产价格为 F_0，这时偿还贷款所需资金为 S_0e^{rT}，投资者的盈利为 $F_0-S_0e^{rT}$。

接下来假定 $F_0<S_0e^{rT}$，这时拥有标的资产的投资者可以采取以下交易策略：

- 以 S_0 的价格卖出标的资产。
- 将所得资金以收益率 r 进行投资，期限为 T。
- 进入期货的长头寸。

在 T 时刻，现金投资会涨至 S_0e^{rT}。投资者以 F_0 价格买入资产，这一投资者同一直保存资产的投资者相比，所得盈利为 $S_0e^{rT}-F_0$。

类似于我们以上考虑的无股息股票，我们可以期望远期价格将会得以调整从而使以上讨论的两种套利机会不再存在。这意味着式(5-1)一定成立。

5.5　提供已知中间收入的资产

本节我们考虑会给投资者提供可预见中间收入的资产的远期价格，这类产品包括提供股息的股票及提供券息的债券。我们采取的方式与5.4节类似，首先考虑数值实例，然后再给出正式讨论。

考虑一个买入当前价格为900美元的某带息债券的远期合约的长头寸。假定远期合约的期限为9个月。我们假定在4个月后有40美元的券息付款，并且假定4个月期及9个月期的利率(连续复利)分别为3%及4%。

首先假定远期价格为910美元，这一价格相对较高。一个套利者可以借入900美元来买入债券，并且进入远期合约的短头寸，券息的现值为 $40e^{-0.03\times4/12}=39.60$ 美元。在900美元的价格中，其中有39.60美元所对应的利率为年率3%，期限为4个月，这笔资金在4个月时可用券息偿还，其他部分资金(即860.40美元)所对应的利率为9个月期的利率。这笔资金在9个月后变为 $860.4e^{0.04\times0.75}=886.60$ 美元。按照远期合约条款，投资者在远期合约中卖出证券收入为910美元，因此投资者的盈利为 $910-886.60=23.40$ 美元。

接下来假定远期价格为870美元，这一价格相对较低。一个套利者可以卖空债券并同时进入远期合约的长头寸。在卖空交易所得的900美元资金中，将其中39.60美元以3%的利率投资4个月，在4个月时这笔资金足够偿还债券的券息。剩余的860.40美元以4%投资9个月，到期时这笔资金变为886.60美元。根据远期合约，投资者能够以870美元买入债券，然后将卖空交易进行平仓，投资者的收入为 $886.60-870=16.60$ 美元。表5-3是对以上两种套利策略的总结。[⊖]

表5-3　一个9月期远期合约价格与即期价格脱节所产生的套利机会

	远期价格 =910 美元	远期价格 =980 美元
现在交易	借入900美元：其中39.60美元为3个月期，另外860.40美元为9个月期	卖空一份资产，收入900美元
	买入一份资产	将一部分资金39.60美元投资4个月，将另外一部分资金860.40美元投资9个月
	进入远期合约的短头寸，即在9个月时以910美元的价格卖出资产	进入远期合约(长头寸)，即在9个月时可以以870美元买入资产

⊖ 如果债券不允许卖空，拥有债券的投资者可以卖出债券并同时进入一个远期合约的长头寸，这样做后投资者可以得到额外利润16.60美元。这一点与5.4节所描述的黄金交易策略类似。

（续）

	远期价格 =910 美元	远期价格 =980 美元
4 个月以后的交易	收入 40 美元 偿还第 1 笔贷款	收入投资收益，即 40 美元 偿还卖空资产 40 美元的中间收入
9 个月以后的交易	卖出资产，收入 910 美元 利用 886.60 美元来偿还第 2 笔贷款（即初始的 860.40 美元）	从 9 个月的投资中收入 886.60 美元 以 870 美元的价格买入资产，对卖空交易进行平仓
	实现盈利 23.40 美元	实现盈利 16.60 美元

注：这里资产提供已知的现金收入（资产价格为 900 美元；在 4 个月时的中间收入为 40 美元；4 个月期及 9 个月期的利率分别为年率 3% 及 4%）。

表 5-3 显示，第 1 种策略在远期价格大于 886.60 美元时会产生套利盈利，第 2 种策略在远期价格小于 886.60 美元时会产生套利盈利。因此，在没有套利的情况下，远期价格为 886.60 美元。

实例推广

我们可以将以上实例进行推广，当投资资产在远期合约期限内提供的中间收入的贴现值为 I 时，我们有以下关系式

$$F_0=(S_0-I)e^{rT} \tag{5-2}$$

在我们的例子中，$S_0=900.00$，$I=40e^{-0.03\times4/12}=39.60$，$r=0.04$ 及 $T=0.75$，因此

$$F_0=(900.00-39.60)e^{0.04\times0.75}=886.60\text{ 美元}$$

这与我们以上的计算结果一致。式(5-2)适用于任何提供中间收入的投资资产。

【例 5-2】 考虑某股票 10 个月期限的远期价格，股票的当前价格为 50 美元，我们假定对于所有期限的以连续复利计的无风险利率为 8%，在 3 个月、6 个月、9 个月后股票会支付 0.75 美元的股息。股息的现值 I 为

$$0.75e^{-0.08\times3/12}+0.75e^{-0.08\times6/12}+0.75e^{-0.08\times9/12}=2.162\text{ 美元}$$

变量 T 为 10 个月，因此式(5-2)中的远期价格 F_0 为

$$F_0=(50-2.162)e^{0.08\times10/12}=51.14\text{ 美元}$$

如果远期价格小于以上价格，一个套利者能够以即期价格卖空股票并且进入远期合约长头寸。如果远期价格大于以上价格，一个套利者可以进入远期合约的短头寸并且以即期价格买入股票。

如果 $F_0>(S_0-I)e^{rT}$，一个套利者可以买入资产并且进入资产的远期合约的短头寸来盈利；如果 $F_0<(S_0-I)e^{rT}$，一个套利者可以卖空资产并且进入资产的远期合约的长头寸来盈利。如果卖空交易不可行，拥有资产的投资者可以卖出资产，并进入远期合约的长头寸来套利盈利。[⊖]

5.6 收益率为已知的情形

我们现在考虑远期合约的标的资产支付一个已知的收益率，而非既定现金收入的情况。这意味着在中间收入付出时，其数量是资产价格的一定比例。假定某资产预计支付的收益率为每年 5%。这可能意味着资产每年支付一次收入，其收入量为支付时的资产价格的 5%（这时收益率为

⊖ 还有另一种证明式(5-2)的方法。我们考虑以下策略：买入一份资产并且进入远期合约的短头寸，在远期合约中，在时刻 T 以 F_0 价格卖出资产，这一交易成本为 S_0。在将来时刻 T 的现金流入为 F_0，在将来流入的现金流的贴现值为 I。最初的现金流出 S_0。所有的流入现金流的贴现值为 $I+F_0e^{-rT}$，因此 $S_0=I+F_0e^{-rT}$，其等价形式为 $F_0=(S_0-I)e^{rT}$。

每年连续复利)；它也可能意味着收入的支付为一年两次，每次支付收入的数量等于资产价格的2.5%(这时收益率为每年复利两次)。在4.2节我们曾指出，我们今后一般采用连续复利的形式来对利率进行计量。类似地，我们也采用连续复利的形式来对收益率进行计量。转换收益率的计算公式与4.2节中给出的转换利率计量形式的公式没有什么不同。

定义 q 为资产在远期期限内的平均年收益率，计算形式为连续复利。我们可以证明(见练习题5.20)

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} \tag{5-3}$$

【例5-3】 考虑一个6个月期限的远期合约，合约的标的资产在6个月期限内预计提供的中间收入等于资产价格的2%。连续复利的无风险利率为10%。资产价格为25美元。这时 $S_0 = 25$，$r = 0.10$，$T = 0.5$。收益率为每年4%(半年复利一次)。由式(4-3)得出，这一收益率在连续复利情形下为3.96%。因此 $q = 0.0396$。由式(5-3)得出，远期价格为

$$F_0 = 25e^{(0.10-0.0396)\times 0.5} = 25.77 \text{ 美元。}$$

5.7 远期合约的定价

在刚刚进入远期合约时，其价格为0，但在进入合约之后，远期合约价值可能为正也可能为负。对银行或其他金融机构来讲，每天计算这些合约的价值是非常重要的[这被称做对合约按市价定价(marking to the market)]。采用前面引入的符号，假设 K 是以前成交的合约的交割价格，合约的交割日期是在从今日起 T 年之后，r 是期限为 T 年的无风险利率，变量 F_0 表示目前的远期价格，即假如在今天成交的话，合约的交割价格。我们还定义 f 为远期合约今天的价值。

清楚地理解变量 F_0、K 和 f 的含义是非常重要的。如果今天正好是合约的最初成交日，那么交割(K)等于远期价格(F_0)，而且合约的价值(f)是0。随着时间的推移，K 保持不变(因为它已经被合约确定)，但远期价格 F_0 将会变动，而且远期合约的价值 f 可以或正或负。

对于远期合约的长头寸方(投资资产和消费资产)，合约的价值是

$$f = (F_0 - K)e^{-rT} \tag{5-4}$$

为了说明式(5-4)是正确的，我们采用类似于第4.7节关于远期利率合约价格的证明方式。将一个具有交割价格为 F_0 的远期合约长头寸与另外一个与其等同但具有交割价格 K 的远期合约相比较。这两个合约唯一的不同之处只是在时间 T 买入标的资产的价格不同。在第一种合约中，这个价格是 F_0；在第二种合约中，价格是 K。在 T 时刻的现金流差异 $F_0 - K$ 的现值为 $(F_0 - K)e^{-rT}$。因此，交割价格为 F_0 的合约价值要小于交割价格为 K 的合约价值，其差别为 $(F_0 - K)e^{-rT}$。由定义出发，具有交割价格 F_0 的合约在今天的价值为0。因此，具有交割价格 K 的合约的现值为 $(F_0 - K)e^{-rT}$。这就证明了式(5-4)成立。类似地，具有执行价格 K 的远期合约短头寸的价值为

$$(K - F_0)e^{-rT}$$

【例5-4】 一个无股息股票上的远期合约长头寸是在一段时间以前成交的。这一远期合约还有6个月到期。无风险利率(连续复利)为10%，股票价格为25美元，远期合约的执行价格为24美元。这时 $S_0 = 25$，$r = 0.10$，$T = 0.5$ 和 $K = 24$。由式(5-1)得出6个月期的远期合约的价格 F_0 为

$$F_0 = 25e^{0.1\times 0.5} = 26.28 \text{ 美元}$$

由式(5-4)可知远期合约的价值为

$$f = (26.28 - 24)e^{-0.1\times 0.5} = 2.17 \text{ 美元}$$

式(5-4)说明了对一个资产的远期合约定价时，可以假定资产在远期合约到期时的价格等于远期价格 F_0。为了说明这一点，注意在做出假设后，一个远期合约在 T 时刻的收益为 $F_0 - K$，其

贴现值为$(F_0-K)e^{-rT}$，这与式(5-4)中f的价值一致。类似地，我们在对于远期合约的短头寸进行定价时也可以假定远期价格在将来会实现，这一假设与4.7节中的假设类似。在4.7节中对远期利率合约定价时，我们曾假设远期利率在将来会实现。

将式(5-4)与式(5-1)结合，我们可以得出，对于没有中间收入的资产远期合约长头寸价值为

$$f = S_0 - Ke^{-rT} \tag{5-5}$$

类似地，将式(5-4)与式(5-2)结合，我们可以得出，对于支付收入的贴现值为I的资产远期合约价值为

$$f = S_0 - I - Ke^{-rT} \tag{5-6}$$

最后，将式(5-4)与式(5-3)并用，我们可以得出，提供收益率q的资产的远期合约长头寸价值为

$$f = S_0e^{-qT} - Ke^{-rT} \tag{5-7}$$

当期货价格变化时，期货合约的盈亏等于其价格变化乘以持有期货的头寸数量。因为期货合约为每日结算，所以收益几乎马上就可以兑现。式(5-4)表示当远期价格变化时，其盈亏等于远期价格的变化的贴现值，并乘以其头寸的数量。外汇交易和远期和期货收益的不同可能会给外汇交易平台带来困扰(见业界事例5-2)。

业界事例 5-2　是系统错误吗

某银行的外汇交易员进入一个远期合约的长头寸，在合约中这个交易员将在3个月时以汇率1.5买入100万英镑。同时，另外一个交易平台的交易员进入一个有16个3个月期限期货的长头寸，期货价格为1.5，并且每个期货的规模为62 500英镑。因此远期及期货交易的头寸一样。在进入交易后，远期及期货价格都涨至1.504 0。银行系统显示期货交易员获利4 000美元，但远期合约交易员的获利只有3 900美元。远期合约交易员马上打电话给银行系统部门抱怨。远期合约交易员的抱怨合理吗？

答案是否定的！期货合约每天进行结算保证了交易员马上兑现盈利，盈利数量等于期货价格的涨幅。如果远期合约交易员马上对其头寸进行平仓，即进入执行价格为1.504 0的远期合约的短头寸，远期合约交易员在3个月时能够以1.5的汇率买入100万英镑，并同时能够以1.504 0价格卖出100万英镑，这因此会产生4 000美元盈利，但这一盈利是在3个月以后。远期合约交易员的盈利为4 000美元的贴现值。这与式(5-4)等价。

远期合约交易员可以从盈利及亏损的对称性中得到补偿，如果远期或期货价格下跌至1.496，而不是上升到1.504 0，那么期货交易员马上会损失4 000美元，而远期合约交易员却只损失3 900美元。

5.8 远期和期货价格相等吗

在网页 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes 的 Technical Note 24 中，我们以套利的方法证明了当无风险利率对所有期限均为常数时，具有某一期限的合约的远期价格与具有同一期限合约的期货价格相等。其结论可以推广到利率为时间的已知函数的情形。

当利率变化无法预测(正如现实世界中那样)，远期价格与期货价格从理论上讲会有所不同。通过考虑标的资产价格S与利率高度相关的情形，我们会对两者之间的关系有一个感性的认识。当S上升时，一个期货长头寸的持有者因为期货的每日结算会马上获利。期货价格与利率的正相关性造成利率也可能马上上升，这时获得的利润将会高于以平均利率作为回报的投资所带来的利润。同样，当S下跌时，投资者马上会遭受损失。这时亏损的融资费用会低于平均利率。持有远期长头寸而不是期货长头寸的投资者将不会因为利率的这种上下变动而受到影响。因此，在其他

条件相同的情况下，期货的长头寸比远期的长头寸更具吸引力。因此，当 S 与利率有正的相关性时，期货价格会稍稍高于远期价格；当 S 与利率有负的相关性时，通过采用类似的讨论我们可以得出远期价格稍稍高于期货价格。

在期限小于几个月时，期货及远期价格的理论差异在大多数情形下可以忽略。在实践中，理论模型中几个没有纳入的因素会造成远期及期货价格不同，包括税务、交易费用及对于保证金的处理等。因为交易所清算中心的作用，期货合约中的对手违约风险很小。还有，有时期货合约的市场流动性要比远期合约好。虽然有这么多不定因素，对于大多数情形，我们仍然可以比较合理地假定远期价格等于期货价格。在本书中，我们常常采用这一假定，并用符号 F_0 来代表某标的资产的远期及期货的当前价格。

欧洲美元期货和远期合约是上面假设的一个例外。在6.3节，我们将讨论欧洲美元期货合约。

5.9 股指期货价格

我们在3.5节介绍了股指期货，并指出股指期货是管理股票组合非常有用的工具。我们现在来研究股指期货的定价。

股指一般可以被看做是支付一定股息的投资资产[⊖]，投资资产为构成股指的股票组合，投资资产股息等于构成资产所支付的股息。通常假定股息为已知收益率而不是现金收入。如果 q 为股息收益率，式(5-3)给出的期货价格 F_0 为

$$F_0 = S_0e^{(r-q)T} \tag{5-8}$$

这说明期货价格以 $r-q$ 的比率随期货合约期限而增长。在表3-3中，S&P 500指数的12月份期货价格比6月份期货价格低0.76%，这意味着在2010年5月26日，短期无风险利率 r 要比股息率 q 低1.52%。

【例5-5】 考虑一个对于S&P500的3个月期的期货合约。假定构成股指的股票提供1%的年收益率，股指的当前价格为1 300，连续复利的无风险利率为年率5%。这时，$r=0.05$，$S_0=1\ 300$，$T=0.25$，$q=0.01$，因此期货价格 F_0 等于

$$F_0 = 1\ 300e^{(0.05-0.01)\times 0.25} = 1\ 313.07 \text{ 美元}$$

实践中，组成股指的股票组合的股息收益率在一年当中每周都会变化。例如，NYSE交易的股票大部分股息都是在每年的2月份、5月份、8月份和11月份的第一个星期内支付。股息收益率 q 应该为在期货合约期限中平均的股息年收益率。用于估计 q 的股息的除息日应在期货的期限之内。

业界事例5-3　CME的日经225指数期货合约

在本章所说明的期货价格确定方式中，我们需要假定股指为投资资产。这意味着股指必须为可交易资产组合的价值。在CME交易的日经225股指（Nikkei 225）期货不满足这一要求，其原因并不是那么显而易见。假定 S 为日经225指数的价格，这一价格是以日元为计量的日本的225个股票组合的价格。CME交易的日经225指数的期货的标的变量为5倍的 S 所对应的美元价格。换句话讲，虽然股指期货的标的变量以日元为计量，但期货的价格单位直接计量为美元。

⊖ 有时情况并非如此，见业界事例5-3。

我们不能投资于价值5S美元的投资组合，所能做的是投资于5S日元的组合，这时其价值永远为5QS，其中Q为1日元所对应的美元数量。变量5S美元不对应于任何投资资产的价格，因此式(5-8)不成立。

CME的日经225指数期货是交叉货币度量衍生产品的一个实例。交叉货币度量衍生产品是标的资产以一种货币计量，但收益以另一种货币支付的衍生产品。在第29章我们将进一步讨论这种产品。

指数套利

如果 $F_0 > S_0e^{(r-q)T}$，我们可以通过以即期价格(即马上支付)买入构成指数的股票，并且同时卖出指数期货合约而获利；如果 $F_0 < S_0e^{(r-q)T}$，可以通过相反操作，即卖空或卖出构成指数的股票，并且同时进入指数期货的长头寸而获利。这种交易策略就是所谓的**指数套利**(index arbitrage)。当 $F_0 < S_0e^{(r-q)T}$时，指数套利可能会由拥有指数成分股票组合的养老金基金采用；当 $F_0 > S_0e^{(r-q)T}$，指数套利可能会被持有短期货币市场资金的企业采用。对于一些包含很多股票的指数而言，指数套利有时是通过交易数量相对较少的有代表性的股票进行，这些股票组合的变化与指数的变化较为接近。指数套利经常是通过**程序交易**(program trading)来进行，即通过一个计算机系统来产生交易指令。

在大多数时间，套利者的行为保证了式(5-8)的成立。但有时套利也是不可行的，期货价格会脱离其与即期价格的关系式(见业界事例5-4)。

业界事例5-4 1987年10月的指数套利

为进行指数套利，交易员必须在市场得到报价后很快地同时交易指数期货及构成股指的股票。在正常市场条件下，交易员可以采用程序交易，并且式(5-8)成立。1987年10月19日及20日的市场绝非正常市场。1987年10月19日被称为“黑色星期一”(black Monday)。在这一天，市场下跌了20%。这一天的6.04亿股票的交易额轻易地打破了以往的纪录。交易所的计算机系统超载运转。如果在这一天发出一个买入或卖出股票的指令，可能要等上一两个小时才能完成交易。

在1987年10月19日这一天，期货价格远低于标的股指的价格。例如，在交易日结束时，股指S&P500收盘价为225.06(在这一天下跌了57.88)，12月到期的S&P500股指期货的收盘价为201.50(在这一天下跌了80.75)。这主要是因为交易的延迟而使得套利变得不可能。在第二天，即1987年10月20日，星期二，纽约股票交易所暂时停止了程序交易。这使得指数套利变得更加困难，这时传统意义上股票价格与期货价格的关系被打破。在那一天的某时刻，12月份交割的期货价格比S&P500股指的价格低18%。但是，在几天以后市场恢复了正常，套利者的行为保证了期货与即期价格之间的关系式，即式(5-8)的成立。

5.10 货币的远期和期货合约

我们现在从美国投资者的角度来考虑外汇的远期和期货合约，这里的标的资产为一定单位的外币。因此我们定义变量 S_0 为一单位外币的美元价格，F_0 为一单位外币的远期或期货价格。这种定义与其他远期和期货标的资产的形式是一致的。但是，正如2.11节所述，这种报价方式并不一定就是外汇即期和远期汇率的市场报价方式。除英镑、欧元、澳元和新西兰元之外的主要货

币的即期和远期的报价通常是1美元所对应的外币数量。

外币具有以下性质：外币持有人可以取得货币发行国的无风险利率。例如，外币持有人可将货币投资于以外币计价的债券。我们定义 r_f 为期限为 T 的外币无风险利率，变量 r 为对应于同样期限的美元无风险利率。

F_0 与 S_0 有以下关系式

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T} \tag{5-9}$$

这就是国际金融领域著名的利率平价关系式。图5-1阐述了该式成立的原因。假定某投资者在开始时持有1 000单位的外币。投资者有两种办法可以在时刻 T 将外币转变为美元。一种办法是以 r_f 的收益率将外汇进行投资，期限为 T，同时进入将所有投资的本息转化为美元的远期合约。这种办法在时间 T 会产生 $1\,000F_0e^{r_fT}$ 数量的美元。另外一种办法是将外汇在外汇即期市场转换成美元，然后再将美元以利率 r 投资 T 年。这种办法在时间 T 会产生数量为 $1\,000S_0e^{rT}$ 的美元。在没有套利机会的情况下，以上两种办法会取得同样的结果，即

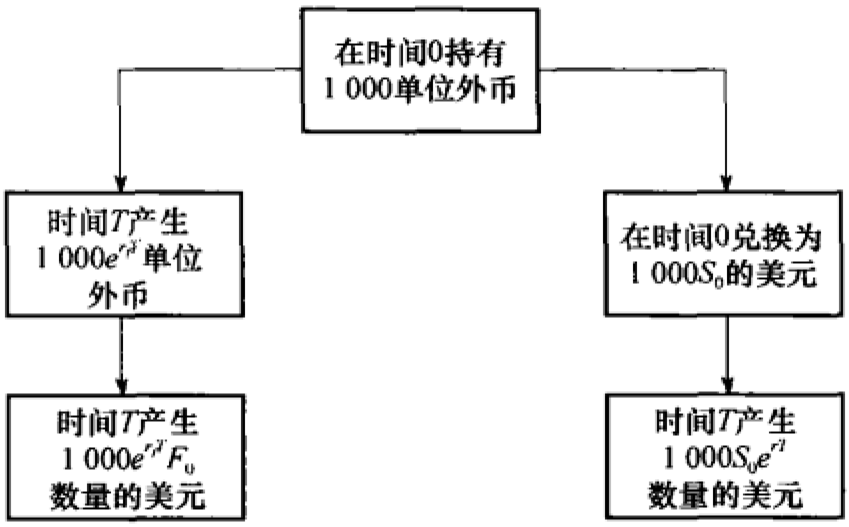


图5-1　两种将外汇在时刻 T 转换成美元的方法

注：S_0 为即期汇率；F_0 为远期汇率；r 及 r_f 分别为美元及外币无风险利率。

$$1\,000e^{r_fT}F_0 = 1\,000S_0e^{rT}$$

因此

$$F_0 = S_0e^{(r-r_f)T}$$

【例5-6】　假定澳元及美元的2年期无风险利率分别为5%及7%，且澳元及美元的汇率为0.62（即1澳元所对应的美元数量）。由式(5-9)得出，2年期的远期汇率应该等于

$$0.62e^{(0.07-0.05)\times 2} = 0.645\,3$$

首先假定2年期的远期汇率小于这一数字，为0.63。一个套利者可以进行以下交易

- 以5%利率借入1 000澳元，期限为2年。将澳元转化为620美元，并以7%的美元利率投资2年（两个利率均为连续复利）。
- 进入一个远期合约，在合约中以1 105.17×0.63＝696.26美元的价格买入1 105.07澳元。

以7%的收益率投资的620美元在2年后会增长到 $620e^{0.07\times 2} = 713.17$ 美元。在这部分资金中有696.29美元用于在远期合约中买入的1 105.17澳元，这可以用于偿还借入1 000澳元所产生的本息（即 $1\,000e^{0.05\times 2} = 1\,105.17$）。这种策略所产生的无风险盈利为713.17－696.29＝16.91美元（这一结果听起来似乎不太令人振奋，你设想一下借入1亿澳元并采取以上策略所产生的结果）。

接下来，假定2年远期的价格为0.660 0（大于由式(5-9)得出的数量0.645 3）。这时，一个套利者可以进行以下交易：

- 以7%利率借入1 000美元，期限为2年，将资金转化为1 000/0.62＝1 612.90澳元，然后将澳元以5%利率进行投资。
- 进入2年期的远期合约，在合约中卖出1 782.53澳元，收入1 782.5×0.66＝1 176.47美元。

以5%收益率投资的1 612.90澳元在2年后会增长到 $1\,612.90e^{0.05\times 2} = 1\,782.53$ 澳元。远期合约将这笔资金转化为1 176.47美元。偿还美元贷款的美元数量为 $1\,000e^{0.07\times 2} = 1\,150.27$ 美元。因此，这种交易策略会产生1 176.47－1 150.27＝26.20美元的无风险盈利。

表5-4为2010年5月26日的外汇期货报价，这里的价格对应于外汇所对应的美元数量。对

于日元，报价指的是每100日元所对应的美元数量，而对于墨西哥比索，指的是每10比索所对应的美元数量。这是期货的约定报价方式。这时，式(5-9)成立，其中r为美元无风险利率，r_f为外汇的无风险利率。

2010年5月26日，日元、英镑、瑞士法郎和欧元的短期利率均低于美元短期利率，这对应于$r>r_f$的情形。这解释了在表5-4中，期货价格为什么会随期限增长而上升的现象。澳元、加元和墨西哥比索的短期利率高于美元短期利率，这对应于$r_f>r$的情形，这解释了对于这些货币，期货价格为什么随着期限增长而下降的现象。

表5-4 2010年5月26日交易所给出的外汇期货价格

	开盘价	最高价	最低价	结算价格	变化量	成交量	未平仓数量
澳元，\$100 000，USD per AUD(CME Group)							
2010年6月	0.826 6	0.837 3	0.817 1	0.823 6	0.006 2	146 968	101 448
2010年9月	0.816 5	0.828 5	0.809 0	0.815 2	0.005 9	860	4 650
英镑，\$62 500，USD per GBP(CME Group)							
2010年6月	1.442 9	1.444 6	1.433 0	1.441 1	0.004 6	105 256	140 369
2010年9月	1.443 2	1.445 0	1.433 9	1.441 6	0.004 4	1 448	10 811
加元，\$100 000，USD per CAD(CME Group)							
2010年6月	0.938 4	0.945 2	0.930 5	0.939 3	0.009 7	126 564	111 697
2010年9月	0.937 8	0.944 9	0.930 9	0.939 2	0.009 4	2 264	8 647
欧元，125 000 euros，USD per EUR(CME Group)							
2010年6月	1.237 1	1.238 0	1.217 0	1.220 1	−0.011 7	400 948	267 552
2010年9月	1.238 8	1.238 8	1.218 6	1.221 6	−0.011 8	4 702	13 939
日元，12 500 000 yen，USD per 100 yen(CME Group)							
2010年6月	1.107 3	1.113 6	1.103 1	1.110 8	0.000 9	172 240	135 113
2010年9月	1.110 0	1.115 6	1.105 3	1.112 9	0.000 5	2 098	5 506
墨西哥比索，MXN500 000，USD per 10MXN(CME Group)							
2010年6月	0.768 00	0.771 75	0.760 00	0.763 75	0.002 25	37 776	84 207
2010年9月	0.763 75	0.763 75	0.752 75	0.756 25	0.002 25	107	727
瑞士法郎，CHF125 000，USD per CHF(CME Group)							
2010年6月	0.866 1	0.868 8	0.861 3	0.862 9	−0.001 2	68 960	46 212
2010年9月	0.869 3	0.871 3	0.864 4	0.865 7	−0.001 7	1 817	1 938

【例5-7】 在表5-4中，9月份交割的澳元价格比6月份交割的澳元价格低1%，这说明短期期货价格随期限每年增长4%。由式(5-9)得出，这一数量大约等于2010年5月26日澳元短期LIBOR利率与美元短期LIBOR利率之差。

将外汇作为提供已知收益率的资产

注意，如果以r_f代替q，式(5-9)与式(5-3)等同，这并非偶然。一个外币可以看做是提供已知收益率的资产，这里的收益率为外汇的无风险利率。

为了理解这一点，注意外汇提供利息与外汇的价值有关。假定英镑利率为5%。对于美元投资者而言，这一外币提供的收入以英镑计量为5%。换句话讲，英镑是提供5%收益率的资产。

5.11 商品期货

接下来考虑商品期货，我们首先考虑类似黄金与白银这类投资资产的商品期货价格，[⊖]然后考

⊖ 一个资产作为投资资产，并不一定只用于投资。我们所做的假设是：有些人持有这些资产的唯一目的是为了投资。当看到期货投资更为合理时，他们会变卖资产并进入期货的长头寸。这一观点解释了白银虽然有广泛的工业用途，但仍可被视为投资资产。

虑消费资产的期货价格。

5.11.1 收入和储存费用

如业界事例3-1所示，黄金生产商的对冲策略会造成一部分投资银行需要借入黄金。类似于中央银行这样的黄金拥有者在借出黄金时会索取所谓的**黄金租借率**(gold lease rate)形式的利息。对于白银也是一样。因此，黄金和白银为给其拥有者提供收入，同时与其他商品一样，它们也需要存储费用。

在没有存储费用和中间收入时，式(5-1)给出了投资资产的远期价格为

$$F_0 = S_0 e^{rT} \tag{5-10}$$

存储费用可被视为负收入。假定 U 为期货期限之间所有去掉收入后存储费用的贴现值。由式(5-2)得出

$$F_0 = (S_0 + U)e^{rT} \tag{5-11}$$

例5-8是以上公式的应用。

【例5-8】 考虑一年期的黄金期货合约。我们假定黄金不提供中间收入，并假定每年存储1盎司黄金的费用为2美元，存储费在年末支付。黄金的即期价格为450美元，对于所有期限的无风险利率均为7%。因此 $r=0.07$，$S_0=450$，$T=1$ 以及

$$U = 2e^{-0.07\times1} = 1.865$$

由式(5-11)，我们得出 F_0 的理论价格为

$$F_0 = (450 + 1.865)e^{0.07\times1} = 484.63 \text{ 美元}$$

如果期货的实际价格高于484.63美元，那么套利者可以买进黄金并且同时进入1年期的期货来锁定一项盈利。如果期货的实际价格低于484.63美元，这时已拥有黄金的投资者可以通过卖出黄金并进入期货长头寸来改善收益。

如果存储费用与商品价格成正比例，这时的费用可视为负收益率。由式(5-3)得出

$$F_0 = S_0 e^{(r+u)T} \tag{5-12}$$

式中，u 为去掉资产所赚取的所有收益率后存储费用占即期价格的比例。

5.11.2 消费商品

用于消费而不是投资的商品往往不提供中间收入，但这些商品往往具有很高的储存费用。我们接下来仔细讨论如何由即期价格来确定期货价格的套利策略。[⊖]假定式(5-11)不成立，但有以下不等式

$$F_0 > (S_0 + U)e^{rT} \tag{5-13}$$

为了利用这一关系式，套利者可以进行以下交易：

- 以无风险利率借入 S_0+U 数量的资金，并用这一资金买入一个单位的商品且支付储存成本。
- 进入一个单位商品的远期合约的短头寸。

如果我们将期货合约当做远期合约来考虑，即没有每日结算，以上策略在时间 T 产生盈利 $F_0-(S_0+U)e^{rT}$。对于任何商品，采取这一套利策略都没有问题。但是，当许多套利者都这样做时，S_0 价格会上升，F_0 会下降，直到不等式不再成立。因此我们得出，不等式(5-13)成立持续的时间不会太久。

接下来假设

$$F_0 < (S_0 + U)e^{rT} \tag{5-14}$$

⊖ 对于某些商品，即期价格与商品支付的地点有关。我们在此假定商品的即期价格与期货价格的支付地相同。

当商品为投资资产时，许多投资者持有商品是为了投资，当投资者发现以上关系后，会采用以下交易策略来取得盈利。

- 卖出商品，节省储存费用，并将所得资金以无风险利率来投资。
- 进入远期合约的长头寸。

将结果与持有商品进行比较，投资者在到期日的无风险盈利为$(S_0+U)e^{rT}-F_0$，因此，式(5-14)成立持续的时间也不会太长。因为式(5-13)及式(5-14)均不能持续太长时间，因此$F_0=(S_0+U)e^{rT}$一定成立。

对于持有目的不是投资的商品而言，以上讨论不适用。当个人及公司持有商品的目的是为了其消费价值而不是为了其投资价值时，他们不愿意主动地出售商品并买入期货合约，因为期货合约并不能用于消费(例如，我们不能将石油期货输入到石油加工厂)。因此，我们没有任何理由说明不等式(5-14)不成立。对于消费资产，我们所能肯定的是以下关系式

$$F_0 \leqslant (S_0+U)e^{rT} \tag{5-15}$$

如果储存费用表示成即期价格的比例u，表达式为

$$F_0 \leqslant S_0 e^{(r+u)T} \tag{5-16}$$

5.11.3 便利收益率

因为商品持有者可能会认为在将来持有某商品与不持有商品相比会有一定的便利，因此式(5-15)和式(5-16)不一定成立。例如，某原油加工厂不太可能将持有原油期货合约与持有原油库存同等看待。库存原油可以用于原油加工，而持有的期货合约并不能用于加工。一般来讲，持有实物资产可以确保工厂的正常运作，并且从商品的暂时短缺中盈利，而持有一个期货合约并不一定能做到这一点。因持有商品而带来的好处有时被称为商品的**便利收益率**(convenience yield)。如果储存成本为现金形式而且已知，其现值为U，商品的便利收益率由以下关系式来定义

$$F_0 e^{yT} = (S_0+U)e^{rT}$$

如果单位商品的贮存成本为即期价格的百分比，那么便利收益率y可以由以下关系式定义

$$F_0 e^{yT} = S_0 e^{(r+u)T}$$

即

$$F_0 = S_0 e^{(r+u-y)T} \tag{5-17}$$

便利收益率较为简单地衡量了不等式(5-15)和不等式(5-16)左端小于右端的程度。对于投资资产，其便利收益率为0，否则会产生套利机会。第2章的表2-2显示，在2010年5月26日，大豆的期货价格随着期货合约期限的增加而有所下降(从2010年7月到11月)，这说明大豆期货的便利收益率比$r+u$还要大。

便利收益率反映了市场对将来能够购买商品的可能性的期望。商品短缺的可能性越大，便利收益率就越高。如果商品的用户拥有大量库存，在不久的将来出现商品短缺的可能性便会很小，这时便利收益率也会比较小。但从另一方面讲，较低的库存会导致较高的便利收益率。

5.12 持有成本

期货价格与现市价格的关系式可由**持有成本**(cost of carrying)来描述。持有成本包括储存成本加上资产的融资利息，再减去资产的收益。对于无股息的股票而言，持有成本为r，这是因为股票没有储存费用也没有中间收入；对于股指而言，持有成本为$r-q$，因为股指收益率为q。对于货币而言，持有成本为$r-r_f$；对于提供中间收益率q及储存成本率为u的资产而言，持有成本为$r-q+u$，等等。

定义持有成本为c。对于投资资产，期货价格满足

$$F_0 = S_0 e^{cT} \tag{5-18}$$

对于消费资产，期货价格满足

$$F_0 = S_0 e^{(c-y)T} \tag{5-19}$$

式中，y 为便利收益率。

5.13 交割选择

远期合约通常约定合约交割日为将来的某一天，期货合约通常允许合约的短头寸方在将来某一特定时间段中的任意时间进行交割(一般来讲，短头寸方应提前几天发出打算交割的通知)。这种选择权使得期货定价更加复杂。期货合约的到期日为交割期的开始、中间还是末尾呢？虽然大多数期货合约在到期前会被平仓，但是了解交割的发生时间对计算期货的理论价值仍十分重要。

如果期货价格是期货期限的递增函数，由式(5-19)得出 $c>y$，持有资产所带来的收益率(包括便利收益与储存费用的差)小于无风险利率。因此短头寸方越早交割资产会越有利，因为此时收到资金所得的利息超出了持有资产所带来的好处。作为一般规则，在这种情况下期货价格的计算应以交割期的开始为基准。如果期货价格随期限的增加而有所减少($c<y$)，这时采取的标准就会相反，即短头寸方交割越晚越有利。作为一般规则，期货定价应以这一假设为基准。

5.14 期货价格与预期即期价格

我们将市场对于在将来某时刻资产的即期价格的一般观点称为资产在这一时刻的**预期即期价格**(expected spot price)。假定现在是6月份，9月份的期货价格为350美分。这时我们会有兴趣问：9月份的预期未来即期价格为多少？这一价格是等于350美分，高于350美分，还是低于350美元呢？如图2-1所示，期货价格在到期时会收敛到即期价格。如果预期即期价格小于350美元，市场预料9月份的期货价格将会下跌，因此期货短头寸的交易员会有盈利，而期货长头寸的交易员会有亏损。如果预期即期价格大于350美元，这时情况会相反，市场预料9月份期货价格会上升，因此期货长头寸的交易员会有盈利，而期货短头寸的交易员会有亏损。

5.14.1 凯恩斯和希克斯

经济学家约翰·梅纳德·凯恩斯及约翰·希克斯提出，如果对冲者倾向于持有短头寸而投机者倾向于持有长头寸，那么资产期货价格会低于预期未来即期价格。[⊖]这是因为投机者因承担风险而会索取收益，只在平均看来会产生盈利时才会进行交易。对冲者平均来讲会有损失，因为期货可以减少风险，所以对冲者更容易接受这个事实。凯恩斯和希克斯指出，如果对冲者倾向于持有长头寸而投机者倾向于持有短头寸，可以采用类似的原因说明期货价格会高于预期即期未来价格。

5.14.2 风险与收益

解释期货价格与预期即期价格关系的现代学说是以经济中风险与预期收益的关系为基础的。一般来讲，一项投资的风险越大，投资者所要求的期望收益也越高。本书附录3A 定义了生活中的两种风险：系统风险及非系统风险。对投资者而言，非系统风险并不重要，这类风险可以被持有高度分散化的组合来消除。投资者承担非系统风险不应该索取更高的收益。同非系统风险相反，系统风险不能通过分散化来消除，系统风险是由投资收益与整个市场的相关性来决定的。投资者一般对所承担的正的系统风险会要求高于无风险利率的收益。同时，如果投资者承担的系统风险为负，他会接受低于无风险利率的收益。

⊖ 见 J. M. Keynes, *A Treatise on Money*. London: Macmillan, 1930；及 J. R. Hicks, *Value and Capital*. Oxford: Clarendon Press, 1939。

5.14.3 期货头寸的风险

我们考虑一个投机者，他进入期货合约的长头寸，期货合约期限为 T 年，该投机者希望在期货到期时，即期价格高于期货价格。我们忽略期货每天结算的特性，将这一期货合约与远期合约同等对待，假定投机者将数量等于期货价格贴现值的资金进行无风险投资，并同时进入一个期货的长头寸。无风险投资在期货交割日可用于购买资产。投机者买入资产后，马上将资产在市场上变卖。对于投机者而言，其现金流为：

今天：$-F_0e^{-rT}$

期货结束时：$+S_T$

式中，F_0 为期货的当前价格，S_T 为到期日(即时刻 T)的资产价格，r 为期限为 T 的无风险投资的收益率。

对于这一投资如何定价呢？我们用于对时刻 T 的预期现金流的贴现率等于投资者所要求的投资收益率。假定 k 为投资者对于这一投资所要求的投资收益率，投资的贴现值为

$$-F_0e^{-rT}+E(S_T)e^{-kT}$$

式中，E 代表期望值。假定证券市场上所有投资定价都使得其净贴现值为0，这意味着

$$-F_0e^{-rT}+E(S_T)e^{-kT}=0$$

即

$$F_0=E(S_T)e^{(r-k)T} \tag{5-20}$$

正如前面指出的那样，投资者从某项投资中所得的收益与系统风险有关。事实上，我们这里考虑的投资是对期货标的资产的投资。如果这项资产的投资收益与股票市场无关，那么正确的贴现率应该为无风险利率，因此我们应该将 k 设定为 r，式(5-20)变为

$$F_0=E(S_T)$$

这一关系式说明：在标的资产的收益与股票市场无关时，期货价格是对将来预期即期价格的无偏估计。

如果一项资产价格与股票市场有正相关性，由 $k>r$ 及式(5-20)得出，$F_0<E(S_T)$。这一关系式说明，当期货标的资产具有系统风险时，我们应该期望期货价格会低估将来预期即期价格。具有系统风险的资产的一个实例为股指。投资者对股指所期望的收益率要大于无风险利率。假定股指的收益率为 q，股指的预期增长应大于 $r-q$。因此，式(5-8)与股指期货价格会低估将来预期即期价格这一结论具有一致性。

如果资产收益与股票市场有负相关性，由 $k<r$ 及式(5-20)得出 $F_0>E(S_T)$。这一关系式说明：当期货标的资产存在负的系统风险时，我们应该期望期货价格会高估将来预期即期价格。

表5-5总结了以上结果。

表5-5 期货价格与预期未来即期价格之间的关系

标的资产	资产收益率期望 k 与无风险利率 r 之间的关系	期货价格 k 与预期未来即期价格 $E(S_T)$ 之间的关系
无系统风险	$k=r$	$F_0=E(S_T)$
正系统风险	$k>r$	$F_0<E(S_T)$
负系统风险	$k<r$	$F_0>E(S_T)$

5.14.4 正常期货溢价和期货倒价

当期货价格低于将来预期即期价格时，这一情形叫**正常期货溢价**(normal backwardation)；当期货价格高于预期未来即期价格时，这一情形叫**期货倒价**(contango)[⊖]。但是，需要注意这些名词有时是指期货价格低于或高于当前即期价格，而不是预期未来即期价格。

⊖ 在我们以前翻译的约翰·赫尔的书中，normal backwardation 和 contango 曾被分别翻译为远期贴水和远期升水，但我们认为翻译成正常期货溢价和期货倒价更为确切。——译者注

小 结

在大多数情况下，具有某个确定交割日期的期货合约可以被看做具有相同交割日期的远期合约。理论上可以证明，当利率在完全可以预测的情况下，两种合约价格应完全一致。

为了理解期货(或远期)的价格，将期货合约分成两类会带来许多便利。一种合约的标的资产被众多投资者拥有，另外一类合约的标的资产主要是为了消费。

对于投资资产，我们主要考虑3种不同情形。

- 资产不提供收入；
- 资产提供已知的现金收入；
- 资产提供已知的收益率。

结果如表5-6所示。由此我们可以得出股票、货币、黄金和白银的期货价格。存储费用可以看做负收入。

表5-6 投资资产的期货/远期合约价格总结

资 产	远期/期货价格	执行价格为K的远期合约长头寸的价值
不提供中间收入	S_0e^{rT}	S_0-Ke^{-rT}
提供中间收入，其贴现值为I	$(S_0-I)e^{rT}$	S_0-I-Ke^{-rT}
提供连续收益率q	$S_0e^{(r-q)T}$	$S_0e^{-qT}-Ke^{-rT}$

注：资产价格为S_0，期限为T，无风险利率为r。

对于消费资产，我们不可能将期货价格表达为即期价格和其他市场可观察变量的函数。这时，所谓的资产便利收益参数变得十分重要，这一参数是用于衡量商品的用户拥有实际资产比仅持有期货合约而带来额外好处的程度。这些好处包括从本地的商品暂时性短缺中获利，以及为了保持生产线正常运作的能力，等等。我们可以从套利理论中得出消费性资产的期货价格的上限。

持有成本这一概念有时很有用。持有成本等于标的资产存储成本加上融资成本再减去资本收益。对于消费资产，远期价格大于即期价格的数量反映了持有成本与便利收益的差。

如果资本资产定价模型成立，期货价格与未来即期价格之间的关系取决于即期价格与市场股票的总体价格水平是具有正的相关性还是具有负的相关性。正相关性会使得期货价格低于将来预期即期价格。负相关性会使得期货价格高于将来预期即期价格。只有在相关性为0时，理论期货价格等于预期即期价格。

推荐阅读

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross. "The Relation between Forward Prices and Futures Prices," *Journal of Financial Economics*, 9 (December 1981): 321–46.

Ghon, R.S. and R.P. Chang. "Intra-day Arbitrage in Foreign Exchange and Eurocurrency Markets," *Journal of Finance*, 47, 1 (1992): 363–380.

Jarrow, R.A., and G.S. Oldfield. "Forward Contracts and Futures Contracts," *Journal of Financial Economics*, 9 (December 1981): 373–82.

Kane, E.J. "Market Incompleteness and Divergences between Forward and Futures Interest Rates," *Journal of Finance*, 35 (May 1980): 221–34.

Pindyck, R.S. "Inventories and the Short-Run Dynamics of Commodity Prices," *Rand Journal of Economics*, 25, 1 (1994): 141–159.

Richard, S., and S. Sundaresan. "A Continuous-Time Model of Forward and Futures Prices in a Multigood Economy," *Journal of Financial Economics*, 9 (December 1981): 347–72.

Routledge, B. R., D. J. Seppi, and C. S. Spatt. "Equilibrium Forward Curves for Commodities," *Journal of Finance*, 55, 3 (2000) 1297–1338.

练习题

5.1 当一位投资者卖空一只股票时，会有什么情况发生？

5.2 远期价格与远期合约价值有什么不同？

5.3 假定你签署了一个对于无股息股票的6个

月期限的远期合约，股票当前价格为 30 美元，无风险利率为 12%（连续复利），合约远期价格为多少？

5.4　一个股指的当前价格为 350 美元，无风险利率为每年 8%（连续复利），股指的股息收益率为每年 4%。4 个月期的期货价格为多少？

5.5　仔细解释为什么黄金的期货价格可以由黄金的即期价格与其他可观测变量计算得出，但铜的期货价格却不能这么做？

5.6　仔细解释便利收益与持有成本两个术语的含义。期货价格、即期价格、便利收益与持有成本的关系式是什么？

5.7　解释为什么可以将外币视为提供已知收益率的资产？

5.8　一个股指的期货价格是高于还是低于其将来预期价格，为什么？

5.9　在签署一个 1 年期的，对于无股息股票的远期合约时，其股票当前价格为 40 美元，连续复利的无风险利率为每年 10%。

(a) 远期合约的初始价格和期货价格分别为多少？

(b) 6 个月后，股票价格变为 45 美元，无风险利率仍为每年 10%。这时远期价格和远期合约的价值又分别为多少？

5.10　无风险利率为每年 7%（连续复利），股指的股息收益率为每年 3.2%，股指的当前价格为 150。6 个月期的期货价格为多少？

5.11　假定无风险利率为每年 9%（连续复利），股指股息的收益率在一年内经常发生变化。在 2 月份、5 月份、8 月份和 11 月份，股息收益率为每年 5%，在其他月份，股息收益率为每年 2%。假定股指在 7 月 15 日为 1 300，那么同一年 12 月 15 日交割的期货价格为多少？

5.12　假定无风险利率为每年 10%（连续复利），股指股息收益率为每年 4%。股指的当前价格为 400，在 4 个月支付的期货价格为 405 美元。这时存在什么样的套利机会？

5.13　由表 5-4 中的数据来估算 2010 年 5 月 26 日墨西哥和美国短期利率的差异？

5.14　瑞士和美国的连续复利的两个月期限的利率分别为每年 2% 和每年 5%。瑞士法郎的即期价格为 0.8 美元。在 2 个月后交割的期货价格为 0.81 美元，这时存在什么样的套利机会？

5.15　白银的现价为每盎司 9 美元，每年储存费用为每盎司 0.24 美元，储存费要每季度预先支付一次。假定所有期限的利率均为每年 10%（连续复利），计算 9 个月后到期的期货价格。

5.16　假定 F_1 和 F_2 是对于同一种商品的两份期货合约，合约的到期日分别为 t_1 和 t_2，这里 $t_2 > t_1$，求证

$$F_2 \leqslant F_1 e^{r(t_2 - t_1)}$$

其中 r 为无风险利率（假定为常数），假定无储存费用。对于这一问题，假定期货价格与远期价格相等。

5.17　当一家公司采用远期合约对将来已知的外汇现金流进行对冲时，就不存在汇率风险。而当采用期货合约来对冲外币时，按市场定价的方式会使得公司有一定的风险暴露。解释这种风险的实质。尤其当出现以下 4 种情况时，公司使用期货合约和远期合约哪种形式更好？

(a) 在合约的期限内，外汇迅速贬值。

(b) 在合约的期限内，外汇迅速升值。

(c) 外汇先升值，然后贬值到其初始水平。

(d) 外汇先贬值，然后升值到其初始水平。

在分析中，假设远期价格等于期货价格。

5.18　有人认为远期汇率是未来即期汇率的无偏估计。在什么情况下这一说法成立？

5.19　证明股指期货的增长率等于股指超出无风险利率的数量。假定无风险利率和收益率均为常数。

5.20　通过考虑一个投资资产与其期货的组合来证明式(5-3)成立。在证明中假设所有资产的收入均再投资于资产中。采用本章中的关于证明式(5-1)和式(5-2)的页下注来详细说明，当式(5-3)不成立时，套利者会怎么做？

5.21　仔细解释对于某一时间段商品的预期价格的含义。假定随着期限的增大，原油期货

价格以2%的比率下跌，假定投机者倾向于卖空原油期货并且对冲者倾向持有原油期货的长头寸。由凯恩斯和希克斯的理论所隐含的将来预期价格会怎么样？

5.22 价值线指数(Value Line Index)是用于反映1 600只股票价值变化的等权重指数。在1988年3月9日以前，这一指数每天的价值变化是按照指数所包含的股票价格的几何平均值来计算的。在这种情况下，式(5-8)是否真正地反映了指数的期货价格与其即期现金价格的关系。如果没有，这一表达式是会低估还是会高估其期货价值？

5.23 一家美国公司想采用CME的期货合约来对冲其澳元的风险暴露。假定美国和澳大利亚的无风险利率分别为r和r_f(对应于任何期限)，假定r和r_f为常数，公司采用在T到期的合约来对冲时间$t(T>t)$的风险暴露，求证

(a) 最佳对冲比率为$e^{(r_f-r)(T-t)}$。

(b) 当t等于1天时，最佳对冲比率近似等于S_0/F_0，其中S_0为澳元的现期价格，F_0为澳元在T时刻到期的期货价格。

(c) 对于长于一天的风险暴露，公司可以使得对冲比率等于即期价格与期货价格的比，从而应对期货的每日结算问题。

作业题

5.24 指数为1 200，3个月的无风险利率为每年3%，接下来的3个月的股息收益率为每年1.2%；6个月的无风险利率为每年3.5%，接下来的6个月的股息收益率为每年1%。估计3个月期和6个月期的指数期货价格。假定所有利率和收益率均为连续复利。

5.25 当前的美元/欧元的汇率为每欧元1.400美元，6个月期的远期汇率为1.395 0，6个月的美元利率为每年1%(连续复利)。估计6个月的欧元利率。

5.26 原油现货价格为每桶80美元，存储一年的费用为每桶3美元，年底支付；无风险利率为每年5%，连续复利。一年期原油期货价格的上限是多少？

5.27 一只股票预计在2个月和5个月时将支付1美元股息。股票价格为50美元，对于所有期限的连续复利的无风险利率为每年8%。某投资者刚刚进入这只股票6个月期限的远期合约的短头寸，请问

(a) 远期价格与远期合约初始价值为多少？

(b) 3个月后，股票价格变为48美元，无风险利率仍为每年8%。这时远期价格和远期合约的短头寸的价值为多少？

5.28 一家银行向其企业客户提供以11%利率借入现金，或以2%利率借入黄金的选择(当借入黄金时，必须支付利息，因此，如果今天借入100盎司，在一年后必须偿还102盎司黄金)。无风险利率为每年9.25%，储存费用为每年0.5%。讨论，同现金贷款利率进行比较，借入黄金的利率是太高还是太低。这里的利率均为每半年复利一次，无风险利率和储存费用率均为连续复利。

5.29 一家公司不太确定将来收入或支出某笔外汇的期限，它可以同银行商定某远期合约，在远期合约中注明交割的一个时间区段。因此公司想保留选择交割时间的权利以保证与自身现金流的吻合。假定你处在银行的位置，你会如何对这家公司需要的产品定价？

5.30 一个交易员的长期投资资产组合中包含黄金。交易员能够以每盎司1 250美元买入黄金并以每盎司1 249美元卖出黄金。交易员能够以每年6%借入资金，并以每年5.5%借出资金(这里的利率均为每年复利)。期货价格在什么范围时，交易员没有套利机会，这里假定远期价格买入卖出价相同。

5.31 一家公司与银行进行一个远期合约交易。在合约中银行可以在T_1时刻以汇率K_1卖出外汇。在T_1时实际汇率为$S_1(>K_1)$。公司要求银行将远期合约顺延到$T_2(>T_1)$而不是在T_1进行交割。银行同意了一个新的交付价格K_2，解释K_2的计算方法。



第6章

利率期货

到目前为止，我们已经讨论了商品、股指以及外汇的期货合约，并且阐述了这些合约的运作机制、对冲方式以及确定期货价格的方法。接下来将讨论利率期货合约。

本章将讨论在美国市场上流行的国债期货合约和欧洲美元期货合约。世界上许多其他利率期货合约产品均以这些合约为基准。同时我们也将说明如何将期货合约与第4章引入的久期测度并用来对冲一个公司的利率风险暴露。

6.1 天数计算和报价惯例

这里我们将考虑天数计算和报价惯例等预备知识，这些知识适用于债券和其他与利率有关的证券产品。

6.1.1 天数计算

天数计算定义了在一段时间内利息累计的方式。一般来讲，我们知道在一段参考区间内的利息(例如，介于息票支付时间间隔内的利息)，这里我们只介绍对于某个其他时间期限内的利息累计方式。

天数计算的惯例一般被表达为 X/Y。当我们计算两个日期之间的利息时，X 定义了两个日期之间计算天数的方式，Y 定义了参考期限内总天数的计算方式。在两个日期之间的利息为

(两个日期之间的天数/参考期限的总天数)×参考期限内所得利息

在美国有3种流行的天数计量惯例。

- 实际天数/实际天数(actual/actual)；
- 30/360；
- 实际天数/360。

美国长期国债采用“实际天数/实际天数(期限内)”的计算天数方式，这说明在两个日期之间的利息是基于实际过去的天数与两个息票支付日期之间的实际天数的比率。假定一个债券的本金为100美元，息票支付日期为3月1日和9月1日，息票率为8%，我们想要计算3月1日与7月3日之间的利息。这里参考区间为3月1日至9月1日，这个期间总共有184天(实际天数)，这个区间所得利息为4美元。在3月1日与7月3日之间总共有124天(实际天数)。因此3月1日与7月3日之间的所得利息为

$$\frac{124}{184}\times 4 = 2.6957$$

美国企业债券和市政债券中采用“30/360”的天数计算惯例。这说明我们在计算中假定每个月有30

天，每年有360天。采用"30/360"的惯例，在3月1日与9月1日之间总共有180天。在3月1日与7月3日之间总共有$4\times30+2=122$天。因此，对于一个与我们刚才考虑的政府债券一样期限和利率的企业债券，在3月1日与7月3日之间的所得利息为

$$\frac{122}{180}\times4=2.7111$$

如业界事例6-1所示，有时"30/360"天数计算约定会产生令人吃惊的结果。

业界事例6-1　天数计算有时可能会使人迷惑

在2013年2月28日与3月1日之间，你可以选择一个美国国债或一个美国企业债券，两债券的息票率均为10%。两者之间你应选择哪一个呢？

乍听起来，两者应该没有太大的区别。但事实上你应选择企业债券。在"30/360"天数计算约定下，2009年2月28日与2009年3月1日之间总共有3天。在政府债券的"实际天数/实际天数（期限内）"的天数计算约定下，两个日期之间只有1天。拥有企业债券你所得利息约是拥有政府债券所得利息的3倍。

美国的货币市场产品采用"实际天数/360"的天数计算惯例。这说明参考期限选定为360天，在一年中的一段时间内所得利息等于实际过去的天数除以360，然后再乘以报价利率。90天期间所得的利息应正好等于年率的1/4。注意，含有365天的整年所得的利息为365/360乘以报价利率。

国与国之间以及产品与产品之间的天数计量惯例有所不同。例如，澳大利亚、加拿大以及新西兰的货币市场惯例为"实际天数/365"。除英镑外所有货币的LIBOR利率均为"实际天数/360"，英镑的LIBOR利率为"实际天数/365"。欧元债券通常采用"实际天数/实际天数"惯例。

6.1.2 美元短期债券的报价

货币市场的产品报价有时采用贴现率（discount rate）方式，该贴现率对应于所得利息作为最终面值的百分比而不是最初所付出价格的百分比。美国的短期国债就是一个例子。如果一个91天期限的短期国债的报价为8，这意味着，每360天所得利息为面值的8%。假定面值为100美元，在91天内的利息为2.0222美元（$=100\times0.08\times91/360$）。对应于91天的真正的收益率为$2.0222/(100-2.0222)=2.064\%$。一般来讲，美国的短期国债的现金价格与报价的关系式为

$$P=\frac{360}{n}(100-Y)$$

式中，P为报价，Y为现金价格，n为短期债券以日历天数所计量的剩余天数。

6.1.3 美国长期国债

美国长期国债是以美元和美元的1/32为单位报出的。所报价格是相对于面值100美元的债券。因此，95-05的价格意味着100 000美元面值的债券的价格为90 156.25美元。

这里的报价被交易员称为**纯净价**（clean price），它与现金价有所不同，交易员将现金价称为**带息价格**（dirty price）。一般来讲，我们有以下关系式

现金价格 = 报价（即纯净价）+ 从上一个付息日以来的累计利息

为了说明这一公式，假设现在时间是2010年3月5日，所考虑的债券具有息票率11%，到期日为2018年7月10日，报价为95-16，即95.50美元。因为政府债券的券息每半年支付一次（最后一个券息支付日期为债券的到期日）。最近的前一次付息日为2010年1月10日，下一个付

息日为2010年7月10日。在2010年1月10日与2010年3月5日之间总共有54天，而在2010年1月10日与2010年7月10日之间总共有181天。一个面值为100美元的债券在1月10日和7月10日所支付的券息均为5.50美元。2010年3月5日的累计利息是在7月10日所支付的利息累计到2010年3月5日时的数量。因为美国国债累计利息是基于"实际天数/实际天数(期限内)"，因此累计利息为

$$\frac{54}{181} \times 5.50 = 1.64 \text{ 美元}$$

在2018年7月10日到期100美元面值债券的现金价格为

$$95.5 + 1.64 = 97.14 \text{ 美元}$$

因此，对应100 000美元面值债券的现金价格为97 140美元。

6.2 美国国债期货

表6-1是2010年5月26日利率期货的报价。市场上最流行的长期利率合约之一是CME集团交易的长期国债利率期货。在这个合约中，任何在交割月份的第1天，期限仍在15年以上且从那一天起的15年内不能赎回(not callable)的债券均可以用于交割。在6.3节我们将要解释，交易所已经开发出了一种调整价格的方法。这种方法适用于调整期货的短头寸方交割特定长期国债时可接受的价格。

10年、5年和2年美国中期国债期货合约同样非常流行。在10年期中期国债期货合约中，任何尚有6.5~10年期限的长期(或中期)国债均可以用于交割。对于5年期中期国债期货合约，用于交割的债券必须仍具有4.167~5.25年之间的期限。而对于2年期的合约，剩余期限必须在1.75与5.25年之间，本节后面主要讨论长期国债期货合约。美国中期国债合约和世界上其他地方的期货合约与美国长期国债期货相似，因此这里的许多结论在处理美国长期国债时仍成立。

表6-1 交易所给出的2010年5月26日的利率期货报价

	开盘价	最高价	最低价	结算价格	变化量	成交量	未平仓数量
长期国债 $100 000(CME Group)							
2010年6月	125-000	125-090	123-280	124-150	-25.0	691 927	462 946
2010年9月	124-170	124-290	123-130	124-010	-28.0	240 475	294 151
10年中期国债 $100 000(CME Group)							
2010年6月	121-180	121-230	120-245	121-050	-16.5	2 139 365	1 085 236
2010年9月	120-230	120-295	119-300	120-105	-18.0	657 677	754 551
5年中期国债 $100 000(CME Group)							
2010年6月	117-260	117-287	117-082	117-157	-12.0	1 008 580	710 630
2010年9月	116-312	117-035	116-140	116-217	-12.5	360 038	353 682
2年中期国债 $100 000(CME Group)							
2010年6月	109-102	109-110	109-050	109-080	-2.5	595 833	642 470
2010年9月	109-002	109-010	108-272	108-302	-2.7	282 058	343 447
30日联邦基金利率 $5 000 000(CME Group)							
2010年5月	99.795 0	99.797 5	99.792 5	99.792 5	0.000 0	2 440	63 402
2010年11月	99.715 0	99.725 0	99.700 0	99.715 0	0.000 0	8 440	83 036
欧洲美元 $1 000 000(CME Group)							
2010年6月	99.340 0	99.340 0	99.305 0	99.310 0	0.042 5	370 183	1 110 424
2010年9月	99.115 0	99.115 0	99.050 0	99.050 0	0.025 0	693 097	1 107 562
2010年12月	98.970 0	98.970 0	98.895 0	98.895 0	-0.005 0	500 388	1 065 630
2011年12月	98.220 0	98.225 0	98.175 0	98.205 0	-0.045 0	222 979	530 952
2012年12月	97.295 0	97.335 0	97.275 0	97.335 0	-0.065 0	61 428	141 428
2015年12月	95.510 0	95.580 0	95.510 0	95.580 0	-0.040 0	1 403	10 380

6.2.1 报价

长期国债和中期国债期货合约均是以美元和美元的1/32为单位报出的，这与长期和中期国债在即期市场的报价方式类似。在表6-1中，2010年6月的债券期货结算价格为124～150，即$124\frac{15.0}{32}$，等于125.468 75；2010年9月10年期债券期货的结算价格为120～105，即$120\frac{10.5}{32}$，等于120.328 125；2010年6月5年债券期货的结算价格为117～157，即$117\frac{15.75}{32}$，等于117.492 188；最后，2010年9月2年债券期货的结算价格为108～302，即$108\frac{30.25}{32}$，等于108.945 313。

6.2.2 转换因子

如上所述，长期国债期货允许合约的短头寸方选择交割任何期限长于15年并且在15年内不可赎回的债券。当交割某一特定债券时，一个名为**转换因子**(conversion factor)的参数定义了短头寸方的债券交割价格。债券的报价等于转换因子与最新期货报价的乘积。如6.1节所述，将应计利息考虑在内，对应于交割100美元面值的债券所收入的现金价格为

$$(\text{最新的期货报价} \times \text{转换因子}) + \text{应计利息}$$

每一个合约对应于交割100 000美元面值的债券。假定最新的交割价格为90－00，交割债券的转换因子为1.38，并且在交割时面值为100美元的债券的应计利息为3美元。因此，期货短头寸方交割债券时，对于每一面值为100美元的债券，收到的现金为(由期货长头寸方支付)

$$(1.38 \times 90.00) + 3 = 127.20 \text{ 美元}$$

期货短头寸方应交割的债券面值为100 000美元，因此收到现金为127 200美元。

债券的转换因子是这样确定的：假定所有期限的利率均为年率6%(每半年复利一次)，某债券的转换因子被定义为在交割月份的第1天具有一元本金的债券的价格。为了便于计算，债券的期限及券息支付日的时间均下调到3个月的整数倍。这种做法使交易所产生了一个较为全面的数表。如果在取整后，债券的期限为6个月的整数倍，那我们假定第1次支付利息为6个月后。如果在取整后，债券的期限不是6个月的整数倍(即包含另外的3个月)，我们假定第1次支付利息为3个月后，支付利息数量中应剔除应计利息。

作为以上规则的第1个实例，假定某债券的息票率为年率10%，期限为20年零2个月。为了计算转换因子，假定债券期限为20年，在6个月后第1次付息。因此息票被假定为每6个月支付一次，直到20年后支付本金为止。假定面值为100美元。当贴现率为年率6%(每半年复利一次)，即每6个月为3%，债券价格为

$$\sum_{i=1}^{40} \frac{5}{1.03^i} + \frac{100}{1.03^{40}} = 146.23 \text{ 美元}$$

将以上价格除以100，得出转换因子为1.462 3。

作为以上规则的第2个实例，假定某债券的息票率为8%，债券期限为18年零4个月。为了计算转换因子，假定债券的期限为18年零3个月。将所有息票支付的现金流以年率(半年复利一次)贴现到3个月后的时间上，债券价格为

$$4 + \sum_{i=1}^{36} \frac{4}{1.03^i} + \frac{100}{1.03^{36}} = 125.83 \text{ 美元}$$

3个月的利率为$\sqrt{1.03}-1$，即1.4889%。因此将3个月时的债券价格贴现到今天得出价值为125.83/1.014 889＝123.99美元。减去应计利息2.0，得出债券价值为121.99美元。因此转换因

子为1.2199。

6.2.3 最便宜交割债券

在交割月份的任意时刻，有许多债券可以用于长期国债期货合约的交割，这些可交割债券有各式各样的息票率与期限。短头寸方从这些债券中可以选出**最便宜交割债券**(cheapest-to-deliver bond)用于交割。因为短头寸方收到的现金量为

(最新成交价格×转换因子)+应计利息

买入债券费用为

债券报价+应计利息

因此最便宜交割债券是使得

债券报价-(期货的最新报价×转换因子)

达到最小的债券。一旦期货的短头寸方决定交割债券，最便宜交割债券可以通过对每一个债券进行计算来确定。

【例6-1】 期货短头寸方决定交割，可以从以下表中选出最便宜交割债券。假定最近一次的期货报价为93-08，即93.25美元。

债券	债券报价(美元)	转换因子
1	99.50	1.0382
2	143.50	1.5188
3	119.75	1.2615

交割每种债券的成本如下：

债券1：99.50-(93.25×1.0382)=2.69美元

债券2：143.50-(93.25×1.5188)=1.87美元

债券3：119.75-(93.25×1.2615)=2.12美元

因此，最便宜交割债券为债券2。

有许多因素决定最便宜交割债券。当收益率大于6%时，转换因子系统倾向于券息率较低同时期限较长的债券。当收益率小于6%时，系统倾向于券息率较高同时期限较短的债券。还有，当收益率曲线为上坡型时，系统倾向于交割期限较长的债券；当收益率曲线为下坡型时，系统倾向于期限较短的债券。

除了拥有交割最便宜可交割债券的权利外，短头寸方还拥有一项被称为万能牌规则的权利。这一权利在业界事例6-2中有所描述。

业界事例6-2 万能牌规则

CBOT的长期国债交易于芝加哥当地时间下午2点结束。但是，长期国债的即期交易要进行到下午4点才结束。另外拥有期货短头寸方的交易员在晚上8点以前都可以向结算中心下达交割意向通知。在下达交割通知后，**交割应付价格**(invoice price)是以当天的成交价格为基础来结算的，该成交价格为下午2点封仓铃之前刚刚进行的交易价格。

这种做法给了期货的短头寸方一种叫做**万能牌规则**(wild card play)的选择权。如果在交割月的第1天的下午2点后债券价格下跌，短头寸方在3点45分发出交割意向通知，然后可以买入债券并由下午2点的期货价格为准来进行交割。如果债券价格没有下跌，短头寸方可以保持头寸，并等到第2天采用相同的策略。

就像短头寸方拥有其他选择权一样，万能牌选择权并不是免费的。它的价值反映在其期货价格中，有选择权的期货价格比不具备选择权的期货价格要低。

6.2.4　确定期货价格

由于短头寸方既拥有选择交割时间的权利，也有选择所交割债券的权利，因此精确地确定长期国债期货的理论价格是十分困难的。但是如果假定最便宜可交割债券及交割日期均为已知，长期国债期货就等价于一个为持有人提供中间收入的证券上的期货合约⊖。式(5-2)给出了期货价格 F_0 与即期价格 S_0 的关系式

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT} \tag{6-1}$$

式中，I 为期货期限内券息的贴现值，T 为期货到期时间，r 为适用于期限 T 的无风险利率。

【例6-2】　假定对于某一国债期货已知最便宜交割债券的息票利率为12%，转换因子为1.6。假定期货交割日期为270天以后。券息的支付为每半年一次。由图6-1所示，上一次券息支付为60天以前，下一次券息支付为122天以后，再下一次券息支付为305天以后。利率期限结构为水平，利率为年率10%(连续复利)。



图6-1　例6-2中的时间表

假定债券的当前报价为115美元。债券的现金价格等于报价加上从上一次付息至今的应计利息，债券现金价为

$$115 + \frac{60}{60+122} \times 6 = 116.978$$

在122天(0.3342年)后，债券持有者将收到6美元的利息，该利息的贴现值为

$$6e^{-0.1 \times 0.3342} = 5.803$$

期货合约将持续270天(0.7397年)。如果期货合约是关于券息率为12%的债券，期货的现金价格为

$$(116.978 - 5.803)e^{0.1 \times 0.7397} = 119.711$$

在债券交割时，会产生148天的应计利息。如果期货合约是有关于券息率为12%的债券，期货的报价为

$$119.711 - 6 \times \frac{148}{148+35} = 114.859$$

由转换因子定义得出，1.6倍的标准债券等价于一个12%的债券。因此，期货的报价应为

$$\frac{114.859}{1.6} = 71.79$$

6.3　欧洲美元期货

美国市场最流行的利率期货是CME集团交易的3个月期的欧洲美元期货。欧洲美元是存放于美国本土之外的美国银行或外国银行的美元。欧洲美元利率是银行之间存放欧洲美元的利率，这一利率与第4章引入的伦敦银行同业拆出利率(LIBOR)基本上是一样的。

3个月期欧洲美元期货是对于3个月(90天)欧洲美元利率而设定的期货产品。这些合约可使得投资者锁定在今后某3个月内对应于借入100万美元面值的利率，这使得交易员可以对未来3

⊖　在实际中，为了确定最便宜可交割的计算，分析员通常假设在期货到期时的零息利率等于今天的远期利率。

个月的利率进行投机或者对冲未来利率的风险。这些合约的交割月份为3月、6月、9月以及12月，期货的期限可长达10年。这意味着在2010年某投资者可采用欧洲美元期货来锁定远至2020年之前某3个月的利率。除了3月、6月、9月以及12月的期货外，市场上也交易其他短期限的利率期货合约。

为了理解欧洲美元期货的运作方式，我们考虑表6-1中2010年6月份的合约。这一合约的成交价格为99.3100。该合约的到期日为交割月份的第三个星期三，交割月份的第三个星期三为2010年6月16日。这一合约在2010年6月16日之前按通常的方式每天以市值定价。在2010年6月16日这一天，合约成交价格为 $100-R$，其中 R 为这一天的3个月的实际欧洲美元利率，这一利率按每季度复利(天数计算惯例为“实际天数/360”)，因此，如果在2010年6月16日，3个月期限的欧洲美元利率为0.75%(每季度复利)，期货最终的成交价格将为99.2500。一旦最终结算完成，交易就被宣布平仓。

合约的设计使得期货报价一个基点的变化对应于25美元的收益或亏损。当欧洲美元报价增长一个基点时，持有一份合约长头寸的交易员的收益为25美元，而持有一份合约短头寸的交易员损失为25美元。类似地，当报价下跌一个基点时，持有一份合约长头寸的交易员会亏损25美元，而持有一份合约短头寸的交易员会盈利25美元。例如，当交割价格从99.31变为99.27时，长头寸交易员每个合约的损失为 $25\times4=100$ 美元；短头寸交易员每个合约的收益为100美元。当利率变化为一个基点时，面值100万美元在3个月的利息变化为

$$1\,000\,000\times0.000\,1\times0.25=25$$

即25美元。因此，“每个基点25美元”的规则与以上提到的合约是为了锁定面值为100万美元的3个月利率的说法一致。

期货报价为100减去期货利率。因此，在利率下降时，期货长头寸的投资者会有收益；在利率上升时，期货短头寸的投资者会有收益。表6-2展示了表6-1中2010年6月份合约可能出现的一组结果。

期货的价格定义为

$$10\,000[100-0.25(100-Q)] \tag{6-2}$$

式中，Q 为报价。因此，表6-1中2010年6月份合约的结算价格为99.31美元，对应于合约的价格为

$$10\,000[100-0.25(100-99.31)]=998\,275\text{ 美元}$$

在表6-2中，最终合约价格为

$$10\,000[100-0.25(100-99.53)]=998\,825\text{ 美元}$$

最初与最终合约价格之差为550美元，这与表6-2中采用的“每基点变化25美元”规则是一致的。

表6-2 2010年6月欧洲美元期货合约的可能价格

日期	期货价格	变化量	每份合约盈利
2010年5月26日	99.3100		
2010年5月27日	99.2700	-0.0400	-100
2010年5月28日	99.3200	+0.0500	+125
⋮	⋮	⋮	⋮
2010年6月16日	99.5300	+0.0600	+150
总和		+0.2200	+550

【例6-3】 某投资者想锁定在2012年9月19日开始的3个月的利率，投资面值为1亿美元。2012年9月欧洲美元期货报价为96.50，这表明投资者可以锁定的利率为每年3.5%(100－96.5)。投资者买入了100份合约来对冲风险。假设在2012年9月19日，3个月期LIBOR利率为2.6%，最终成交价格为97.40。投资者在长头寸中的收益为 $100\times25\times(9\,740-9\,650)=225\,000$ 美元。在3个月内投资所得利息为

$$100\,000\,000\times0.25\times0.026=650\,000\text{ 美元}$$

期货收益使得总收益变为875000美元，这对应于利率为3.5%时的利息数量(100000000×

$0.25\times0.035=875\,000$)。说明期货交易的效果是将利率锁定在3.5%，即(100－96.5)%。

看起来好像期货交易使得在任何情况下都将利率正好锁定在3.5%上。事实上，对冲是不完美的，因为期货合约每日结算(而不是仅在最后)，而且最后成交是在2012年9月19日，而投资的利率是在3个月后发生的。关于第二点，我们可以用降低对冲的大小来反映在2012年9月19日收到资金与在3个月后收到资金的区别。在这种情况下，我们假设在这3个月内的利率是3.5%，然后将$1/(1+0.035\times0.25)=0.9913$乘以期货合约的数量。结果是需要购买99份合约(而不是100份)。

例6-3说明了一个投资者如何通过运用欧洲美元期货来对冲其在2012年9月19日开始的3个月的利率风险。注意，对冲的现金流时间未必与被对冲的现金流完全匹配，因为期货是每日结算的，而且最后的结算日为2012年9月19日，但是投资的利息收入是在其后的3个月。如例6-3所示，关于以上问题，我们可以对对冲头寸进行一个小调整来予以改进。

表6-1显示了2009年8月4日的美国市场利率曲线结构为上坡型。2010年6月16日开始的3个月的期货利率为0.69%；2010年9月15日开始的3个月的期货利率为0.95%；2010年12月15日开始的3个月的远期利率为1.105%；2015年12月16日开始的3个月的期货利率为4.42%；等等。

与CME集团欧洲美元期货类似，利率期货产品在其他国家也有交易。CME集团也进行欧洲日元(Euroyen)交易。伦敦国际金融期货及期权交易所(该交易所为Euronext的分支机构)进行3个月期的Euribor合约(即对于3个月期欧元的LIBOR利率)以及3个月期欧洲瑞士法郎(Euroswiss)的期货交易。

6.3.1　远期与期货利率的比较

欧洲美元期货与远期利率合约很相似，它们都可以用于锁定将来某个时间段的利率(见4.7节关于远期利率合约的讨论)。对于较短的期限(不长于大约1年)，可以假设欧洲美元期货利率与相应的远期利率相同。对于较长期限的合约，了解它们之间的不同对于我们至关重要。考虑介于时间T_1与T_2的期货利率及相应的远期利率合约。欧洲美元期货合约每天进行结算，最终的交割发生在T_1，交割的数量反映了T_1与T_2之间的利率。比较这两种合约，远期利率合约不是每天结算，最终的交割也反映T_1与T_2之间的利率，远期利率合约的最终付款发生在T_2。[⊖]

有两个因素造成欧洲美元期货与远期利率合约的不同：

- 欧洲美元期货与一个类似但并非每天结算的远期合约有所不同，后一个合约(即远期合约)的收益等于远期合约与T_1时刻实际利率的差。
- 在时间T_1支付的远期合约与在时间T_2支付的远期合约不同。

以上两个因素造成了两种合约之间的差异，这些差异给从业人员带来了一定的困惑。以上两个因素都造成了远期利率比期货利率更低，但对于长期限的合约，以上第2个因素所带来的效果远弱于第1个因素。第1个因素(每日结算)使得远期利率低于期货利率，其原因可由5.8节陈述的理论解释。假定你持有一个合约，这一合约在时间T_1的收益为R_M-R_F，其中R_F为事先约定的介于T_1与T_2之间的利率，R_M为这一时间段的实际利率，假定你可以选择每日结算。这时，每日结算在利率较高时会造成现金流的流入，而在利率较低时会造成现金流的流出。在利率较高时，你可能会选择每日结算，因为这样会造成保证金账户有更多的现金，这时市场对于每天支付所对应的R_F会有一个较高的设定。换言之，从每天结算变为只在时间T_1交

⊖ 如4.7节所述，交割支付也可能发生在T_1，交割数量等于正常的在T_2时的收益的贴现值。

割会减少 R_F 的数量。

为了理解为什么第2个因素会使得远期利率减少，假定收益 $R_M - R_F$ 发生在 T_2 而不是 T_1（就像正常的远期利率合约那样）。如果 R_M 很高，该收益为正。因为利率较高，所以在 T_2 获取收益所付代价比在 T_1 获取收益所付代价要高。如果 R_M 较低，收益为负。因为利率较低，在 T_2 支付收益比在 T_1 支付收益所得好处也相对较低。总而言之，你更希望在 T_1 收到收益。如果交割日在 T_2 而不是在 T_1，你会因 R_F 的降低得到补偿。[㊀]

6.3.2 曲率调节

分析员对于以上两种利率的差别进行**曲率调节**（convexity adjustment）。一种流行的做法是[㊁]

$$\text{远期利率} = \text{期货利率} - \frac{1}{2}\sigma^2 T_1 T_2 \tag{6-3}$$

同上，T_1 为期货合约的期限，T_2 为期货合约标的利率所对应的期限。变量 σ 为一年的短期利率变化的标准差，这里利率均为连续复利[㊂]。

【例6-4】 考虑 $\sigma = 0.012$ 的情形，我们想计算8年期限，期货价格为94所对应的远期利率。这时 $T_1 = 8$，$T_2 = 8.25$，曲率调整为

$$\frac{1}{2} \times 0.012^2 \times 8 \times 8.25 = 0.00475$$

即0.475%（47.5个基点）。天数计量惯例为"实际天数/360"，每季度复利期货利率为每年6%，这对应于每90天的利率为1.5%。对应于"实际天数/365"的天数计量惯例以及每季度复利，以上利率为等价于 $6 \times 365/360 = 6.083\%$。以连续复利为计，以上利率等价于6.038%。因此远期利率为 $6.038 - 0.475 = 5.563\%$（连续复利）。右表显示了随着期限的变化的曲率调整的幅度。

期货的期限（年）	曲率调解量（基点数）
2	3.2
4	12.2
6	27.0
8	47.5
10	73.8

以上结果显示，调节数量大约与期货到期期限的平方成正比。因此，对于4年期限的合约的调节量大约是2年期限的合约调节量的4倍。

6.3.3 利用欧洲美元期货来延长LIBOR零息收益率曲线

期限小于一年的LIBOR零息曲线可由1个月、3个月、6个月以及12个月的LIBOR利率来确定。在经过刚刚描述的曲率调整以后，欧洲美元期货可用于延长曲线的期限。假定第 i 个欧洲美元期货的到期日为 T_i（$i = 1, 2, \cdots$）。通常假定第 i 个远期期货得出的远期利率正好适用于区间 T_i 与 T_{i+1}（在实际中基本上是这样的），这使得我们可以采用票息剥离法来计算零息利率。假定 F_i 是由第 i 个期货所得出的远期利率，R_i 是期限为 T_i 的零息利率。由式(4-5)，我们有

$$F_i = \frac{R_{i+1}T_{i+1} - R_iT_i}{T_{i+1} - T_i}$$

因此

$$R_{i+1} = \frac{F_i(T_{i+1} - T_i) + R_iT_i}{T_{i+1}} \tag{6-4}$$

㊀ 在第29章我们将进一步考虑由于时间的区别对衍生产品价格的影响。

㊁ 该式的证明见作者的网页上的技术报告（Technical Note 1）。

㊂ 这一公式是基于第20章将要讨论的Ho-Lee利率模型。见T. S. Y. Ho and S. -B. Lee, "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims", *Journal of Finance*, 41(December 1986), 1011-29。

其他欧洲利率，如欧洲瑞士法郎、欧洲日元以及 Euribor 的使用与此类似。

【例6-5】 400 天期限的 LIBOR 零息利率为 4.80%(连续复利)，由欧洲美元期货报价得出的(a)在 400 天开始的 90 天远期利率为 5.30%(连续复利)，(b)从 491 天开始的 90 天远期利率是 5.51%(连续复利)，(c)从 589 天开始的 90 天利率是 5.60%(连续复利)。我们可以利用式(6-4)得出第 491 天的零息利率为

$$\frac{0.053 \times 91 + 0.048 \times 400}{491} = 0.04893$$

即 4.893%。类似地，我们可以采用第二个远期利率来取得第 589 天的零息利率

$$\frac{0.055 \times 98 + 0.04893 \times 491}{589} = 0.04994$$

即 4.994%。我们采用下一个远期利率 5.60% 来确定下一个欧洲美元期货到期日的零息利率(注意，尽管欧洲美元期货利率期限为 90 天，假定其覆盖区间为两个相邻的期货的到期日，实际的覆盖区间长度为 91 天和 98 天不等)。

6.4 利用期货基于久期的对冲

我们在 4.8 节中曾讨论了久期。假定我们持有某个与利率有关的资产组合。例如，债券组合或货币市场证券。我们在这里考虑如何利用利率期货来对这个资产组合进行对冲。定义：

V_F——利率期货合约的价格；

D_F——期货标的资产在期货到期日的久期值；

P——被对冲的债券组合在对冲到期日的远期价值。实际中，通常假定该价格等于债券组合的当前价格；

D_P——被对冲的证券组合在对冲到期日时的久期值。

如果我们假定对于所有期限，收益率的变动均为 Δy，即利率曲线的变动为平行移动，那么下式近似成立

$$\Delta P = -PD_P\Delta y$$

下式也近似成立

$$\Delta V_F = -V_FD_F\Delta y$$

因此用于对冲 Δy 变动所需的合约的数量为

$$N^* = \frac{PD_P}{V_FD_F} \tag{6-5}$$

式(6-5)被称为基于**久期的对冲比率**(duration based hedge ratio)，也被称为**价格敏感性对冲比率**(price sensitivity hedge ratio)[⊖]。利用这一关系式，可以使得整体证券头寸的久期变为 0。

当采用国债期货来对冲时，对冲者必须在假设某一特定债券将被交割的前提下计算 D_F。这意味着对冲者在实施对冲时，必须首先估计哪一个债券可能是最便宜的可交割债券。如果利率环境发生变化，以至于其他债券变为最便宜的可交割债券，对冲者必须调节对冲头寸进行调节，因此对冲效果也许比预期的要差。

利用利率期货来对冲时，对冲者应注意利率与期货价格呈相反方向变动。当利率上升时，利率期货价格下降；当利率下降时，利率期货价格上升。因此，在利率下降时会承受损失的公司应进入期货的长头寸。类似地，在利率上升时会承受损失的公司应进入期货的短头寸。

⊖ 有关式(6-5)的细节讨论，见 R. J. Rendleman，"Duration-Based Hedging with Treasury Bond Futures，" *Journal of Fixed Income*，9，1(June 1999)：84-91。

对冲者应选择期货合约以使得标的资产的久期尽量接近被对冲资产的久期。欧洲美元期货常常用于短期利率头寸对冲，而长期国债和中期国债期货常常用于对长期利率头寸对冲。

【例6-6】 假定今天是8月2日。一位基金经理负责管理价值为1 000万美元的政府债券组合，基金经理十分担心今后3个月内利率会剧烈变化，并决定采用12月份的国债期货来对冲债券组合的价格变动。12月份国债期货的报价为93－02，或93.062 5。由于美分合约要交割面值为10万美元的国债，因此合约的价值为93 062.50美元。

假设证券组合在3个月后的久期为6.80年。国债中最便宜的可交割债券预计为20年期，券息率为12%的债券。这一债券当前收益率为每年8.8%，在期货到期时，其久期为9.20年。

基金经理需要进入国债期货的短头寸来对冲其证券组合的价格变动。如果利率上升，期货短头寸会带来收益，同时债券组合会产生损失；如果利率下降，期货短头寸会带来损失，但债券组合会产生收益。基金经理需要卖出债券期货短头寸的数量可由式(6-5)求得，其数量为

$$\frac{10\,000\,000 \times 6.80}{93\,062.50 \times 9.20} = 79.42$$

将以上数字取整，基金经理需要卖出79份合约。

6.5 对于资产与负债组合的对冲

金融机构常常通过确保其资产平均久期等于其债务平均久期来对冲其面临的利率风险(负债可以被认为等同于债券的短头寸)。这种策略被称为**久期匹配**(duration matching)或**证券组合免疫**(portfolio immunization)。在实施这种策略以后，我们可以保证利率的一个微小的平行移动不会对资产与负债组合的价值产生太大的影响，即资产的收益(损失)与负债的损失(收益)相互抵消。

久期匹配不能使得证券组合免疫于收益率曲线的非平行移动，这是该对冲策略的不足之处。在实际中，短期利率的变化幅度较大，并且与长期利率没有完美的相关性，有时短期利率以及长期利率甚至会朝两个相反的方向变动，久期匹配只是进行利率管理的第一步，因此金融机构开发出了其他管理利率风险的方法，见业界事例6-3。

业界事例6-3 银行的资产负债管理

现在银行的资产负债管理委员会谨慎地监测自身的利率风险头寸。管理过程的第一步是保证资产与负债的久期相匹配，但这一措施并不能在收益线非平行移动时为银行提供保护。一种流行的做法是**缺口管理**(GAP management)，这一管理方法将零息收益率曲线切为几段(buckets)。第一段可能是0到第1个月，第二段为第1个月到第3个月，等等。资产负债管理委员会检验当收益率曲线的某一段移动而其他段不动时的情形对资产以及负债价值的影响。

如果有不匹配的情况，银行会采取一定的纠正措施。管理过程会涉及按照4.10节所描述的方式来调整存款利率和贷款利率。另外一些管理办法是利用利率互换、远期利率合约、证券期货、欧洲美元期货以及其他形式的利率衍生产品。

小结

在美国有两种最流行的利率期货：国债期货和欧洲美元期货。在国债期货中，短头寸方有以下几种有趣的交割方式：

- 在交割月份的任意一天均可进行交割；
- 在交割时，有多种不同债券可作为选择；
- 在交割月中的任意一天，以基于下午2点成交价格为基准的交割意向通知可以在下午8点之前的任意时间发出。

这些选择往往会降低期货价格。

欧洲美元期货是关于在交割月份的第三个星期三开始的3个月利率的合约。在构造LIBOR零息曲线时，欧洲美元期货利率常常用于估算LIBOR远期利率。当采用长期限合约时，因为期货合约按市值定价的要求，我们必须对期货利率进行曲率调整。

在对冲利率风险时，久期是一个重要的概念。久期可以使对冲者了解一个债券组合由于收益率曲线一个微小的平行移动所引起变化的敏感性，还可以帮助对冲者评估利率期货价格对收益率曲线微小变化的敏感性。对冲者可以利用久期计算出为了确保债券组合不受收益率曲线微小平行移动影响所需要的期货的数量。

基于久期对冲的一个关键假设是所有的利率变化幅度均相等，这意味着利率期限结构只能平行移动。在实际中，短期利率一般比长期利率变化更为剧烈，如果期货合约的标的债券的久期与被对冲的资产久期明显不匹配，对冲的效果可能会很不好。

推荐阅读

Burghardt, G., and W. Hoskins. "The Convexity Bias in Eurodollar Futures," *Risk*, 8, 3 (1995): 63–70.

Duffie, D. "Debt Management and Interest Rate Risk," in W. Beaver and G. Parker (eds.), *Risk Management: Challenges and Solutions*. New York: McGraw-Hill, 1994.

Fabozzi, F. J. *Duration, Convexity, and Other Bond Risk Measures*. Frank Fabozzi Assoc., 1999.

Grinblatt, M., and N. Jegadeesh. "The Relative Price of Eurodollar Futures and Forward Contracts," *Journal of Finance*, 51, 4 (September 1996): 1499–1522.

练习题

6.1 一个美国国债债券在每年1月7日和7月7日支付券息，对于面值100美元的美国国债，从2011年7月7日至2011年8月9日之间的应计利息为多少？如果这一债券为企业债券，答案会有什么不同？

6.2 假定现在是2013年1月9日。一个券息率12%、并在2020年10月12日到期的美国国债的价格为102－07。这一债券的现金价格为多少？

6.3 如何计算CME集团的债券转换因子？如何应用这些转换因子？

6.4 当一个欧洲美元期货合约的价格由96变为96.82时，一个持有两份合约长头寸的投资者的盈亏为多少？

6.5 对于欧洲美元期货利率所做的曲率调整的目的是什么？为什么这种调整是必要的？

6.6 350天的LIBOR利率是3%（连续复利），而且由350天期限的欧洲美元期货合约所得出的远期利率是3.2%（连续复利）。估计440天期限的零息利率。

6.7 假定现在为1月30日。你负责管理的某债券组合的价值为600万美元。这一债券组合在6个月后的久期为8.2年。9月份到期的国债期货的当前价格为108－15，并且最便宜交割的债券在9月份的久期为7.6年。你将如何对冲今后6个月的利率变化？

6.8 一个90天期限的国库券的报价为10。某投资者将这一债券持有90天，该投资者的连续复利收益率为（基于“实际天数/365”）多少？

6.9 假定今天为2011年5月5日。一个在2014年7月27日到期，券息率为12%的政府国债报价为110－07。这一债券的现金价格为多少？

6.10 假定国债期货的价格为101－12，表6-3中4个债券中哪一个为最便宜交割债券？

表 6-3

债券	价格	转换因子
1	125－05	1.2131
2	142－15	1.3792
3	115－31	1.1149
4	144－02	1.4026

6.11 假定现在是2013年7月30日。在2013年9月到期的国库券期货所对应的最便宜交割债券的券息率为13%，预计交割时间为2013年9月30日，债券券息的支付时间为每年2月4日和8月4日。期限结构为水平，每半年复利一次的利率为每年12%。这一债券的转换因子为1.5，债券的当前价格为110美元。计算这一期货合约的报价。

6.12 一个投资者在国库券期货市场寻找套利机会。一个具有短头寸的投资者可以选择支付任意期限大于15年的债券，这一选择会带来什么复杂性？

6.13 假定9个月期LIBOR利率为每年8%，6个月期LIBOR利率为每年7.5%(两个利率计算天数惯例均为“实际天数/365”并连续复利)。估计在6个月时到期的3个月的欧洲美元期货的报价。

6.14 假设300天期限的LIBOR零息利率是4%，而对300天，398天和489天到期合约的欧洲美元报价是95.83、95.62和95.48。计算398天和489天的LIBOR零息利率。假设在计算中不需要区别远期利率与期货利率。

6.15 假设一个久期为12年的债券组合用标的资产具有4年久期的期货合约来对冲。由于12年利率没有4年利率波动性大，这种对冲会有什么影响？

6.16 假设现在为2月20日，某资金部主管意识到公司将不得不在7月17日发行500万美元、期限为180天的商业票据。如果商业票据在今天发行，公司的发行收入482万美元(也就是说，公司可得资金482万美元，在180天后以500万美元将票据赎回)。9月份欧洲美元的报价为92.00。资金部主管如何来对冲其风险暴露呢？

6.17 在8月1日，某证券组合经理的债券组合价值为1 000万美元。债券组合的久期为7.1年。12月份国债期货的价格为91-12，并且最便宜可交割债券在期货到期时的久期为8.8年。这个证券组合经理应如何使得债券价值不受接下来的两个月利率变化的影响？

6.18 一个证券组合的经理采取什么样的交易可将练习题6.17中的债券组合的久期转换为3.0年？

6.19 在2012年10月30日与2012年11月1日之间，你可以选择或者拥有券息率为12%的美国国债或者券息率为12%的美国企业债券。仔细考虑本章所讨论的天数计算惯例，在其他条件相等的情况下，你更愿意持有哪一个债券？

6.20 假定一个60天到期的欧洲美元期货的报价为88。介于60天与150天的LIBOR利率为多少？在这一问题中忽略期货合约与远期合约的不同。

6.21 一个在6年到期的3个月欧洲美元期货合约的报价为95.20。一年的短期利率变化标准差为1.1%。计算介于6年与6.25年之间的LIBOR远期利率。

6.22 解释为什么远期利率小于相应的由欧洲美元期货合约中得出的期货利率。

作业题

6.23 12月份的欧洲美元期货合约的报价为98.40，某公司预计在12月份要借入800万美元，为期3个月，利率为LIBOR加0.5%。

(a) 用欧洲美元期货合约，该公司可以锁定什么样的利率？

(b) 公司应该进入什么样的头寸？

(c) 如果3个月的实际利率为1.3%，那么期货合约的最终结算价格是多少？

6.24 5.1年到5.35年间的欧洲美元期货报价为97.10。一年期的短期利率变化的标准差为1.4%，估计FRA的远期利率。

6.25 假设现在是2011年3月10日，2010年12月国债期货的最便宜交割债券为8%券息，预计在2011年12月31日交割；券息支付在每年的3月1日和9月1日。对应所有期限按连续复利的利率为每年5%，债券的转换因子为1.219 1，现在

的报价为137美元，计算合约的期货价格。

6.26 假设一家银行可以在LIBOR市场以相同的利率借入或借出美元。90天的利率为每年10%，180天的利率为每年10.2%，两个利率均为连续复利，天数计算惯例为“实际天数/实际天数”，90天到期的欧洲美元期货的报价为89.5。对银行而言，这时会有什么样的套利机会？

6.27 某加拿大公司想采用美国欧洲美元期货和外汇远期合约来生成加元的LIBOR期货合约。用一个例子解释公司如何达到目的。在本题中假定期货合约与远期合约等同。

6.28 CBOT的2011年6月的债券期货合约的价格为118-23。

(a) 计算一个在2027年1月1日到期，券息为10%的债券的转换因子。

(b) 计算一个在2032年10月1日到期，券息为7%的债券的转换因子。

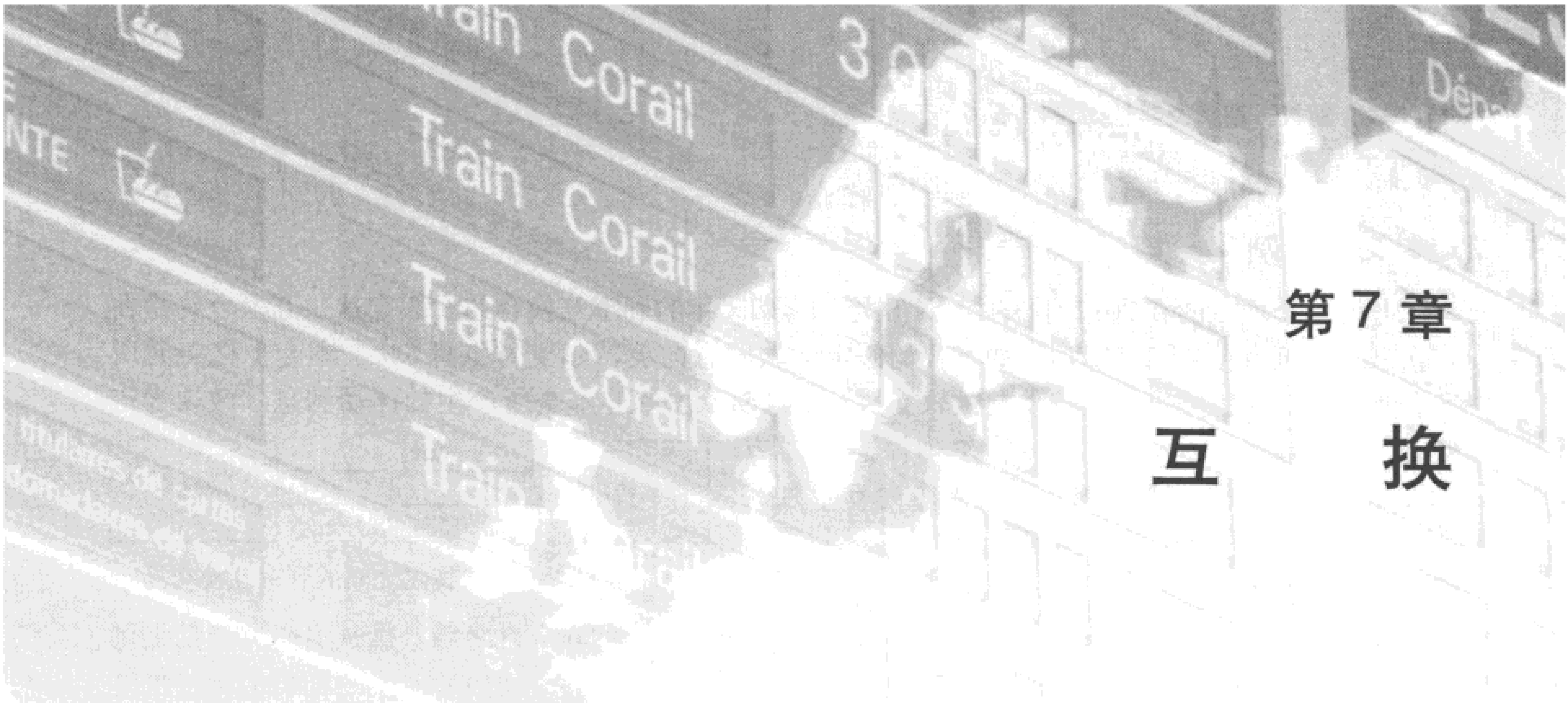
(c) 假定(a)和(b)中的债券报价分别为169.00和136.00，哪一个债券更便宜？

(d) 假定最便宜债券在2011年6月25日支付，卖出债券的现金价格为多少？

6.29 在今后3个月，某证券经理打算采用国债期货合约来对冲其证券组合。证券组合价值为1亿美元，在3个月后久期为4年。期货价格为122，每一个期货是关于10 000美元的债券。在期货到期时，预计的最便宜可交割债券的久期为9年。对冲所要求期货头寸为多少？

(a) 在1个月后最便宜可交割债券变为一个具有7年久期的债券，对冲要进行什么样的调整？

(b) 假定在3个月后，所有利率均有所增长，但长期利率增长幅度小于中期以及短期利率增长幅度。这对对冲的影响是什么？



第 7 章 互 换

第一个**互换**(swap)合约签署于20世纪80年代初。从那之后，互换市场发展迅猛。现在互换合约在场外衍生产品市场起到非常重要的作用。

互换是指两家公司之间达成的在将来互换现金流的合约，在合约中，双方约定现金流的互换时间及现金流数量的计算方法。通常来讲，对于现金流的计算会涉及利率、汇率及其他市场变量将来的价值。

一个远期合约可以看做一个最简单的互换合约。假定现在时间为2012年3月1日，某公司签署了一个一年期的远期合约，在合约中这家公司同意在一年后以每盎司1 200美元的价格购买100盎司的黄金，一年后，公司收到黄金后可以马上在现市市场将黄金变卖。这个在2013年3月1日生效的远期合约可以被认为是一个互换合约，在此合约中，公司同意在一年后也就是在2012年3月1日以现金120 000美元换取数量为100S美元的现金流，S为一年后黄金的市场价格。

远期合约可以等同于在今后的某单一时间现金流的互换，而互换合约通常阐明在今后的若干时间互换现金流。本章我们将探讨互换的设计过程、应用方式以及定价方法。我们将主要讨论两类市场上流行的互换：标准利率互换及**固定息与固定息**(fixed-for-fixed)的货币互换。其他类型的互换将在第32章讨论。

7.1 互换合约的机制

最简单的互换合约为**标准利率互换**(plain vanilla swap)。在这种互换中，一家公司同意向另一家公司在今后若干年内支付在本金面值上按事先约定的固定利率与本金产生的现金流，作为回报，前者将收入以相同的本金而产生的浮动利率现金流。

7.1.1 LIBOR

大多数利率互换合约中的浮动利率是第4章所引入的LIBOR，这一利率是指银行将资金存入其他具有AA信用等级的银行所得的利率。世界上所有的主要货币均提供1个月期、3个月期、6个月期及12个月期的LIBOR报价。

在国内金融市场，最佳客户利率(prime rate)常常用于作为浮动息贷款的参考利率。与这一点相似，LIBOR常常用于国际金融市场中贷款的参考利率。为了理解LIBOR的应用方式，考虑一个5年期的债券，该债券的券息率为6个月期LIBOR+0.5%，期限划分为长度为6个月的10个小的时间段，每个时间段(即6个月)所对应的券息为时间段开始时6个月期LIBOR+0.5%，而相应的利息的支付在每个时间段的末尾。

7.1.2 举例

考虑一个虚拟的在 2012 年 3 月 5 日开始、为期 3 年的利率互换合约。假定这一互换合约是在微软公司及英特尔公司之间达成的。我们假定微软同意向英特尔支付年息 5%、本金 1 亿美元所产生的利息；作为回报，英特尔向微软支付 6 个月期及由同样本金所产生的浮动利息。微软为定息支付方（fixed-rate payer），英特尔为浮息支付方（floating-rate payer）。假定合约约定双方每 6 个月互换现金流。这里的 5% 固定利率为每半年复利一次。这一互换如图 7-1 所示。

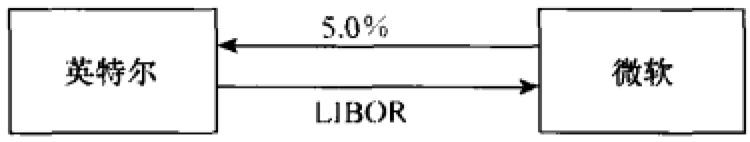


图 7-1 微软及英特尔之间的利率互换交易

第 1 次利息互换发生在 2012 年 9 月 5 日，这是合约达成的 6 个月之后。微软将向英特尔支付 250 万美元，这一数量是由本金 1 亿美元及年利率 5% 在 6 个月的时间内所产生的利息。英特尔将向微软支付浮动利息，其数量等于 1 亿美元乘以 2012 年 9 月 5 日之前 6 个月的利率确定日，即在 2012 年 3 月 5 日所确定的 6 个月期的 LIBOR。假定在 2012 年 3 月 5 日确定的 6 个月期的 LIBOR 为 4.2%，英特尔向微软支付的浮动利息为 $0.5 \times 0.042 \times 1$ 亿 = 210 万美元。[⊖]注意，对于首期支付的利息没有不确定性，因为这一支付利息是由在合约签署时刻的 LIBOR 决定的。

第 2 次利息互换发生在 2013 年 3 月 5 日，即合约签署一年以后。微软将向英特尔支付 250 万美元。英特尔将向微软支付浮动利息，其数量等于 1 亿美元乘以 2013 年 3 月 5 日之前 6 个月的利率确定日，即在 2012 年 9 月 5 日确定的 6 个月期的 LIBOR。假定在 2012 年 9 月 5 日确定的 6 个月期的 LIBOR 为 4.8%，因此英特尔向微软支付的浮动利息为 $0.5 \times 0.048 \times 1$ 亿 = 240 万美元。

这一互换总共包括 6 笔利息的互换，其中固定利息总是 250 万美元，在浮动利息的付款日所支付的浮动利息是利用付款日之前已确定的 6 个月期的 LIBOR 来计算的。在实践中，利率互换通常只需要一方支付互换现金流的差额。在我们的实例中，在 2012 年 9 月 5 日微软向英特尔支付 40 万美元(250 − 210)，在 2013 年 3 月 5 日微软向英特尔支付 10 万美元(250 − 240)。

表 7-1 展示了该实例中对应一组特定的 6 个月期的 LIBOR 所有的利息支付，该表是从微软公司的角度所看到的现金流。注意，这里的 1 亿美元本金只是在计算利息时才被采用，本金并没有互换，这也就是我们为什么将它称为**名义本金**(notional principal)的原因(在英文中本金也被称为 notional)。

表 7-1 微软支付本金 1 亿美元的固定利率并收入浮动利率的 3 年期利率互换的现金流

（单位：100 万美元）

日 期	6 个月 LIBOR(%)	收入的浮动现金流	支付的固定现金流	净现金流
2012 年 3 月 5 日	4.20			
2012 年 9 月 5 日	4.80	+2.10	−2.50	−0.40
2013 年 3 月 5 日	5.30	+2.40	−2.50	−0.10
2013 年 9 月 5 日	5.50	+2.65	−2.50	+0.15
2014 年 3 月 5 日	5.60	+2.75	−2.50	+0.25
2014 年 9 月 5 日	5.90	+2.80	−2.50	+0.30
2015 年 3 月 5 日		+2.95	−2.50	+0.45

如果在以上互换中交换本金，那么交易性质并没有改变。这是因为固定利息以及浮动利息所对应的本金相同，在互换的末尾交换 1 亿美元资金对双方都不会产生任何经济价值。表 7-2 展示了在表 7-1 互换结束时加入本金交换后的现金流状况。该表为我们提供了看待互换交易的一种有

⊖ 在这里我们忽略了天数计量惯例，我们将在本章后面进一步讨论。

趣的方式。表中的第3列对应于一个浮动利率债券长头寸的现金流，表中的第4列对应于一个固定利率债券短头寸的现金流。该表说明利率互换可以看做固定利率债券与浮动利率债券的互换。表7-2展示了微软的头寸为浮动利率债券的长头寸及固定利率债券的短头寸的组合；英特尔的头寸为浮动利率债券的短头寸及固定利率债券的长头寸的组合。

表7-2 表7-1中的互换在最后交换本金时的现金流 （单位：100万美元）

日 期	6个月LIBOR(%)	收入的浮动现金流	支付的固定现金流	净现金流
2012年3月5日	4.20			
2012年9月5日	4.80	+2.10	-2.50	-0.40
2013年3月5日	5.30	+2.40	-2.50	-0.10
2013年9月5日	5.50	+2.65	-2.50	+0.15
2014年3月5日	5.60	+2.75	-2.50	+0.25
2014年9月5日	5.90	+2.80	-2.50	+0.30
2015年3月5日		+102.95	-102.50	+0.45

在互换中，现金流的这种特性有助于解释为什么互换中的浮动利率在浮动利息支付前6个月就得以确定。在浮动利率债券中，利率通常在其适用期限的开始就得以确定并在期限的末尾支付。由表7-2所展示的“标准型”利率互换中的浮动利率计算恰好说明了这一点。

7.1.3 利用互换转变负债的性态

对于微软公司而言，利率互换可将其浮动利率贷款转换为固定利率贷款。假定微软公司已经安排了以LIBOR+10个基点的利率借入面值1亿美元(一个基点是1%的1%，实际贷款利率为LIBOR+0.1%)的贷款。当微软公司进入互换合约后，它有以下3项现金流：

- 支付给外部贷款人的利率为LIBOR+0.1%；
- 在互换合约中收入LIBOR；
- 在互换合约中付出5%。

以上3项现金流的净效果为支出现金流5.1%。该互换将微软LIBOR+10个基点的浮动利率贷款转换为5.1%的固定利率贷款。

对于英特尔公司而言，利率互换可将其固定利率贷款转换为浮动利率贷款。假定英特尔公司已经持有以5.2%的利率、面值1亿美元的贷款。当英特尔公司进入互换合约后，它有以下3项现金流：

- 支付给外部贷款人的利率为5.2%；
- 在互换合约中付出LIBOR；
- 在互换合约中收入5%。

以上3项现金流的净效果为支出现金流的年率为LIBOR+20个基点(即LIBOR+0.2%)。该互换将英特尔5.2%的固定利率贷款转换为LIBOR+0.2%的浮动利率贷款。微软与英特尔可能的互换方式参见图7-2。

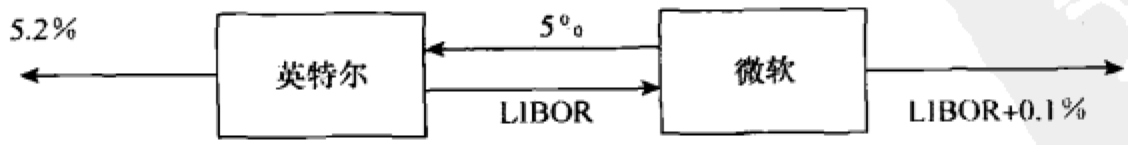


图7-2 微软及英特尔采用利率互换来改变负债的性态

7.1.4 利用互换转变资产的性质

利率互换也可以改变资产的性质。考虑实例中的微软公司。利用利率互换，微软公司可以将

收入为固定利率的资产转换为收入为浮动利率的资产。假定微软拥有一个 3 年期债券，债券每年提供的券息为 4.7%。当微软公司进入互换合约后，它有以下 3 项现金流：

- 债券收入为 4.7%；
- 在互换合约中收入 LIBOR；
- 在互换合约中付出 5%。

以上 3 项现金流的净效果为收入现金流的年率等于 LIBOR 减去 30 个基点。因此对于微软来讲，互换的一种应用是将收入固定利率为 4.7% 的资产转换为浮动利率为 LIBOR－0.3% 的资产。

接下来考虑英特尔公司。利率互换可将其浮动利率资产转换为固定利率资产。假定英特尔拥有一笔 1 亿美元的投资，其收益为 LIBOR 减去 20 个基点。当英特尔公司进入互换合约后，它有以下 3 项现金流：

- 投资收入为 LIBOR 减去 20 个基点；
- 在互换合约中付出 LIBOR；
- 在互换合约中收入 5%。

以上 3 项现金流的净效果为收入现金流的年率为 4.8%。对于英特尔来讲，利率互换可将其浮动利率等于 LIBOR 减去 20 个基点的资产转换为固定利率为 4.8% 的资产。微软与英特尔的可能互换参见图 7-3。

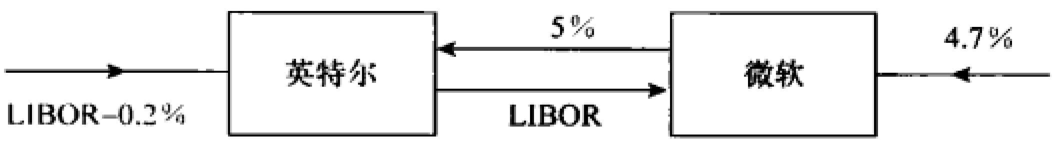


图 7-3　微软及英特尔采用利率互换来改变资产的性质

7.1.5　金融媒介的作用

一般来讲，类似微软和英特尔这样的非金融公司并不会像图 7-2 及图 7-3 所示的方式直接联系，并进行互换交易。这些公司都会同银行或其他金融机构联系。金融机构将会安排“标准”型的固定与浮动美元利率互换，在每一对相互抵消的交易中，金融机构的收入为 3～4 个基点(0.03%～0.04%)。

图 7-4 说明了在图 7-2 的情况下金融机构的角色。金融机构分别与微软公司及英特尔公司签署了两个相互抵消的互换。假定两家公司均不违约，金融机构肯定可以获得本金为 1 亿美元、年率为 0.03%(3 个基点)的盈利(一年盈利大约为 3 万美元)。微软最终以 5.115%(而不是图 7-2 所示的 5.1%)的利率贷款；英特尔最终以 LIBOR＋21.5 个基点(而不是图 7-2 所示的 LIBOR＋20 个基点)。



图 7-4　金融机构介入时图 7-2 所对应的利率互换

图 7-5 说明了在图 7-3 情形下金融机构的角色。互换与前面一样，如果两家公司均不违约，那么金融机构肯定能赚取 3 个基点的利息。微软将会赚取 LIBOR 减去 31.5 基点(而不是 LIBOR 减去 30 基点)，而英特尔将会赚取 4.785%(而不是图 7-3 中的 4.8%)。

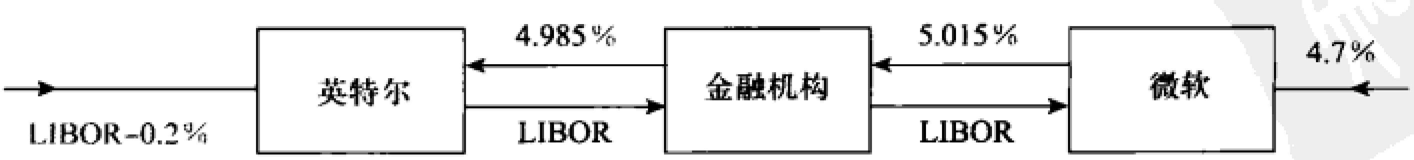


图 7-5　金融机构介入时图 7-3 所对应的利率互换

注意在每一种情况下，金融机构都有两个单独的合约：一是与英特尔的，一是与微软的。在大多数情况下，英特尔甚至不知道金融机构与微软进行了抵消性的互换合约，反之亦然。如果一家公司违约，金融机构必须履行与另一方的合约。金融机构的3个基点差价收入的一部分是补偿它所承受的由于交易对手违约而带来的信用风险。

7.1.6 做市商

在实践中，两家公司不可能同时与某家金融机构接触并持有相同而头寸相反的互换。因此，许多金融机构扮演着互换做市商的角色。这意味着金融机构在进入利率互换的同时，并不一定要进入与其他交易对手之间的互换交易。[⊖]做市商必须对自身面临的风险定量化，并采取对冲措施。互换合约的做市商可以采用债券、远期利率合约、利率期货等产品来对冲风险。表7-3是某做市商可能给出的关于标准美元互换的报价。[⊜]一般来讲，溢差的**买入卖出差价**(bid-offer spread)为3~4个基点。买入卖出利率的平均值被称为**互换利率**(swap rate)，表7-3的最后一列为互换利率。

表7-3 某利率互换市场中的互换利率买入和卖出报价(年利率%)

期限	买入价	卖出价	互换利率
2	6.03	6.06	6.045
3	6.21	6.24	6.225
4	6.35	6.39	6.370
5	6.47	6.51	6.490
7	6.65	6.68	6.665
10	6.83	6.87	6.850

注：利息互换每半年一次。

考虑一个新的互换合约，该合约中的固定利率等于当前的互换利率。我们可以合理地假设这一互换的价值为0(不然做市商为什么会选择以互换利率为中心的买卖报价呢)。在表7-2中，我们看出互换的价值等于固定利率的债券与浮动利率债券的差。定义：

B_{fix}——我们所考虑的互换中的固定利率债券的价值；

B_{fl}——我们所考虑的互换中的浮动利率债券的价值。

因为互换的价值为0，因此

$$B_{\text{fix}} = B_{\text{fl}} \tag{7-1}$$

在本章计算LIBOR/互换零息利率曲线时，我们将用到这一结论。

7.2 天数计量惯例

在6.1节中我们曾讨论了天数计量惯例。天数计量惯例影响互换中支付利息的数量，我们实例中的利率并没有真正反映天数计量惯例。例如，由表7-1中6个月LIBOR所决定的利息，因为这里的利率为货币市场利率，因此6个月LIBOR的天数计量惯例为"实际天数/360"。表7-1中的第1个浮动利息支付为210万美元，这一利息所对应的利率为4.2%。因为2012年3月5日至2012年9月5日之间总共有184天，因此利息支付数量为

$$100 \times 0.042 \times \frac{184}{360} = 2.1467 \text{ 万美元}$$

一般来讲，在一个互换合约中，一个以LIBOR计量的浮动利率的现金流等于$LRn/360$，其中L为本金，R为相应的LIBOR，n为从上一个付款日到今天的天数。

互换中通常也会指定固定利率的天数计量惯例。因此，在每个付款日，固定利息的支付数量并不一定相同。固定利率的天数计量惯例通常为"实际天数/365"或"30/360"。这些惯例并不能与LIBOR进行类比，因为固定利率适用于一整年。为了保证利率的可比性，我们要将LIBOR乘以

⊖ 这一做法有时被称为互换交易的储存(warehousing)。

⊜ 在美国的标准利率互换合约中，固定利率一般是每6个月支付一次，而浮动利率LIBOR为每3个月支付一次。表2-4中的分析假定固定利率及浮动利率均为6个月付一次。在今后我们将看到，无论浮动利息是每3个月支付还是每6个月支付，固定利率不变。

365/360 或将互换的固定利率乘以 360/365。为了将问题解释得更加清楚，我们在本章的计算中忽略天数计量惯例。

7.3 确认书

互换中的**确认书**(confirmation)是由交易双方代表签署的法律文件。确认书的初稿由总部在纽约的国际互换及衍生产品联合会(International Swaps and Derivatives Association，ISDA)提供。ISDA 已经开发出了一些标准协议(Master Agreement)。这些标准协议定义了合约的一些细节及互换合约中所采用的名词，也阐明了如果某交易方违约将如何对合约进行处理等。在业界事例 7-1 中，我们展示了微软与某家金融机构(假设为高盛)在图 7-4 中的互换合约确认书的摘要。一个完整的确认书可能会指明 ISDA 标准文件对于这一交易所陈述的所有条款都成立。

业界事例 7-1　一个虚拟互换交易的确认书摘要

交易日(trade date)：	2012 年 2 月 27 日
生效日(effective date)：	2012 年 3 月 5 日
业务天惯例(所有天数)：	随后第 1 个工作日
假期日历(holiday calendar)：	美国
终止日(Terominatin date)：	2015 年 3 月 5 日
固定利息方	
固定利息付出方：	微软
固定利息名义本金：	1 亿美元
固定利率：	年率 5.015%
固定利率天数计量惯例：	实际天数/365(actual/365)
固定利率付款日：	2012 年 9 月 5 日至 2015 年 3 月 5 日(包括这一天)之间的所有的 3 月 5 日及 9 月 5 日
浮动利息方	
浮动利息付出方：	高盛
浮动利息本金：1 亿美元	1 亿美元
浮动利率：	6 个月期的美元 LIBOR
浮动利率天数计量惯例：	实际天数/360
浮动利率付款日：	2012 年 9 月 5 日至 2015 年 3 月 5 日(包括这一天)之间的所有的 3 月 5 日及 9 月 5 日

确认书中阐明，业务天惯例(business day convention)为**随后第 1 个工作日**(following business day)，美国的日历决定哪一天为工作日及节假日。这意味着如果一个付款日刚好为周末或美国假日，付款日会挪到下一个工作日。[⊖]

7.4 比较优势的观点

互换合约如此流行的一种解释是所谓的比较优势(comparative-advantage)。考虑利用利率互换转换负债性态的例子。某些公司在固定利率市场贷款具有比较优势，而另一些公司在浮动利率市场贷款具有比较优势。当需要一笔新的贷款时，公司会进入自身有比较优势的市场。因

⊖ 另一个业务天惯例为**修正随后工作日**(modified following)，这一惯例与随后第 1 个工作日惯例几乎相同，其唯一不同之处在于如果某一天所对应的下一个工作日落在下一月，那么付款日就是这一天之前的最后一个工作日。此外，**前一工作日**(preceding)以及**修正前一天工作日**(modified preceding)也可采取同样的形式来定义。

此，本想借入固定利率贷款的公司可能会借入浮动利率贷款，而本想借入浮动利率贷款的公司可能会借入固定利率贷款。互换合同可以用来将固定利率贷款转化为浮动利率贷款，反之亦然。

假定两家公司，AAACorp 及 BBBCorp 均想借入 100 万美元，期限为 5 年。表 7-4 给出了相应的贷款利率，AAACorp 公司的信用评级为 AAA；BBBCorp 公司的信用评级为 BBB[⊖]；我们假定 BBBCorp 想借入固定利率贷款，AAACorp 想借入基于 6 个月期 LIBOR 的浮动利率贷款。BBBCorp 公司的信用等级比 AAACorp 公司差，因此，它所支付的固定利率及浮动利率都会比 AAACorp 公司更高。

表 7-4　给比较优势观点提供基础的借入资金的利率

	固定利率	浮动利率
AAACorp	4.0%	6 个月 LIBOR -0.1%
BBBCorp	5.2%	6 个月 LIBOR +0.6%

提供给 AAACorp 及 BBBCorp 的利率报价中有一个关键的特点，即固定利率之间的差价大于浮动利率之间的差价。BBBCorp 在固定利率市场比 AAACorp 多付 1.2%，而在浮动利率市场只多付 0.7%。BBBCorp 在浮动利率市场具有比较优势，AAACorp 在固定利率市场具有比较优势[⊜]。这一明显的差异也就触发了互换合约的形成。AAACorp 以每年 4% 借入固定利率，BBBCorp 以 LIBOR + 0.6% 借入浮动利率。然后它们进入利率互换交易，最终结果是 AAACorp 公司融资利率为浮动利率，而 BBBCorp 公司的融资利率为固定利率。

为了理解互换的运作过程，我们假定 AAACorp 公司与 BBBCorp 公司直接取得联系。它们达成的互换合约如图 7-6 所示，这一互换与图 7-2 的互换非常相似。AAACorp 同意向 BBBCorp 支付本金为 1 亿美元 6 个月 LIBOR 的利息。作为回报，BBBCorp 向 AAACorp 支付本金为 1 亿美元、年率 4.35% 的利息。

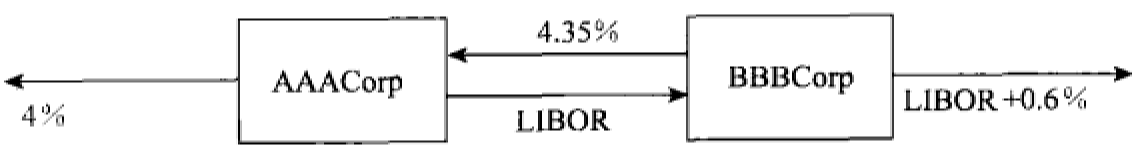


图 7-6　AAACorp 及 BBBCorp 之间的利率互换交易(一)

注：利率见表 7-4。

AAACorp 会有以下 3 项现金流：

- 支付给外部贷款人的利率为 4%；
- 在互换合约中由 BBBCorp 收入 4.35%；
- 在互换合约中向 BBBCorp 支付 LIBOR。

以上 3 项现金流给 AAACorp 带来的净效果为：支出现金流的年率为 LIBOR -0.35%，这比在浮动市场的贷款利率低了 0.25%。当进入互换合约后，BBBCorp 也有 3 项现金流：

- 支付给外部贷款人的利率为 LIBOR +0.6%；
- 在互换合约中由 AAACorp 收入 LIBOR；
- 在互换合约中向 AAACorp 支付 4.35%。

以上 3 项现金流给 BBBCorp 带来的净效果为：支出现金流的年率为 4.95%。这比在固定市场的贷款利率低了 0.25%。

⊖ 标准普尔对于公司给出的信用评级(由好到坏)分别为 AAA，AA，A，BBB，BB，B，CCC，CC，C。穆迪的相应的评级分别为 Aaa，Aa，A，Baa，Ba，B 及 Caa，Ca，C。

⊜ 注意 BBBCorp 在浮动利率市场具有相同优势并不意味着 BBBCorp 公司所支付的浮动利率低于 AAACorp 公司，这只是意味着 BBBCorp 所支付的额外数量比 AAACorp 公司的额外数量在这一市场更低。我的一个学生将这一情形比做“AAACorp 在固定利率市场付的额外数量少得更多(pays more less)；BBBCorp 在浮动利率市场付的额外数量多得更少。

在这个例子中，互换的构造使得两家公司均少付了0.25%，但情况并不总是这样。可以证明，这时互换合约的总收益总是 $a-b$，其中 a 为两家公司在固定利率市场的利率差，b 为两家公司在浮动利率市场的利率差。在我们的例子中，$a=1.2\%$，$b=0.70\%$，所以总收益为0.5%。

如果AAACorp与BBBCorp之间并不直接交易，而是利用金融机构，结果可能如图7-7所示（这与图7-4中的例子非常相似）。这时，AAACorp的贷款利率为LIBOR－0.33%，BBBCorp的贷款利率为4.97%，金融机构的收益为0.04%（4个基点）。AAACorp的收益为0.23%；BBBCorp的收益为0.23%；金融机构的收益为0.04%。对于三方的总收益仍然等于以上的讨论的总收益差，即0.50%。

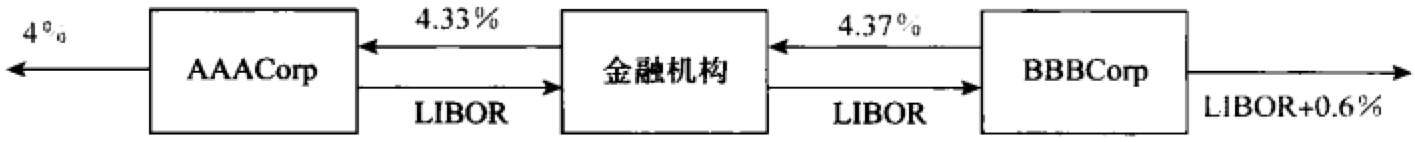


图7-7　AAACorp及BBBCorp之间的利率互换交易(二)

注：利率见表7-4阐明，交易中有金融机构介入。

对比较优势观点的批评

我们刚刚描述的关于解释利率互换吸引力的观点存在一些问题。为什么图7-4所示的对于AAACorp及BBBCorp的利率差在固定利率市场及浮动利率市场会有所不同呢？互换市场已经存在了很长时间，我们可以合理地假定这种利差已经被套利者消除了。

利差存在的原因似乎在于这些公司在固定利率市场以及浮动利率市场所能得到的合约的性质。AAACorp和BBBCorp在固定利率市场得到的4.0%及5.2%的利率为5年期（例如，公司可以发行5年期的债券的利率）。AAACorp和BBBCorp在浮动利率市场得到的LIBOR－0.1%及LIBOR＋0.6%的利率为6个月的利率。在浮动利率市场，资金的借出方通常有机会每6个月检查一次利率。当AAACorp及BBBCorp的信用等级有所下降时，资金的借出方可以选择在LIBOR基础上加息。甚至在极端的情形下，贷款人可以拒绝延续贷款。固定利率的贷款人无权以这种方式来改变贷款的条款[⊖]。

市场提供给AAACorp及BBBCorp的贷款利率的溢差反映了BBBCorp比AAACorp更有可能违约的程度。在今后的6个月内，AAACorp和BBBCorp违约的机会都很小。当我们考虑更长的期限时，违约统计结果表明，具有较低信用等级的公司（如BBBCorp）平均违约概率比具有较高信用等级的公司（如AAACorp）平均违约概率增长得更快。这也就是5年期的利率差价比6个月期的利率差价更大的原因。

在取得了LIBOR＋0.6%的浮动利率贷款并进入图7-7所示的互换后，BBBCorp似乎取得了4.97%的固定利率贷款。但事实并非如此。实际中，只有在BBBCorp能够连续地以LIBOR＋0.6%借入浮动利率资金的前提下，固定利率才为4.97%。例如，如果BBBCorp的信用等级下降使浮动贷款利率变成了LIBOR＋1.6%，这时BBBCorp所付出的利率变为5.97%。市场预计BBBCorp在LIBOR浮动利率之上的溢差平均来讲将会有所增加，因此BBBCorp预计在进入互换交易后自身借入资金的利率平均也会有所增长。

图7-7所示的互换使得AAACorp公司锁定了LIBOR－0.33%的利率的期限为5年，而不是仅仅为6个月。对于AAACorp公司来讲，这似乎是一笔好交易。不利之处在于AAACorp必须承担金融机构违约的风险。如果公司采用通常的形式来借入资金，那么就无须承担这一风险。

⊖ 如果浮动利率的贷款中事先保证在LIBOR上的溢差与信用等级变化无关，那么比较优势会很小以至于不存在。

7.5 互换利率的实质

现在来说明互换利率的实质及互换与 LIBOR 市场的关系。在 4.1 节我们曾经指出，LIBOR 是具有 AA 信用级别的银行由其他银行借入 1～12 个月期的资金的利率。表 7-3 显示，互换的利率等于以下两个利率的平均值：(a)做市商在互换合约中收入 LIBOR，并准备付出的固定利率(买入利率)；(b)做市商在互换合约中付出 LIBOR，并准备收入的固定利率(卖出利率)。

与 LIBOR 类似，互换利率并不是无风险利率。但是，它们同无风险利率非常接近。一家金融机构可以进行以下交易来使一定本金投资收益率等于 5 年期的互换利率：

- 借给一家信用级别为 AA 的公司一笔资金，期限为 6 个月，在以后每 6 个月将相同数量的资金借给其他信用级别也为 AA 的公司。
- 进入一个 5 年期的互换交易，收入现金流为 LIBOR，支出现金流为 5 年期互换利率。

这些交易说明，5 年期的互换利率等于借给 AA 级公司 10 个 6 个月期的 LIBOR 短期资金的收益率。类似地，7 年期的互换利率等于借给 AA 级公司 14 个 6 个月期的 LIBOR 短期资金的收益率。对于其他期限的互换利率，我们也可以给出类似的解释。

注意 5 年期的互换利率小于 AA 级公司借入 5 年期资金的利率。在 5 年内每 6 个月连续将资金借给若干家信用级别总是为 AA 级公司比在 5 年开始时将资金借给单家信用级别为 AA 的公司并锁定 5 年期限会更吸引人。

7.6 确定 LIBOR/互换零息利率

4.1 节曾说明了衍生产品交易员在对衍生产品定价时喜欢采用 LIBOR 利率来作为无风险利率。使用 LIBOR 利率的一个问题是我们所能直接观察到的利率期限都不超过 12 个月。如 6.3 节所述，一种将 LIBOR 零息曲线延长到长于 2 年的方法是利用欧洲美元期货。一般来讲，欧洲美元可以用来将 LIBOR 零息曲线延长到 2 年，有时会长达 5 年，然后交易员利用利率互换将 LIBOR 零息曲线再进一步延长。所得零息曲线有时被称为 LIBOR 零息曲线，有时被称为互换零息曲线。为了不引起混乱，我们将其称为 LIBOR/互换曲线。下面我们将描述如何利用互换利率来确定 LIBOR/互换曲线。

首先应注意的是，对于一个新发行的券息为 6 个月 LIBOR 的浮动息债券，如果采用 LIBOR/互换零息曲线来对其定价，我们得出的价格总会是本金价格(也被称为平价)，[1]其原因是债券的利率为 LIBOR，同时贴现利率也为 LIBOR，债券的券息与贴现利率吻合。因此，债券价格为平价。

在式(7-1)中，我们指出对于一个新成交的互换交易，当固定利率等于互换利率时，$B_{fix}=B_{fl}$。我们在以上曾指出 B_{fl} 等于本金值，因此 B_{fix} 也等于本金值。这说明互换利率可以被定义为平价债券的收益率。例如，由表 7-3 所示的互换利率，我们可以得出 2 年期 LIBOR/互换平价收益率为 6.045%，3 年期的 LIBOR/互换平价收益率为 6.255%，等等[2]。

通常计算 LIBOR/互换零息利率曲线的方法是在 4.5 节引入的决定国债零息曲线的票息剥离法(bootstrap method)。以类似的方法可以利用互换利率来延长 LIBOR/互换零息曲线。

---

[1] 对支付 1 个月、2 个月、3 个月以及 12 个月期的 LIBOR 新发行的债券，这也是对的。

[2] 分析员常常对互换利率进行插值，然后再进行零息利率曲线的计算，这么做的原因是为了保证对于每 6 个月的期限都有一个互换利率。例如，对于表 7-3 所示的数据，2.5 年的互换利率被假定为 6.135%(即由插值所得)，7.5 年的互换利率被假定为 6.696%，等等。

【例 7-1】 假定 6 个月、12 个月、18 个月期的 LIBOR/互换零息利率分别为 4%、4.5% 及 4.8%（按连续复利），2 年期互换（支付频率为每半年一次）的利率为 5%。5% 的互换利率意味着本金为 100 美元，券息年率 5%（券息每年支付两次）的价格为平价。如果 R 为 2 年期的零息利率，那么

$$2.5e^{-0.04\times0.5}+2.5e^{-0.045\times1.0}+2.5e^{-0.048\times1.5}+102.5e^{-2R}=100$$

上式的解 $R=4.953\%$（注意这里的过程被简化了，我们并没有将天数计量惯例及假期日历考虑在内，见第 7.2 节）。

7.7 利率互换的定价

我们现在考虑利率互换的定价。在合约开始时，利率互换的价格为 0 或接近于 0。随时间的变化，利率互换的价值可能为正，也可能为负。利率互换有两种定价方式。第 1 种方式将利率互换视为两个债券的差；第 2 种方式将利率互换视为由 FRA 组成的交易组合。

7.7.1 由债券价格来计算互换的价格

在利率互换中，本金不进行交换。但是如表7-2 所示，我们可以假设本金在互换中进行交换，这一假设并不影响互换的价值。这么做以后我们将收入固定利率并付出浮动利率的互换作为固定利率债券的长头寸与浮动利率债券的短头寸的组合，因此

$$V_{\text{swap}}=B_{\text{fix}}-B_{\text{fl}}$$

式中，V_{swap}为互换的价值；B_{fl}为互换中浮动利率债券的价值；B_{fix}为互换中固定利率债券的价值。类似地，一个收入浮动利率并付出固定利率的互换可作为浮动利率债券的长头寸与固定利率债券的短头寸的组合，因此

$$V_{\text{swap}}=B_{\text{fl}}-B_{\text{fix}}$$

固定利率债券的价值可以由 4.4 节所描述的方式求得。为了计算浮动利率债券的价格，我们注意到债券在券息付出后等于其面值 L。因为在这时债券为“公平交易”价格，其中借贷人对于每个计息区间所支付的利率为 LIBOR。

假定下一个互换现金流的时间为 t^*，在 t^* 支付的浮动利息（在前一个付款期已确定）为 k^*，在支付之后，如前所述，$B_{\text{fl}}=L$，在支付利息之前，$B_{\text{fl}}=L+k^*$。因此，浮动利率债券可以看做是在 t^* 提供单一现金流的产品，对这一现金流进行贴现，得出浮动利息债券今天的价格为

$$(L+k^*)e^{-r^*t^*}$$

式中，r^* 为 LIBOR/互换零息利率曲线上对应于 t^* 的利率。图 7-8 说明了以上论述。

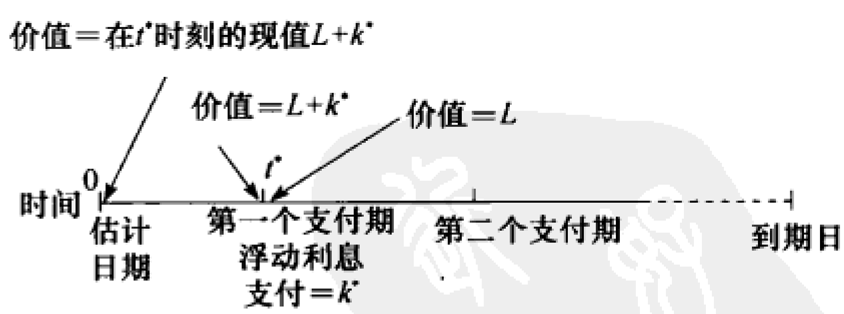


图 7-8 面值为 L 在下一付款日 t^* 支付利息为 k^* 的浮动债券的定价

【例 7-2】 假定某金融机构同意在互换合约中支付 6 个月期的 LIBOR 并同时收入年率 8%（每半年复利一次）的固定利率，互换的本金为 1 亿美元。互换合约还有 1.25 年的剩余期限。对应于期限为 3 个月、9 个月及 15 个月的 LIBOR（连续复利）分别为 10%、10.5% 及 11%。前一个付款日所对应的 LIBOR 为 10.2%（每半年复利一次），表 7-5 是以债券形式对互换定价的总结。

表 7-5 利用债券价格来定价

时间	B_{fix}现金流	B_{fl}现金流	贴现因子	B_{fix}现金流贴现值	B_{fl}现金流贴现值
0.25	4.0	105.100	0.9753	3.901	102.505
0.75	4.0		0.9243	3.697	
1.25	104.0		0.8715	90.640	
总计				98.238	102.505

注：B_{fix}为互换中的固定利率债券，B_{fl}为互换中的浮动利率债券。

固定利息的债券现金流在3个付款日上分别为4、4及104。对应于这3个付款日的贴现因子分别为$e^{-0.1\times0.25}$，$e^{-0.105\times0.75}$，$e^{-0.11\times1.25}$。其数值结果列在表7-5的第4列，这一表格显示的固定利率债券价格(以百万美元计)为98.238。

在这一实例中，$L=1$亿美元，$k^*=0.5\times0.102\times100=510$万美元，$t^*=0.25$。因此，浮动利率债券等价于在3个月期时的现金流，其数量为105.1美元。表7-5显示的浮动债券价格(以百万美元计)为$105.1\times0.9753=102.505$。

债券价格为以上两个债券的差

$$V_{swap}=98.238-102.505=-4.267$$

即-426.7万美元。

如果金融机构处在相反的位置，即支付固定利率，同时收入浮动利率，互换的价格为426.7万美元。注意，在计算中，我们没有考虑天数计量惯例以及假期日历。

7.7.2 利用FRA对互换定价

互换合约等价于远期利率合约的组合。考虑图7-1所示的微软与英特尔之间的互换合约，这一合约在2012年3月5日签署，付款频率为每半年一次。在合约成交时，我们已经知道第1个支付量为多少。其他5个支付量可以看做是由FRA产生的。在2013年3月5日的现金流互换可以看做固定利率5%与在2012年9月5日所观测到的浮动利率互换而形成的FRA；在2013年9月5日的现金流互换可以看做固定利率5%与在2012年3月5日所观测到的浮动利率互换而形成的FRA，等等。

如4.7节的末尾所示，FRA的定价可以假定远期利率在将来会得以实现。因为简单互换合约是远期利率合约FRA的组合，在这一合约定价中我们可以假定远期利率在将来会实现，其定价过程如下：

- 利用LIBOR/互换零息利率曲线计算每一个决定互换现金流的LIBOR利率所对应的远期利率。
- 假定LIBOR等于远期利率，并计算互换现金流。
- 对现金流进行贴现(以LIBOR/互换零息利率曲线为贴现率来定出互换的价值)。

例7-3说明了计算过程。

【例7-3】 再一次考虑例7-2中的情形。在互换中，某金融机构同意支付6个月期的LIBOR并同时收入年率8%(每年复利一次)的固定利率。互换的本金为1亿美元，互换还有1.25年的剩余期限。对应于期限为3个月、9个月及15个月的LIBOR(连续复利)分别为10%、10.5%及11%。前一个付款日所对应的6个月期LIBOR为10.2%(每半年复利一次)。表7-6是对于计算过程的总结(现金流以百万美元计)。

表 7-6

时间	固定现金流	浮动现金流	净现金流	贴现因子	净现金流贴现值
0.25	4.0	−5.100	−1.100	0.9753	−1.073
0.75	4.0	−5.522	−1.522	0.9243	−1.407
1.25	4.0	−6.051	−2.051	0.8715	−1.787
总计					−4.267

表 7-6 的第 1 行显示了在第 3 个月会有现金流的交换，现金流的数量已被确定。固定利率 8% 所对应的现金流为 $100 \times 0.08 \times 0.5 = 400$ 万美元。浮动利率 10.2%（在 3 个月以前设定）所对应的现金流为 $100 \times 0.102 \times 0.2 = 510$ 万美元。表 7-6 中的第 2 行显示在 9 个月时会有现金流交换，其中假设远期利率会得以实现。同上，收入现金流为 400 万美元。为了计算支出现金流，我们首先计算介于 3 个月与 9 个月之间的远期利率。由式(4-5)，我们可以得出远期利率为

$$\frac{0.105 \times 0.75 - 0.10 \times 0.25}{0.5} = 0.1075$$

即 10.75%（连续复利）。由式(4-4)得出，对应于每半年复利一次的远期利率为 11.044%。因此，支出现金流为 552.2 万美元。类似地，第 3 行显示假定远期利率会实现时，在 15 个月时的现金流。对应于这 3 个付款日期的贴现因子分别为 $e^{-0.1 \times 0.25}$，$e^{-0.105 \times 0.75}$，$e^{-0.11 \times 1.25}$。

在 3 个月支付的贴现值为 −107.3 万美元，第 9 个月及第 15 个月所对应的 FRA 的价值分别为 −140.7 万美元及 −178.7 万美元。互换的总价值为 −426.7 万美元。这与例 7-4 中将互换分解为债券长头寸及短头寸所得出的价值一致。

在互换合约刚刚开始时，固定利率的设定往往是保证互换的价值为 0。这意味着在初始时，互换中所有 FRA 的价值总和为 0，但并不意味着每个 FRA 的价值为 0。通常来讲，有些 FRA 会有正价值，而有些 FRA 会有负价值。

考虑图 7-1 所示的微软与英特尔之间的互换中的 FRA：

- 当远期利率 >5.0% 时，对于微软而言，FRA >0；
- 当远期利率 =5.0% 时，对于微软而言，FRA =0；
- 当远期利率 <5.0% 时，对于微软而言，FRA <0。

假定利率期限结构在互换刚刚成交时为上坡型，这意味着当 FRA 到期期限增长时，远期利率有所增大。因为所有 FRA 价值的总和为 0，在初始付款日所对应的远期利率一定小于 5%；在互换末尾的付款日所对应的远期利率一定大于 5%。因此对于初始付款日的 FRA 的价值为负，对于末尾付款的 FRA 的价值为正。如果在互换刚刚成交时，利率曲线为下坡型，以上结论刚好相反。利率曲线结构的形状对于互换中 FRA 的影响在图 7-9 中有所说明。

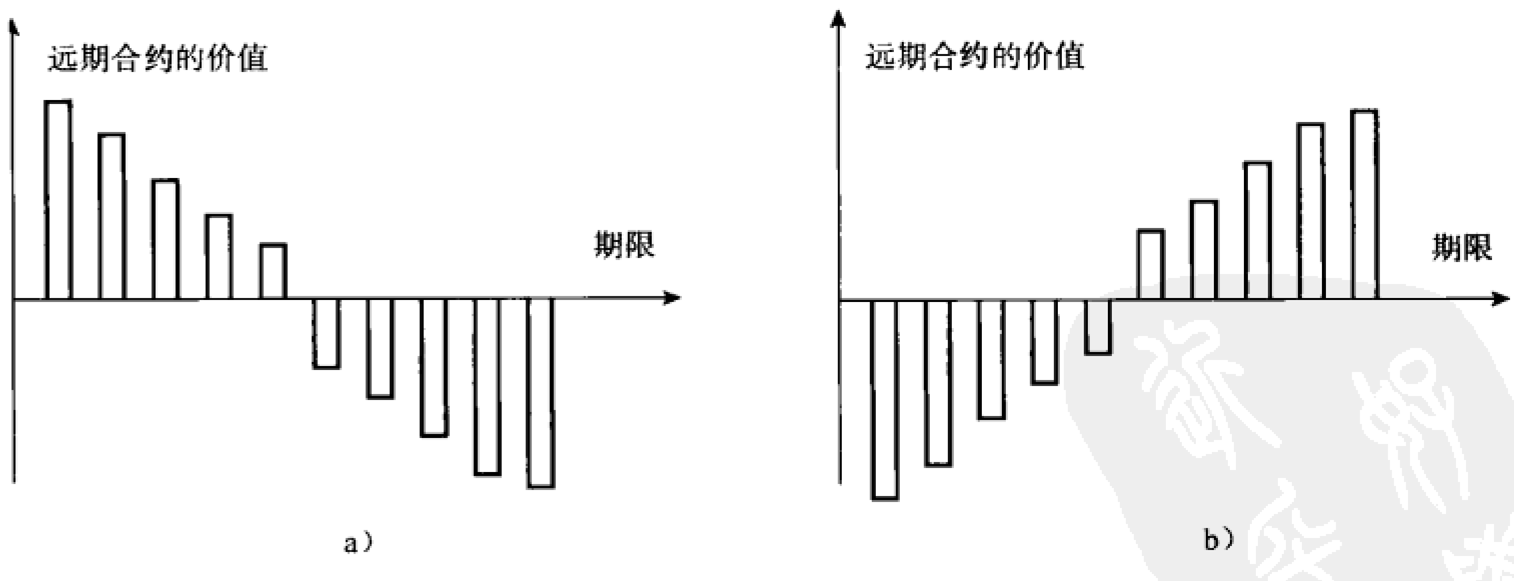


图 7-9 互换合约中的 FRA 价格与期限的函数关系

注：在图 7-9a 中，利率期限结构为上坡型，在合约中我们收入固定利息；或者利率期限结构为下坡型，在合约中我们收入浮动利息。在图 7-9b 中，利率期限结构为上坡型，在合约中我们收入浮动利息；或者利率期限结构为下坡型，在合约中我们收入固定利息。

7.8 隔夜指数互换

在结束讨论利率互换之前，我们将讨论一下隔夜指数互换。自 20 世纪 90 年代市场引入隔夜指数互换以来，这一产品在所有的主要货币下已经变得十分流行。该产品主要是被银行用于在每

天结束时，通过以隔夜利率借入或借出资金来满足流动性的需要。隔夜利率常常是中央银行为影响货币政策采用的目标利率。在美国，该利率被称为联邦基金利率(Fed Funds rate)。

在一个隔夜指数互换(overnight indexed swap，OIS)中，某个时间区间(例如1个月、3个月、1年或2年)的固定利率与这一时间段隔夜利率的几何平均值进行互换。对应某个时间段，如果银行每天以隔夜利率借入资金(每天将贷款进行延展)，最终银行借入资金的实际利率是隔夜利率的几何平均值；如果银行每天以隔夜利率借出资金，最终银行借出资金的实际利率也是隔夜利率的几何平均值。隔夜指数利率互换可以将以隔夜利率为基准的借款和贷款利率转换为一个固定利率，这种互换中的固定利率被称为是隔夜指数互换利率。

银行(银行A)可以进行以下交易：

- 在3个月内从隔夜市场借入1亿美元资金，每天将贷款进行延展；
- 将1亿美元资金在LIBOR市场借给另外一家银行(银行B)；
- 利用隔夜指数互换将隔夜市场借款利率转换为固定利率。

通过这一交易，银行A收入3个月期的LIBOR利率，同时支付3个月期的隔夜指数互换利率。我们也许会认为3个月期的隔夜指数互换利率会等于3个月期的LIBOR利率，但实际上，前者通常会更低一些，这是因为银行A会因为承担B在LIBOR贷款中的违约风险而索取回报。

3个月期LIBOR利率与3个月期隔夜指数互换利率的差被称为LIBOR-OIS溢差，该溢差可以用于检验压力市场的受压程度。在正常市场下，该溢差一般在10个基点左右。但在2007~2009年的信用危机中，因为银行之间不愿意进行借贷，在2008年10月，LIBOR-OIS溢差曾高达364个基点。1年以后，这一溢差恢复到了正常水平。但在2010年6月，因为投资者对希腊和其他几个欧洲国家财政状况的担忧，这一溢差又曾经升至30个基点。

越来越多的投资者已经认为隔夜指数互换利率是对无风险利率比LIBOR利率更好的近似。

7.9 货币互换

另外一种较为流行的互换为**货币互换**(currency swap)。最简单的货币互换包括在某种货币下的利息及本金与另一种货币下的利息及本金进行互换。

货币合约要求阐明在两个不同货币下的本金。互换中通常包括起始及最终的货币互换。通常货币本金互换数量的选取在互换开始时的兑换率下大致相同，但在最后交换时两者的价值可能大不一样。

7.9.1 例示

考虑一个虚拟的5年期的IBM与英国石油公司之间的货币互换合约，互换的起始日期为2011年2月1日。假定IBM支付英镑的利率为5%，同时IBM由英国石油公司收入美元的利率为6%。现金流互换频率为一年一次，本金数量分别为1 800万美元及1 000万英镑。这一互换为固定息与固定息(fixed-for-fixed)的货币互换，互换之所以被如此命名是因为每个货币下所对应的均为固定利息。这一互换在图7-10中有所显示。最初，本金互换与图7-10中的箭头方向一致。因此，在互换开始，IBM首先支付1 800万美元并同时收入1 000万英镑。每年IBM收入108万美元(即1 800万的6%)并支付50万英镑(即1 000万英镑的5%)。在互换结束时，IBM支付1 000万英镑并收入1 800万美元。现金流如表7-7所示。

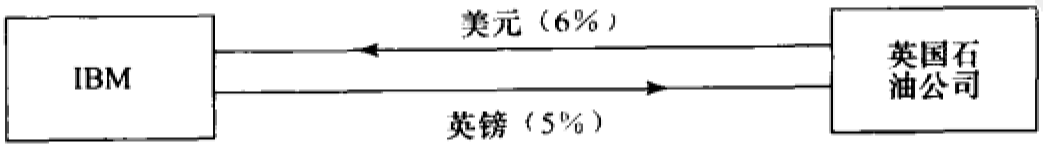


图7-10 货币互换

表 7-7 对于 IBM 而言某货币互换的现金流

日 期	美元现金流（百万美元）	英镑现金流（百万英镑）	日 期	美元现金流（百万美元）	英镑现金流（百万英镑）
2011 年 2 月 1 日	-18.00	+10.00	2014 年 2 月 1 日	+1.08	-0.50
2012 年 2 月 1 日	+1.08	-0.50	2015 年 2 月 1 日	+1.08	-0.50
2013 年 2 月 1 日	+1.08	-0.50	2016 年 2 月 1 日	+19.08	-10.50

7.9.2 利用货币互换来改变贷款及资产的性质

我们这里所描述的互换可以将一种货币下的贷款转化为另外一种货币下的贷款。假定 IBM 能够以 6% 的利率发行 1 800 万美元的债券。货币互换可以将债券转化为英镑债券，债券本金为 1 000万英镑，利率为 5%，最初的本金互换将最初债券的美元收费转化为英镑，之后货币互换的支付将美元利息及本金转化为英镑。

互换也可以用来转化资产的性质。假定 IBM 可以将 1 000 万英镑在英国投资 5 年，其收益率为年率 5%，IBM 认为美元价格同英镑价格比较会有所上涨，因此想将其投资转化为美元的投资。货币互换可以将英镑投资转化为收益率为 6%，本金为 1 800 万美元的投资。

7.9.3 比较优势

货币互换可能是由比较优势造成的。为了说明这一点，我们考虑另一个虚拟的例子。假定通用电气及快达航空公司分别借入美元及澳元（AUD）的 5 年期固定利率（见表 7-8）。表中的数据显示澳元的利率比美元的利率高，并且通用电气在两种货币所对应的信用等级都比快达航空更好，所以在两种货币下通用电气所能得到的利率都好过于快达航空。从互换交易员的角度来看，表 7-8 有趣的一点是：通用电气在两种不同货币下所付利率的差价与快达航空所付利率的差价不等。快达航空在美元所付的利率比通用电气要高 2%，而在澳元市场只高 0.4%。

这一现象与表 7-4 类似。通用电气在美元中有比较优势，快达航空在澳元中有比较优势。表 7-4考虑了某一标准利率互换，我们曾指出比较优势理论并不十分可靠。在这里，我们是在比较不同货币下的利率，因此比较优势理论有一定的可信度。一种造成比较优势的原因是由于纳税环境不同。通用电气所处的位置使得它借入美元资金而在全球范围内经营的税率低于借入澳元所面临的税率。快达航空所处的位置可能刚好相反（注意，我们假定表 7-8 所提供的利率已经反映了这种税率上的优势）。

表 7-8 为货币互换提供基础的利率表

	USD①	AUD①
通用电气	5.0%	7.6%
快达航空公司	7.0%	8.0%

①表中报价体现了不同税率的影响。

假定通用电气想借入 2 000 万澳元，快达航空想借入 1 500 万美元，并且当前的汇率为 0.75（每澳元所对应的美元数量）。这是产生货币互换的完美情形。通用电气及快达航空在自身有比较优势的市场借入资金，即通用电气借入美元，快达航空借入澳元。货币互换可以将通用电气的美元贷款转化为澳元贷款，并同时将快达航空的澳元贷款转化为美元贷款。

我们已经指出，两家公司以美元借入资金的差价为 2%，同时以澳元借入资金的差价为 0.4%。同利率互换的实例类似，我们期望对于所有交易的整体收益为 2% -0.4% =1.6% 年率。

互换有很多构成形式。图 7-11 显示了金融机构介入时的情形。这时，通用电气借入美元，快达航空借入澳元。对通用电气来讲，互换的效应是将美元年率 5% 的利率转换为澳元年率 6.9% 的利率，这比通用电气直接在澳元市场贷款要好 0.7%，比快达航空直接在美元市场贷款也要好 0.7%。金融机构在美元中收入 1.3%，而在澳元中亏损 1.1%。如果我们忽略货币的差别，金融机构净收益为 0.2%。正如预测的那样，所有参与方的收益总和为年率 1.6%。



图7-11 由比较优势而促成的货币互换

金融机构的美元年收益为195 000美元（即1 500万美元的1.3%），同时金融机构的澳元亏损为220 000美元（即2 000万澳元的1.1%）。金融机构可以在远期市场互换期限内每年买入220 000美元以避免外汇风险，这样做可以使金融机构锁定美元盈利。

另外一种互换设计可以使得金融机构锁定美元盈利的差价等于0.2%。图7-12及图7-13是互换的两种变形，这两种变形在实际中采用的可能性不大，原因是这两种做法不能使通用电气及快达航空免于外汇风险（通常来讲，金融机构承担外汇风险比较合理，因为金融机构所处的位置比较利于对冲）。在图7-12中，快达航空承担外汇风险，因为它要支付澳元的利率为年率1.1%，同时要支付美元的利率为年率5.2%。在图7-13中，通用电气承担外汇风险，因为它要收入美元的年率为1.1%，同时付出澳元的年率为8%。

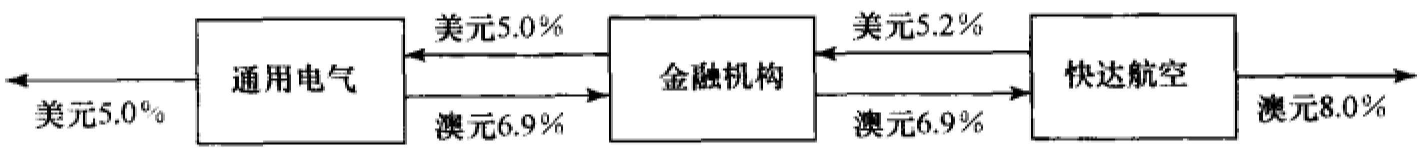


图7-12 货币互换的一种形式：快达航空承担外汇风险



图7-13 货币互换的一种形式：通用电气承担外汇风险

7.10 货币互换的定价

类似于利率互换，固定息与固定息货币互换可以被分解为两个债券的差或一组远期合约的组合。

7.10.1 以债券形式进行定价

如果我们定义V_{swap}为收入美元并支付外币的货币互换的美元价值，那么

$$V_{swap} = B_D - S_0 B_F$$

式中，B_F为互换中外汇现金流所对应债券，并以外币计量的价值，B_D为互换中本国货币的现金流所对应的债券，并以美元计量的价值，S_0为即期汇率（表达形式为一单位外币所对应的美元数量）。互换的价值可以由两个不同货币下的LIBOR、国内货币的利率期限结构及即期汇率来确定。

类似地，收入外币并同时支付美元的互换价值为：

$$V_{swap} = S_0 B_F - B_D$$

例7-4是以上公式的应用。

【例7-4】 假定日元及美元的LIBOR/互换零息利率曲线均为水平。日元利率为年率4%，美元利率为年率8%，以上利率均为连续复利。某金融机构进入一个货币互换，在互换中收入日元利率为5%，付出美元利率为9%，互换的支付每年进行一次。两个货币的本金分别为1 000万美元及12亿日元。互换期限为3年，当前汇率为1美元兑110日元。计算结果见表7-9。

表 7-9　货币互换的定价　　（单位：100 万）

时间	美元债券现金流	美元现金流贴现值	日元债券现金流	日元现金流贴现值
1	0.8	0.731 1	60	57.65
2	0.8	0.668 2	60	55.39
3	0.8	0.610 7	60	53.22
3	10.0	7.633 8	1 200	1 064.30
总计		9.643 9		1 230.55

互换中所对应的美元债券的现金流在第 2 列中显示，以 9% 利率进行贴现所得结果在第 3 列中显示，互换中所对应的日元债券的现金流在第 4 列中显示，以 4% 日元利率进行贴现所得结果在最后一列中显示。

美元债券价格 B_D 为 964.39 万美元，日元债券价格为 12.305 5 亿日元。因此互换价格为：

$$\frac{1\,230.55}{110}-9.643\,9=154.30 \text{ 万美元}$$

7.10.2　以远期合约组合的形式定价

互换合约中的每一个固定息与固定息互换都可以看做是一个外汇远期合约。如 5.7 节所述，外汇远期合约可以在假定远期汇率会被实现的情况下定价。对货币互换，我们可以采用类似的假设。

货币互换在刚刚成交时，价值为 0。采用成交时的汇率转换，如果两个本金相等，那么在本金刚刚交换后，互换的价值也为 0。但是，类似于利率互换，这并不意味着互换中的每一个远期合约的价值都为 0。可以证明，如果货币互换中两个利率非常不同，那么高利率的支付者所处的情形为：对早期支付互换现金流的外汇远期的价值为负，而对最后互换本金时的外汇远期的价值为正。低利率的支付者所处的情形刚好相反，对早期支付互换的外汇远期的价值为正，而对最后互换本金时的外汇远期的价值为负。这些结果对于评估互换的信用风险十分重要。

【例 7-5】　考虑例 7-4 中的情形，假定日元及美元的 LIBOR/互换零息利率曲线均为水平。日元利率为年率 4%，美元利率为年率 9%，以上利率均为连续复利。某金融机构进入一个货币互换，在互换中收入日元的利率为 5%，付出美元的利率为 8%，支付互换每年进行一次。两个货币的本金分别为 1 000 万美元及 12 亿日元。互换期限为 3 年，当前汇率为 1 美元兑 110 日元。表 7-10 总结了计算结果。

表 7-10　以远期合约组合形式对货互换定价　　（单位：100 万）

时间	美元现金流	日元现金流	远期汇率	日元现金流的美元价值	净现金流的美元价值	贴现值
1	−0.8	60	0.009 557	0.573 4	−0.226 6	−0.207 1
2	−0.8	60	0.010 047	0.602 8	−0.197 2	−0.164 7
3	−0.8	60	0.010 562	0.633 7	−0.166 3	−0.126 9
3	−10.0	1 200	0.010 562	12.674 6	+2.674 6	2.041 7
总计						1.543 0

金融机构每年支付 0.08 × 1 000 万 = 80 万美元，并且同时收入 12 亿 × 0.05 = 6 000 万日元。另外，在 3 年后金融机构将支付 1 000 万美元并且收入 12 亿日元。即期汇率为每日元等于

0.009 091 美元，这时 $r=4\%$ 及 $r_f=9\%$，由式(5-9)得出一年时的远期汇率为每日元等于

$$0.009\,091e^{(0.09-0.04)\times 1}=0.009\,557 \text{ 美元}$$

表7-10中所示的第2年及第3年期汇率也可以采用类似的方法来进行计算。远期合约的定价可以假定远期汇率会被实现。如果一年期汇率被实现，在1年期日元现金流的美元价值为 $60\times 0.009\,557=0.573\,4$(百万美元)，因此在1年期净现金流为 $0.8-0.573\,4=-0.226\,6$(百万美元)，其贴现值为 $-0.226\,6e^{-0.09\times 1}=-0.207\,1$(百万美元)，这一价值为1年期现金流互换所对应远期合约的价值。其他期限的远期合约也可以采用类似的方式计算。如表7-10所示，互换的价值为154.3万美元。这与例7-4中将互换分解为一个债券的长头寸及一个债券的短头寸所计算的结果一致。

7.11 信用风险

互换合约是两家公司之间私下达成的合约，这类合约包含信用风险。考虑一家金融机构，该机构与两家公司达成了相互抵消的互换合约(见图7-4、图7-5及图7-7)。如果两家公司均不违约，金融机构完全处于对冲状态，其中一个互换合约价值的下降会被另一个合约价值的上升所抵消。然而，如果互换交易的某一方陷入财务困境并违约，金融机构仍需要保持对另一方的合约中的承诺。

假设图7-4中的合约在签署了一段时间后，金融机构与微软的互换合约的价值为正，但与英特尔的互换合约的价值为负。如果微软违约，金融机构将可能失去这份合约中所有的正价值。为了保持其对冲状态，金融机构必须寻找接替微软公司位置的第三方。为了吸引第三方，金融机构支付给第三方的数量几乎等于在微软违约前金融机构与微软之间合约的价值。

只有当互换对于金融机构具有正价值时，金融机构才会有信用风险的暴露。当对金融机构而言，互换价值为负，这时如果对方陷入财务困境时，会发生什么情况呢？从理论上讲，金融机构能实现这一意外的收益，因为对方的违约有可能使它免除这项债务。在实践中，对方很有可能选择将合约卖给第三者，并重新安排自身的业务以使得具有正价值的合约不会丧失。因此，对于金融机构最合理的假定如下：在对手违约时，如果互换对于金融机构具有正价值，金融机构会蒙受损失；但是如果互换对于金融机构具有负价值，交易对手违约不会对金融机构产生任何影响。这一情形在图7-14中有所展示。

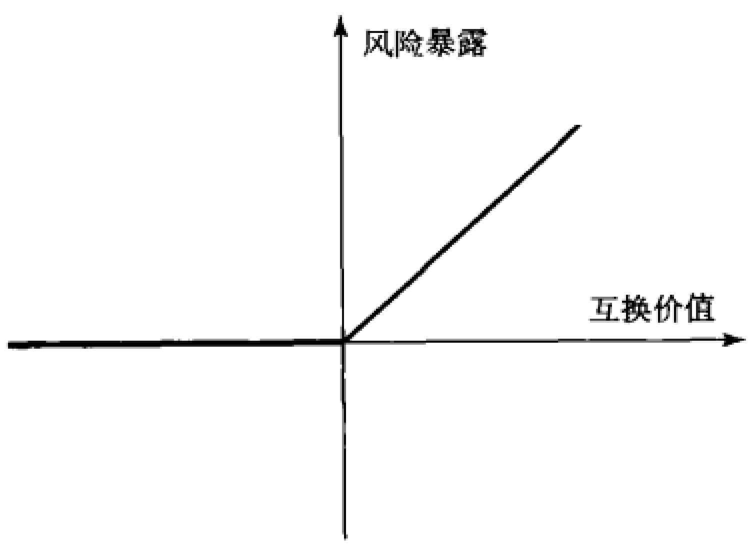


图7-14 互换中的信用风险

在互换中，有时是早期的现金流交换具有正价值，而后面的交换具有负价值(在图7-9a这是对的，在汇率互换中支付利率比收取利率低的时候也是对的)。这些互换很可能在大部分期限内都会有负价值，因此与相反情形相比只有很小的信用风险。

由互换带来的潜在损失远远小于由具有相同本金的贷款所带来的潜在损失，这是因为互换的价值常常只是相应贷款价值的一小部分。由货币互换对手违约所带来的潜在损失，要远远大于利率互换对手违约所带来的潜在损失。这是因为在货币互换中，包括两种不同货币的本金的互换，货币互换在对手违约时会比利率互换更有可能具有更大的正价值。

在任意一项合约中，金融机构应区分其面临的市场风险及信用风险，做到这一点非常重要。如上所述，在合约具有正价值时，对手违约会触发信用风险。市场风险起源于利率、汇率等市场变量使得金融机构的互换合约价值转为负值的可能性。市场风险可以通过进入相互抵消的合约来进行对冲，但信用风险不能被简单地对冲。

业界事例7-2是互换市场中一个很奇怪的故事。这一实例与英国伦敦哈默史密斯-富勒姆行政区(Hammersmith and Fulham)有关。这一故事说明，银行在进行互换交易时，除了承担信用风险及市场风险，有时会面临法律风险。

业界事例7-2　哈默史密斯-富勒姆的故事

在1987～1989年间，英国伦敦市的哈默史密斯-富勒姆行政区进入面值大约60亿英镑、约600个利率互换以及相关交易，这些交易的目的不是为了对冲风险而是为了投机，对这些交易负有直接责任的哈默史密斯-富勒姆的两个职员对这些产品的交易风险及运作方式知之甚少。

截至1989年，因为利率的变化，哈默史密斯-富勒姆行政区因为这些利率互换交易损失了数以亿计英镑，对于与哈默史密斯-富勒姆进行交易的银行而言，这些交易价值连城，此时银行对信用风险产生了担忧，这些银行同哈默史密斯-富勒姆之间进行了反方向的利率互换交易，如果哈默史密斯-富勒姆违约的话，他们也必须对这些反方向交易违约，这些交易会使得哈默史密斯-富勒姆分担部分违约损失。

但真正发生的事情并不是违约，哈默史密斯-富勒姆行政区的审计部门认为利率互换交易必须马上停止，审计部门认为哈默史密斯-富勒姆没有权利交易这些产品，英国法庭也同意这一决定，这一纠纷在后来被一直上告到英国的上议院，上议院的最后裁决为哈默史密斯-富勒姆行政区没有权利交易这些互换产品，议会同时又裁定在将来如果是因为风险管理的需要，哈默史密斯-富勒姆行政区有权利进行利率互换交易，无论如何，同哈默史密斯-富勒姆行政区进行交易的银行对于这些合约被法庭中止感到无比的愤怒。

结算中心

如业界事例2-3阐述的那样，监管当局担心的是可能由场外市场的信用风险引发的系统风险。金融机构之间的交易量巨大，一家金融机构的破产可能会触发其他金融机构破产，从而会给更多的金融机构带来损失，也会触发更多金融机构破产。正是由于这个原因，许多政府在2007年7月开始的金融危机中对一些金融机构进行救助。为了减小系统风险，政府在危机后引入法规，规定对许多互换交易和衍生产品交易实行结算中心的机制，运作方式如2.5节所述。结算中心在交易双方之间充当媒介，在这种机制下，交易双方要支付类似于期货市场的初始保证金，并将保证金保持在一定水平之上。

7.12 其他类型的互换

本章我们已经讨论了LIBOR与固定利率互换的利率互换交易以及某一货币的固定利率与另一货币的固定利率进行互换的货币互换合约。市场也交易其他形式的互换。我们将在第24章、第29章及第30章对这些互换进行详细讨论。我们在这里只提供一个概述。

7.12.1 标准利率互换的变形

在固定利率与浮动利率进行交换的互换合约中，LIBOR是最为普遍的参考浮动利率。在本章的实例中，LIBOR的期限(tenor，即付款频率)为6个月，具有1个月、3个月及12个月期限的LIBOR互换在市场上也常常出现。浮动利率的期限不一定与固定利率的期限一致(事实上，在美国，标准利率互换中的LIBOR期限为3个月，付款频率为每半年一次)。LIBOR是最常见的浮动利率，但是其他形式的浮动利率，例如商业票据(CP)利率，也常被采用。有时浮动利率与浮动

利率的利率互换也会成交。例如，3 个月期商业票据利率加上 10 个基点可能会与 3 个月期限的 LIBOR 进行互换，两个浮动利率对应的本金相同(某公司的资产及负债的参考利率为不同的浮动利率，如果这家公司想对冲其风险暴露，可以采用这种利率互换)。

在互换合约中，本金可在互换期限内进行变化以满足交易对手的需求。在一个本金分期减少的**摊还互换**(amortizing swap)中，本金能够以事先确定的方式递减(这一设计可能是与本金分期减少的贷款相对应)。在一个**递升互换**(step-up swap)中，本金以某种确定的方式递增(这一设计可能对应于某贷款中的本金的增加)。在**延期互换**(deferred swap)或**远期互换**(forward swap)中，双方交换利息直到将来的某一时刻才开始。有时互换合约的浮动利率所对应的本金与固定利率所对应的本金会有所不同。

固定期限互换(constant maturity swap，CMS)是 LIBOR 与某互换利率之间的互换合约。例如，在今后 5 年内每 6 个月将 6 个月期限的 LIBOR 与 10 年期的互换利率互换，双方所对应的本金相同。类似地，**固定期限的国债互换**(constant maturity treasury swap，CMT swap)是 LIBOR 与某个特定国债利率(例如 10 年期的国债利率)的互换。

在一个**复合利率互换**(compounding swap)中，双方的利率都会以某既定形式被复合到互换的末端，这种互换的付款日只有一个，即互换的到期日。在 **LIBOR 后置互换**(LIBOR-in-arrears swap)中，LIBOR 的观察日期与付款日期重合(像在 7.1 节中解释的那样，在一个标准的互换中，在某个时间所观察的 LIBOR 用于决定在下一个付款日的支付数量)。在一个**区间互换**(accrual swap)中，某一方的利息只有在浮动利率在一定范围内时才进行累计。

7.12.2 其他货币互换

本节我们考虑了固定息与固定息的货币互换，另一种货币互换为固定息与浮动息的互换。在这一互换中，一种货币下的浮动利率(通常为 LIBOR)与另一种货币下的固定利率进行交换，这是一个固定-浮动利率互换与固定-固定货币互换的组合，这一交易被称为**交叉货币利率互换**(cross-currency interest rate swap)。另一种货币互换为**浮动息与浮动息**(float-for-float)的货币互换，即其中一种货币的浮动利率与另一种货币的浮动利率进行互换。

有时在某一种货币所观察到的利率被应用到另一种货币的本金上，比如在美国观察到的 3 个月 LIBOR 与在英国观察到的 LIBOR 进行互换，这里的浮动利率所对应的本金均为 1 000 万英镑。这类互换被称为**跨货币互换**(differential swap)或 Quanto 互换。

7.12.3 股权互换

股权互换(equity swap)是将某个股指的整体收益(股息及资本收益的总和)与某固定利率或浮动利率进行互换。例如，互换可能是在今后每 6 个月由 S&P500 的整体收益与 LIBOR 互换，互换双方的本金相同。股权互换可以被证券组合经理用来将固定及浮动资产收益转化为股指收益，反之亦然。

7.12.4 期权

有时在互换中嵌有期权。例如，在**可延期互换**(extendable swap)中，互换的一方有权延长互换的期限。在**可赎回互换**(puttable swap)中，一方可以提前结束互换。**互换期权**(option on swap 或 swaption)在市场上也进行交易。这时期权的持有人可以在将来进入一个互换，其中与浮动利率进行互换的固定利率要事先约定。

7.12.5 商品互换、波动率互换

商品互换(commodity swap)实际等价于具有不同期限但具有同一执行价格的商品远期合约。

在波动率互换(volatility swap)中，首先要阐明一定的时间段序列，在每一个时间段，互换的一方支付固定波动率，而另一方支付在这一时间段实现的历史价格波动率。在计算支付量时，双方所对应的本金相同。

互换的变化形式似乎只受金融工程师的想象力及企业资金部总管与基金经理对于特殊交易结构渴望的限制。在第 32 章，我们将讨论著名的“5/30”互换，这一互换是宝洁公司与信孚银行之间的协议，其中互换中的支付取决于30 天的商业票据利率、30 年期债券价格及 5 年期国债的收益率。

小 结

市场上两种最常见的互换为利率互换及货币互换。在利率互换中，一方同意向另一方支付对应于一定本金的固定利息作为回报，同时收入对应于同一本金及期限的浮动利率利息。在货币互换中，一方同意以一种货币及一定本金数量向另一方支付一定利率所对应的利息作为回报，同时收入对应于另一种货币的利息。

在利率互换中，本金并不进行交换。在货币互换中，本金通常在互换的开始及结束时进行互换。对于支付外币利率的一方，在互换开始时收入外币本金，同时付出本国货币的本金，在互换结束时，要支出外币本金并同时收入本国货币本金。

利率互换可以用来将浮动利率贷款转化为固定利率贷款，反之亦然。同时，它也可以将浮动收益投资转化为固定收益投资，反之亦然。货币互换可以将在一种货币下的贷款转化为另一种货币下的贷款，也可以将在一种货币下的投资转化为另一种货币下的投资。

我们有两种方法来对利率互换及货币互换定价。在第一种方法中，互换被分解为一个债券的长头寸和另一个债券的短头寸。在第二种方法中，互换被当做远期合约的组合。

当金融机构与两个不同的对手签署了一对相互抵消的互换时，会面临信用风险。当与某一对手的互换对于金融机构有正价值时，如果这一交易对手违约，金融机构就会遭受损失，因为这时它仍然要向另一方兑现其互换协议的承诺。

推荐阅读

Baz, J., and M. Pascutti. "Alternative Swap Contracts Analysis and Pricing," *Journal of Derivatives*, (Winter 1996): 7–21.

Brown, K.C., and D.J. Smith. *Interest Rate and Currency Swaps: A Tutorial*. Association for Investment Management and Research, 1996.

Cooper, I., and A. Mello. "The Default Risk in Interest Rate Swaps," *Journal of Finance*, 46, 2 (1991): 597–620.

Dattatreya, R.E., and K. Hotta. *Advanced Interest Rate and Currency Swaps: State-of-the-Art Products, Strategies, and Risk Management Applications*. Irwin, 1993.

Flavell, R. *Swaps and Other Instruments*. Chichester: Wiley, 2002.

Gupta, A., and M.G. Subrahmanyam. "An Empirical Examination of the Convexity Bias in the Pricing of Interest Rate Swaps," *Journal of Financial Economics*, 55, 2 (2000): 239–79.

Litzenberger, R.H. "Swaps: Plain and Fanciful," *Journal of Finance*, 47, 3 (1992): 831–50.

Minton, B.A. "An Empirical Examination of the Basic Valuation Models for Interest Rate Swaps," *Journal of Financial Economics*, 44, 2 (1997): 251–77.

Sun, T., S. Sundaresan, and C. Wang. "Interest Rate Swaps: An Empirical Investigation," *Journal of Financial Economics*, 34, 1 (1993): 77–99.

Titman, S. "Interest Rate Swaps and Corporate Financing Choices," *Journal of Finance*, 47, 4 (1992): 1503–16.

练习题

7.1 公司A和B可以按表7-11所示利率借入2 000万美元5年期的贷款。

表 7-11

	固定利率	浮动利率
公司A	5.0%	LIBOR +0.1%
公司B	6.4%	LIBOR +0.6%

公司A想得到浮动利率贷款，公司B想得到固定利率贷款。设计一个互换，其中某银行为中介，银行的净收益为0.1%，并且同时对两个公司而言，这一互换具有同样的吸引力。

7.2 公司X希望以固定率借入美元，公司Y希望以固定利率借入日元。经即期汇率转换后，双方所需要的金额大体相等。经过税率调整后，两家公司可以得到的利率报价如表7-12所示。

表 7-12

	日元	美元
公司X	5.0%	9.6%
公司Y	6.5%	10.0%

设计一个互换，其中某银行为中介，其收益率为50个基点，并使得该互换对双方有相同的吸引力，在互换中要确保银行承担所有的汇率风险。

7.3 一个面值为1亿美元的互换的剩余期限为10个月。根据互换条款，6个月期LIBOR利率与固定利率7%(每半年复利一次)在进行交换。对于所有期限的现金流互换，浮动利率为LIBOR，固定利率卖出买入价的平均值为每年5%(连续复利)。在2个月前，6个月期LIBOR利率为每年4.6%。对于支付浮动息方，这一互换的当前价格是多少？对于支付固定息方，价格又是多少？

7.4 解释互换利率的含义。互换利率与平价收益率的关系是什么？

7.5 一个货币的剩余期限还有15个月，这一互换将年率为10%、本金为2 000万英镑的利息转换为年率为6%、本金为3 000万美元的利息。英国及美国的期限结构均为水平。如果互换今天成交，互换中的美元利率为4%，英镑利率为7%，所有利率均为每年复利。当前即期汇率为1.85。对于支付英镑的一方而言，这一互换的价格是多少？对于支付美元的一方而言，这一互换的价格又是多少？

7.6 解释在一份金融合约中，信用风险与市场风险的区别。

7.7 一个企业资金部主管告诉你，他刚刚以一个有竞争力的5.2%的固定利率签署了一个5年期的贷款。资金部主管解释说，他取得这一利率是以LIBOR加上150个基点借入资金并同时进入一个LIBOR与固定利率3.7%的互换来完成的，他解释说，之所以这么做是因为他的公司在浮动利率市场具有比较优势。这一企业资金部主管忽略了什么？

7.8 解释当一家银行进入相互抵消的互换时将会面临信用风险。

7.9 公司X及公司Y对500万10年投资有表7-13所示的收益率。

表 7-13

	固定利率	浮动利率
公司X	8.0%	LIBOR
公司Y	8.8%	LIBOR

公司X想得到固定收益的投资，公司Y想得到浮动收益的投资。设计一个互换，其中银行为中介，其收益率为年率0.2%，并对于公司X和公司Y有同样的吸引力。

7.10 某金融机构与公司X进行了一笔利率互换交易。在互换交易中，金融机构收入每年10%并同时付出6个月期的LIBOR，互换的本金为1 000万美元，互换期限为5年，支付的频率为6个月。这时对于所有的期限，利率约为8%(每半年复利一次)。金融机构会有什么损失？假定在2年半时的LIBOR为每年9%。

7.11 公司A及公司B可以获得表7-14所示的利率(经税率调节后)。

表 7-14

	A	B
美元(浮动利率)	LIBOR +0.5%	LIBOR +1.0%
加元(固定利率)	5.0%	6.5%

假定公司A想借入美元浮动利率，公司B想借入加元固定利率。一个金融机构计划安排一个货币互换并想从中盈利50个基点。如果这一互换对于A与B有同样的吸引力，A和B最终支付的利率分别为多少?

7.12 某金融机构与公司Y进行了一笔10年期的货币互换交易。在互换交易中，金融机构收入瑞士法郎的利率为每年3%，并同时付出美元的利率为每年8%。利息支付是每年一次。本金分别为700万美元及1 000万瑞士法郎。假定公司Y在第6年末宣布破产，这时汇率为0.8(每法郎为0.8美元)。破产给金融机构带来的费用是多少?假定在第6年，对于所有期限瑞士法郎利率为每年3%，美元利率为每年8%。所有的利率均为每年复利一次。

7.13 在采用期货合约来对外汇风险进行对冲以后，图7-11中所示金融机构的平均利差会大于还是会小于20个基点。解释你的答案。

7.14 “信用风险很高的公司是那些不可以直接进入固定利率市场的公司。这些公司在利率互换中往往支付固定利率并同时收入浮动利率。”假定这种说法为正确，你认为这样会提高还是降低金融机构互换组合中的风险?假定利率很高时，公司违约的可能性很大。

7.15 为什么对应于同一本金，利率互换在违约时的预期损失小于贷款在违约时的预期损失?

7.16 一家银行发现它的资产与负债不匹配。银行在运作过程中，收入浮动利率存款并且发放固定利率贷款。如何运用互换来抵消风险?

7.17 解释如何对于某一货币的浮动利率与另一货币的固定利率的互换来定价。

7.18 LIBOR零息曲线为水平5%(连续复利)，期限一直到1.5年。2年和3年期每半年支付一次的互换利率分别为5.4%及5.69%。估计期限为2年、2.5年和3年的LIBOR零息利率(假定2.5年互换利率为2年和3年互换利率的平均值)。

作业题

7.19 (a)公司A可以得到如表7-3所示的利率，并可以按6.45%的固定利率借款3年，通过互换，它可以将这个固定利率交换成什么样的浮动利率?

(b)公司B可以得到如表7-3所示的利率，并可以按LIBOR加7.5个基点借款5年，通过互换，它可以将这个浮动利率交换成什么样的固定利率?

7.20 (a)公司X可以得到如表7-3所示的利率，并可以按5.5%的固定利率投资4年，通过互换，它可以将这个固定利率交换成什么样的浮动利率?

(b)公司Y可以得到如表7-3所示的利率，并可以按LIBOR加50个基点的浮动利率投资10年，通过互换，它可以将这个浮动利率交换成什么样的固定利率?

7.21 一个1年期LIBOR利率为10%(每年复利)。一家银行将固定利率与12月期LIBOR互换，付款频率为1年1次。2年期和3年期互换利率(每年复利)分别为每年11%和12%。估计2年和3年期的LIBOR零息利率。

7.22 公司A是一家英国制造商，它想以固定利率借入美元。公司B是一家美国的跨国公司，它想以固定利率进入英镑。两家公司可以获得如表7-15所示的年利率报价。

表 7-15

	英镑	美元
公司A	11.0%	7.0%
公司B	10.6%	6.2%

设计一个互换，其中某银行为中介，每年盈利为10个基点，并保证这个互换对A和B两家公司均有15个基点的盈利。

7.23 根据某个利率互换的条款，一家金融机构同意支付每年10%，并同时收入LIBOR，互换本金为1亿美元，每3个月支付一次，这一互换还有14个月的剩余期限。对于所有期限，与3个月LIBOR进行互换的固定互换利率买入卖出价的平均利率为每年12%，1个月以前的LIBOR利率为每年11.8%。所有的利率均为每季度复利一次，该互换的价格为多少？

7.24 假定美国及澳大利亚的利率期限结构均为水平。美元的利率为每年7%，澳元的利率为每年9%。每一澳元的当前价格为0.62美元。一个互换协议阐明：金融机构支付每年8%的澳元并且收入每年4%的美元。两个不同货币所对应的本金分别为1 200万美元及2 000万澳元。支付为每年一次，其中一次支付刚刚发生。互换剩余期限还有2年。对于金融机构而言，这一互换的价值是多少？假定所有利率均为连续复利。

7.25 一家英国公司X想在美国资金市场以固定利率借入5 000万美元，期限为5年。因为这家公司在美国不太知名，直接借入资金几乎不可能，但是公司能够以每年12%的固定利率借入英镑。一家美国公司Y想借入5 000万英镑，期限为5年。公司Y不能借入这笔英镑资金，但它可以取得年率为10.5%的美元资金。美国5年期的国债收益率为9.5%，英国5年期的国债收益率为10.5%。构造一个适当的货币互换以达到以上目的，并使得金融中介机构的收益率为每年0.5%。

第 8 章

证券化与 2007 年信用危机

远期、期货、互换以及期权等衍生产品的主要用途是将风险从经济体中的一个实体转移到另一个实体，本书前 7 章已经着重讨论了远期、期货和互换。在讨论期权之前，我们考虑在经济生活中转移风险的另外一种重要方式：证券化。

由于在 2007 年开始的信用危机（有时也称为“信用紧缩”）中所扮演的重要角色，证券化已成为一个备受关注的话题。此次危机起源于美国房屋按揭所产生的金融产品，之后迅速从美国蔓延至其他国家，并且从金融市场扩散到实体经济。有的金融机构破产，其他更多的机构不得不接受政府救助。毫无疑问，21 世纪的第一个 10 年对整个金融行业而言是灾难性的。

在本章中，我们将讨论证券化的本质以及它在危机中所扮演的角色。我们还将深入了解美国按揭市场、资产支持证券、债务抵押债券（CDO）、瀑布式现金流和金融市场动机的重要性。

8.1 证券化

传统的银行经营模式是吸收存款和发放贷款。在 20 世纪 60 年代，美国的银行发现随着住房按揭贷款需求的日益增加，传统的模式已经无法跟上步伐，从而导致了抵押证券市场的发展。各类按揭贷款组合由此产生，其现金流（利息和本金）被打包成债券卖给投资者。美国政府在 1968 年创立了政府国家住房按揭协会（GNMA，又叫吉利美 Ginnie Mae）。吉利美有偿担保合格住房贷款的利息和本金的按时支付，并向投资者发行抵押证券。

尽管银行是住房按揭贷款的发行人，但是它们并没有把贷款保留在资产负债表上。证券化使得银行发放贷款的速度远远快于其存款增加的速度。其中，吉利美保证受保护的按揭抵押证券（protected MBS）投资者免受违约风险。⊖

20 世纪 80 年代，按揭市场开发的证券化手段被应用到其他资产上，比如美国的汽车贷款和信用卡应收款。在世界其他地方证券化同样变得越来越流行。随着证券化市场的不断发展，投资者慢慢地开始接受没有违约担保的证券。

8.1.1 资产支持证券

图 8-1 展示了在 2000 ~ 2007 年使用的一种简单的证券化方式，这被称为**资产支持证券**（asset-backed security，ABS）。发行贷款的银行把这些产生现金流的贷款组合卖给一个特殊目的机构（special purpose vehicle，SPV），然后现金流被分配到不同的份额（tranche）中。图 8-1 中有 3 个份额，分别是高级份额（senior tranche），中层份额（mezzanine tranche）和股权份额（equity tranche）。

⊖ 然而，MBS 投资者仍要承受按揭贷款被提前偿还的不确定性。当利率较低，投资者没有好的投资机会时提前偿还的可能性最大。在刚开始发行 MBS 时，许多 MBS 投资者得到的回报比期望的要低，因为他们没有考虑这一点。

总体资产有1亿美元的面额，派生出的高级份额占8 000万美元，中层份额占1 500万美元，股权级份额占500万美元。高级份额的回报率为LIBOR加上60个基点，中层级的回报率为LIBOR加上250个基点，而股权级的回报率为LIBOR加上2 000个基点。

乍看起来股权份额最合算，但实际并非如此。股权份额拿到回报的可能性要小于其他两个等级的份额，证券化的现金流是按所谓的瀑布形式(waterfall)进行分配的，一般情况下瀑布现金流分布如图8-2所示，资产产生的现金流首先要分配给最高级份额，直到这个份额收到所有的承诺回报后，现金流才会向低一层份额进行分配。假定高层份额所承诺的回报可以被满足，这时现金流才会进一步向中层份额来分配，如果中层份额所承诺的回报也被满足，而且现金流仍有剩余，这时现金流才会向股权份额进行分配。

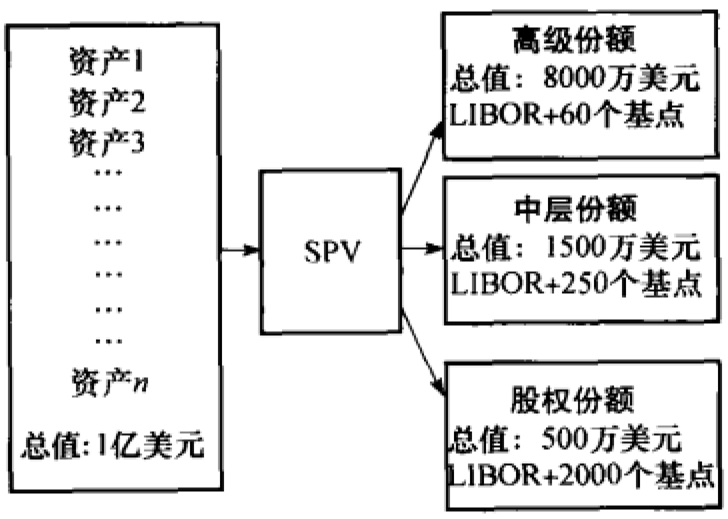


图8-1 资产支持证券(简化版)

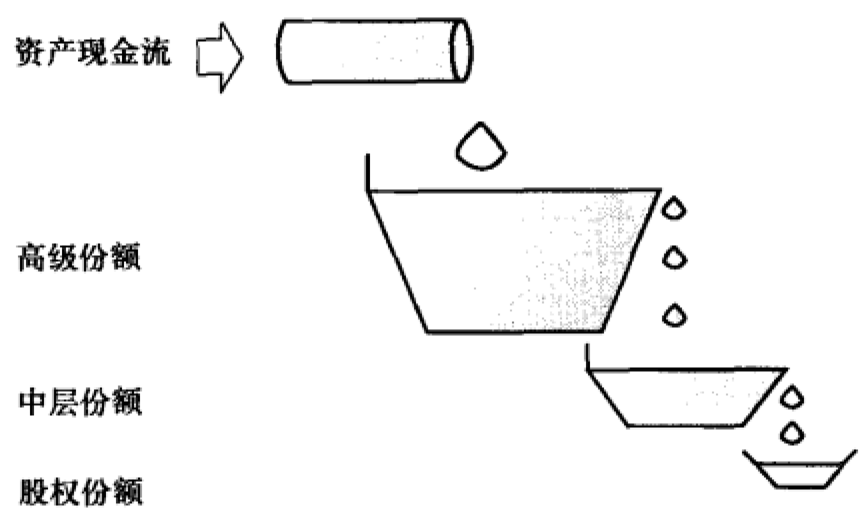


图8-2 资产支持证券的瀑布式现金流

各份额所收到的本金取决于资产的损失程度。瀑布式现金流的情况基本如下：最初5%的资产损失由股权份额承担，如果损失超过5%，股权份额将会损失全部本金，中层份额会承担剩余损失；如果损失超过20%，中层份额将损失全部本金，高级份额会接受剩余损失。

我们可以用两种方式来看资产支持证券的结构：一种是以图8-2所示的瀑布式的现金流形式，现金流首先会分配给高级份额，然后是中层份额，最后才是股权份额；另一种是以承担损失的方式，股权份额首先承担损失，然后是中层份额，最后才是高级份额。穆迪、标普和惠誉等评级机构在证券化过程中扮演了重要角色。如图8-1所示的资产支持证券的设计方式是保证高级份额的信用评级为AAA，中层份额的信用评级通常为BBB，而股权份额通常没有信用评级。

我们这里给出的讨论是对资产支持证券描述的一个简化形式。一般来讲，资产支持证券会有多于3个以上的份额，份额的评级也比较广泛。在我们描述的瀑布式现金流规则中，现金流的分配是按次序进行的，即现金流首先分配给最高级的份额，然后是次高级，并依此类推。在实际中，现金流的分配规则远比这里所讲的更复杂，阐述现金流准确分配方式的法律文件一般会长达数百页。另一个复杂之处在于证券化资产常常有以下两种形式的超额抵押(over-collateralization)机制：份额的面值总和低于抵押资产的面值；对份额许诺回报的加权平均低于抵押资产回报的加权平均。

8.1.2 资产支持证券的债务抵押债券

寻找AAA级的高级份额的投资者并不困难，因为这个份额许诺的回报与AAA级的债券相比更具有吸引力。股权份额常常由按揭贷款发行人持有，或者被卖给对冲基金。

寻找中层份额的投资者会比较困难，由此产生了以资产支持证券为资产支持的债券(即ABS的ABS)，其产生过程如图8-3所示。许多如图8-1中所述的中层份额被放在一起形成一个组合，这个组合相对应的现金流风险被再次分层，其过程与图8-1类似，这样产生的结构叫做资产支持

证券的债务抵押债券(即 ABS CDO 或中层 ABS CDO)。在图 8-3 的例子中，ABS CDO 高级份额的面值占 ABS 中层份额总面值的 65%；ABS CDO 中层份额占 25%，而剩下的 ABS CDO 股权份额占 10%。这种结构的设计是为了使得 ABS CDO 的高级份额能被评为 AAA 级，这就意味着在这个例子中 AAA 级的证券为占相关资产组合面值的 90%(80% 加上 65% 的 15%)。这一比率看起来已经很高，但如果考虑将中层 ABS CDO 进一步证券化(事实上确实如此)，那么 AAA 级证券所占的比率将会更高。

在图 8-3 所示的例子中，如果相关按揭资产的损失小于 20%，ABS 的 AAA 级份额可以收到其承诺的收益和本金，因为所有损失都由其他次级份额承担了。图 8-2 所示 ABS CDO 的 AAA 级份额会面临更大的危险。当相关按揭组合的损失小于 10.25% 时，该份额会收到其承诺回报和本金，这时 ABS 中层份额所承担的损失小于或等于 ABS 本金面值的 5.25%。因为 ABS CDO 的面值为 ABS 面值的 15%，其所对应的最大损失(以 ABS 资产为基准)为 5.25/15，即 35% 的面值。因此，ABS CDO 的股权份额与中层份额可能会全部耗尽，但最高级份额没有任何损失。

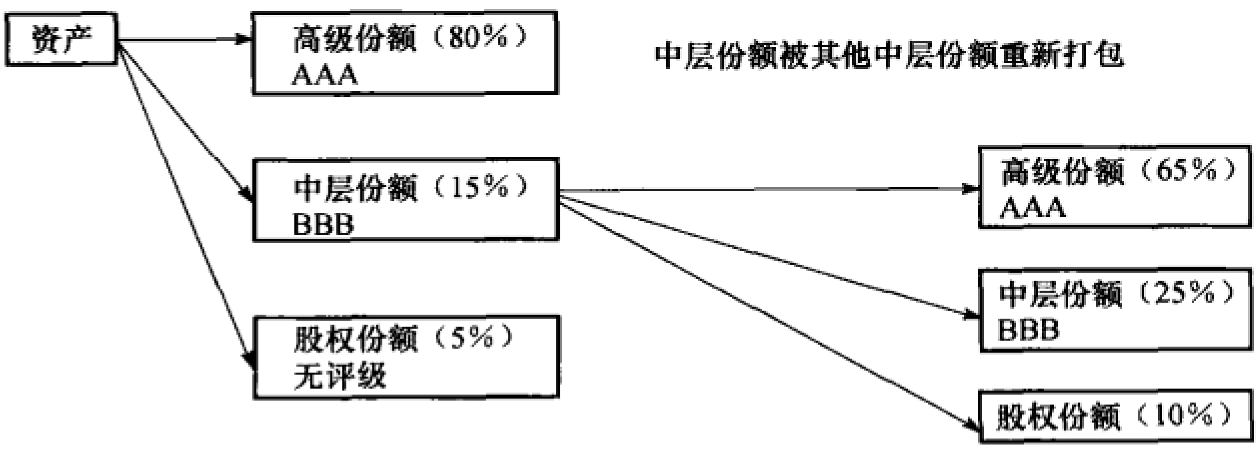


图 8-3 资产支持证券的债务抵押债券（简化版）

当相关资产的损失高于 10.25% 时，ABS CDO 的高级份额会有损失。例如，考虑相关资产的损失为 17% 的情形，在这 17% 的损失中，有 5% 是 ABS 股权份额的损失，剩下 12% 是 ABS 中层份额的损失。所以 ABS 中层份额的损失率为 12/15，即 80% 的面值。最早的 35% 由 ABS CDO 的股权和中层份额来承担，因此 ABS CDO 的高级份额损失率为 45/65，即 69.2%。表 8-1 是对这一结果和其他损失情形的总结。

表 8-1 估计图 8-3 中的 ABS CDO 的 AAA 级份额的损失 （%）

标的资产损失	ABS 中层份额损失	ABS CDO 股权份额损失	ABS CDO 中层份额损失	ABS CDO 高级份额损失
10	33.3	100.0	93.3	0.0
13	53.3	100.0	100.0	28.2
17	80.0	100.0	100.0	69.2
20	100.0	100.0	100.0	100.0

8.2 美国住房市场

图 8-4 展示了从 1987 年 1 月至 2010 年 3 月的标准普尔/Case-Shiller 10 城市房价指数(S&P/Case-Shiller Composite-10 index)。这个指数跟踪最大 10 个都市的房产价格。该图表明大约从 2000 年开始，房产价格的增长速度远远超过了前一个 10 年的增长速度。2002 ~ 2005 年的低利率是造成价格增长的一个重要原因，但住房市场价格泡沫形成的最重要原因是因为房屋贷款政策的放松。

在 2000 ~ 2006 年间，美国按揭市场的一个显著特点是次级按揭贷款的激增。次级按揭贷款的风险明显要高于按揭贷款的平均风险。在 2000 年以前，大部分被分类为次级的按揭贷款是借

款人的第二个按揭(second mortgage)，但在 2000 年以后，金融机构逐渐接受了第一按揭次级贷款(subprime first mortgage)这一概念。

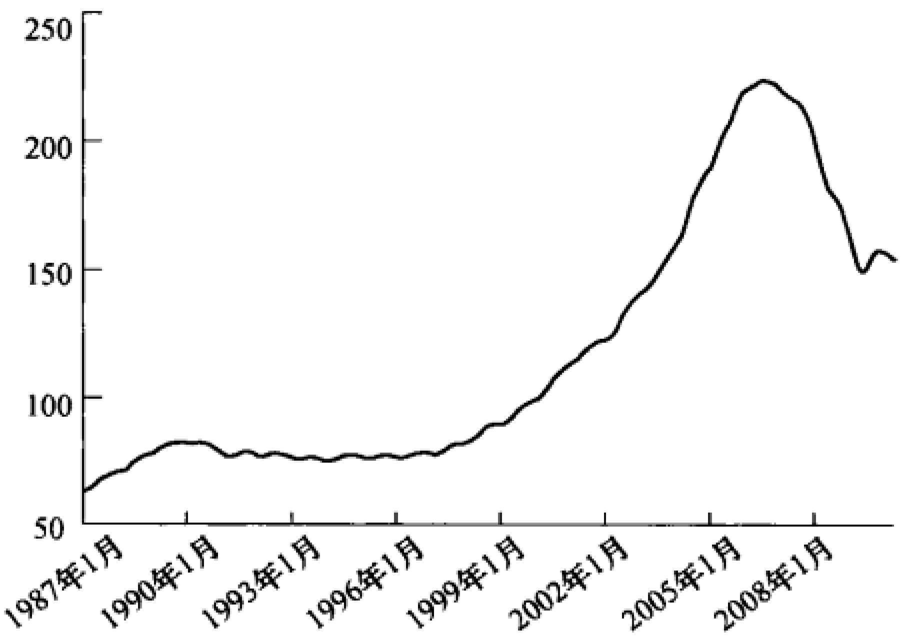


图 8-4　标普/Case-Shiller 美国 10 城市房价指数(1987 ~ 2010 年)

8.2.1　借贷标准的放松

贷款标准的放松以及次贷按揭的增长，对那些原本信用不够好、没有资格取得贷款的家庭而言，这时候购买住房也成了现实。这些家庭增加了市场对房屋的需求，因此房价开始上涨。对贷款经纪人和贷款商而言，房屋价格上涨以及大量的借贷需求无疑是个好消息，更多的借贷意味着更多的盈利，并且房屋价格的上涨意味着贷款会有很好的抵押品，即使贷款人(即借入贷款者)违约，丧失回赎权事件(foreclousure)也不会造成损失。

贷款经纪人与贷款机构如何保持盈利的增长呢？它们所面临的问题是随着房屋价格的上升，首次买房的购房者会越来越难以承担高房价。为了吸引新客户，贷款经纪人与贷款机构必须设法进一步降低贷款标准。果不其然，它们真的这样做了。贷款标准降低的结果是贷款面额与房屋价值的比例提高了，这时市场开发出了可调整利率按揭(adjustable rate mortgages，ARMs)，在这一产品中，延续 2 ~ 3 年的优惠利率("teaser" rate)很低，而随后的利率会很高[㊀]。一个典型的前期优惠利率为 6%，而在优惠利率期结束后，利率会被调整为 LIBOR + 6%[㊁]。但是，市场上也有过 1% 或 2% 的低优惠利率的报道，在这期间，贷款机构在审查贷款申请时也变得越来越漫不经心，以至于常常对申请贷款人的收入和其他有关信息都不去仔细审查。

8.2.2　次贷按揭的证券化

次级按揭贷款通常以图 8-1 至图 8-3 的形式证券化。投资于次贷份额的投资者通常没有收回利息和本金的保证。证券化在此次危机中扮演了重要的角色。当贷款发放人知道放出去的贷款会被证券化时，其发放行为就会有所变化[㊂]。在发放新的贷款时，它们关心的问题不再是"这是不是我们要求的信用级别"，而是"这个贷款是否可以卖给别人而赚钱?"

㊀ 当房地产价格上升时，贷款机构预料贷款人会在低利率结束前付清按揭。但是，次级贷款中对提前偿付的惩罚可能会很高，而类似的惩罚在高端客户按揭贷款中一般是不存在的。

㊁ 例如，一个"2/28"可调整利率按揭("2/28"ARM)是指该产品在最初两年为固定利率，而在今后的 28 年的中为浮动利率。

㊂ 见 B. J. Keys, T. Mukherjee, A. Seru and V. Vig, "Did Securization Lead to Lax Screeening? Evidence from Subprime Loans," *Quarterly Journal of Economics*, 125, 1(February 2010): 307 - 63.

当按揭被证券化后，按揭支持证券的买入方所得到的唯一信息是贷款与价值的比率(loan-to-value ratio)(即贷款数量与房屋估价的比率)，以及贷款人的FICO分数[一]。关于贷款申请人的其他信息被认为是无关紧要的，所以贷款发放人常常不做检查。对于贷款发行方而言，最重要的是能否将按揭贷款卖给其他人，而这主要取决于贷款与价值比率，以及贷款申请人的FICO分数。

然而即使通过了贷款与价值比率和FICO分数检验的按揭也可能具有较差的信用质量，这一点颇耐人寻味。这可能是因为迫于贷款人的压力，有时资产价格估测人(property assessor)会给资产定出很高的价格，有时一些潜在的贷款人可能会在得到一些咨询后，去设法改善自身的FICO分数[二]。

为什么政府没有对贷款机构的行为进行审慎管理呢？答案是自20世纪90年代开始，美国政府一直致力于扩大住房拥有率，并常常对贷款机构施压以使其加大对中低收入群体的贷款力度。有些州的立法机构(例如，俄亥俄州和乔治亚州)曾表示对贷款现状的忧虑，并且试图通过立法来抑制掠夺性贷款现象[三]，但是法院认定，全国性的贷款标准应具有优先权。

在信用紧缩之前，市场上有一系列的术语用于描述按揭发放过程，其中一个术语为“骗子贷款”(liar loan)，用来描述按揭贷款申请人因为知道在贷款申请过程中不会进行背景调查，从而在申请表上进行撒谎的行为。另一个描述借贷人的术语为“NINJA”(no income，no jobs，no assets)[四]。

8.2.3 泡沫破裂

美国房屋市场的一个特性是在许多州，按揭具有无追索(nonrecourse)条款，这意味着当贷款人违约时，贷款借出方可以收回住房，但对贷款人的其他财产是不能追索的，因此贷款人事实上持有一个免费的美式看跌期权，可以在任何时候以贷款余额价值将房屋售于贷款借出方。无追索条款特性鼓励了市场投机行为，这也是造成2000~2006年市场泡沫的原因之一。

所有的泡沫最终都会破裂，住房价格泡沫也不例外。在2007年，当初期优惠利率结束后，许多贷款持有者发现自己并没有能力支付贷款，这造成了丧失赎回权的上升，使得许多房屋重新回到市场上，从而触发了房屋价格的下跌。那些借贷数量为房屋价格100%或接近100%的贷款人这时发现他们房屋的净资产(即房屋价格扣除贷款余额)是负的。市场参与者在后来认识到免费看跌期权的价值很高，但为时已晚。如果贷款人的净资产为负，这时最好的策略是以住房去支付贷款余额，房屋随之在市场上拍卖，进而导致了市场价格的进一步下跌。

如果假设所有按揭违约人都面临相同的处境，这将是一个很大的错误假设。有些人不能承受按揭付款，当他们放弃房屋时会麻烦重重，但市场上有许多违约者是出于投机，他们买房屋是为了出租，这些人会择时行使看跌期权，这会给房屋的租客带来很大麻烦。有报告显示，有的房屋拥有人(并非是投机者)十分有创意地抽取看跌期权的价值，当他们将钥匙还给住房贷款借出方后，随即就以更好的价格买入其他那些已经丧失赎回权的住房。假设两个相邻并且结构相似的房屋均已丧失了赎回权，两个房屋的按揭均为25万美元，而且两个房屋的价值均为20万元，丧失赎回权的拍卖价均为17万美元。这时房屋拥有者的最佳策略是什么？答案是每个房屋拥有者均行使看跌期权，并随即买入邻居的屋子(当时市场上确实可以在对个人信用等级没有影响的前提下做到这一点)。

美国并不是房产价格唯一下跌的国家，世界上许多其他国家的房价也难逃厄运，英国的房价在危机中也遭受了严重的打击。

[一] FICO是由Fair Isaac公司开发的信用分数，其范围介于300~850之间，它被广泛地用于按揭贷款中。

[二] 一种做法是持续几个月对信用卡进行按时付款。

[三] 掠夺性贷款(predatory lending)是指贷款借出人以欺骗的手段与客户签订的不公平贷款合约。

[四] 没有收入、没有工作、没有资产的缩写。——译者注

8.2.4 损失

当丧失赎回权的情形越来越多时，按揭贷款的损失也与日俱增。有人或许认为如果房价下跌35%，违约按揭贷款最大损失也至多为面值的35%。事实上，损失远远大于此。丧失赎回权的房子通常各方面条件都很差，而且售价只是危机前房价的一小部分。在2008年和2009年有报道称，丧失赎回权房屋的平均损失高达75%。

购买由按揭产生的ABS份额的投资者遭受了重大损失。次贷产生的ABS份额的价值是由一个叫ABX的一系列指数反映的。指数显示，在2007年底，BBB级的份额损失达到了其原始值的80%；而到2009年中期，这一份额的损失高达97%。由BBB级份额再生成的ABS CDO份额是由一个叫TABX的一系列指数反映的，指数显示，到2007年底，原本AAA级的CDO份额损失达到了其原始价值的80%，到2009年中期，该类证券变得几乎一文不值。

像瑞银、美林、花旗这样的金融机构拥有大量份额，从而遭受了巨大损失；保险业巨头AIG由于为ABS CDO的AAA级提供损失担保，也损失惨重。政府不得不出手救助许多金融机构。在金融史上比2008年更糟的年头并不多，贝尔斯登被摩根大通收购；美林被美国银行收购；高盛和摩根士丹利从之前的投行变成了银行控股公司，同时运作商业银行业务和投资银行业务；雷曼兄弟最终破产。

8.2.5 信用危机

由住房按揭贷款支持的证券损失导致了一场严重的信用危机。在2006年，银行持有充足的资本金，取得贷款相对容易，而且信用溢差也很低(信用溢差是指贷款利率高于无风险利率的那一部分)。到2008年，情况完全不同，银行的资本金由于损失而大幅下降；银行变得更厌恶风险而不愿意借出贷款，有良好信用记录的个人和公司都觉得难以取得资金贷款，信用溢差急剧上升。全世界经历了几十年来最坏的经济萧条。TED溢差是3个月的LIBOR和3个月的美国国债利率之差，在正常的市场情况下，TED溢差为30~50个基点，但是在2008年10月，这个溢差曾高达450个基点。

8.3 问题的症结

“非理性繁荣”是美联储前主席格林斯潘用来描述20世纪90年代牛市投资者的行为的。这一描述也适用于信用危机之前的年头。按揭贷款发行人、住房按揭ABS和ABS CDO的投资者，以及那些出售份额保护的公司都认为好时光会永远持续下去，他们认为美国的房价将持续上升，在一两个地区房价也许会下跌，但是如图8-4所示的大幅度下跌是始料未及的。

2007年开始的危机是由许多原因造成的，按揭贷款发放人放宽了贷款要求，证券化产品使得按揭发放人在获利的情况下把信用风险转移给投资者，评级公司从其擅长的传统债券评级业务转向对结构性产品的评级，对结构性产品的评级相对较新，而且没有足够的历史数据。投资者购买的产品非常复杂，并且在很多情况下，投资者和评级公司所掌握的标的资产质量信息是不准确或不完整的。结构性产品的投资者以为他们发现了印钞机，往往依赖评级机构的评级，而自身缺乏对标的资产风险的认识。与传统AAA级债券的回报相比，AAA级结构性产品的回报更高。

如图8-1和图8-3所示的结构性产品高度依赖于标的资产之间的违约相关性，违约相关性用于衡量不同贷款人在同一时间违约的可能性。如果在图8-1中，标的资产的违约相关性很低，AAA级份额经受损失的可能很小，但当违约相关性上升时，高级份额风险变得越来越大。图8-3中的ABS CDO的份额更是高度依赖于违约相关性。

如果按揭贷款呈现较小的违约相关性(就像在正常市场情况下一样)，这时同时违约的可能性很小，所以由按揭产生的AAA级ABS和ABS CDO是很安全的。但是，违约相关性在市场受压的

情况下会相应上升，这也是许多投资者遭受损失的原因，同时也导致了高违约率。

市场上有将具有某个等级的份额债券与类似评级的一般债券视为相同的倾向，评级机构公布了它们用于对份额评级的标准，标普和惠誉的方法是确保份额损失的概率与类似级别的债券损失概率相同，而穆迪的方法是确保份额的预期损失与同类级别的债券预期损失相同[⊖]。评级机构的评级程序设计只能保证份额的损失分布和债券的损失分布某一方面相匹配，但是分布其他信息可能千差万别。

事实上，份额的覆盖区间通常很窄，这使得份额和债券的区别越发突出。如图 8-1 所示，AAA 级份额通常占有 80% 的面额，但是其他份额的个数多达 15 ~ 20 个的情况也很常见。这些次级份额可能只占 1% 或 2% 的面额（或者叫 1% 或 2% 的覆盖区间），如此窄的区间使得份额要么毫发无损，要么损失殆尽，投资者获得部分补偿的机会很小（而债券投资人通常可以得到补偿）。考虑如下情况，一个 BBB 级的份额损失覆盖区间为 5% ~6%，如果标的组合的损失小于 5%，该份额是安全的；如果标的组合的损失大于 6%，份额全部损失；只有当损失在 5% ~6% 之间时，投资者才可能得到部分补偿。

许多投资者忽略了一个很窄的 BBB 份额与一个 BBB 债券的区别，这种区别造成了由 ABS 的 BBB 级份额产生的 ABS CDO 份额比由 BBB 级债券产生的 CDO 要危险得多。通常可以合理地假设 BBB 级债券组合的损失不会超过 25%，而表 8-1 显示由 BBB 级份额组成的组合可以轻易地遭受 100% 的损失，对只有 1% 或 2% 的份额而言，完全损失的可能性更是如此。

8.3.1 监管套利

大部分按揭贷款是由银行发行的，同时银行也是由按揭贷款派生出的份额产品的投资者。为什么银行会选择将按揭进行证券化，同时又买入证券化产品呢？这里的奥秘在于**监管套利**（regulatory arbitrage），即持有由按揭组合所产生的份额资产所需的资本金要小于直接持有按揭本身所需要的资本金。

8.3.2 动机

此次危机给我们带来的教训之一就是动机的重要性。经济学家使用名词代理成本（agency cost）来描述在某个商业行为中，两个不同参与者的利益不完全一致的情形。本章以上的讨论说明美国按揭市场的贷款发行、证券化和债券出售过程被代理成本搞得千疮百孔。

按揭发行机构的动机是确保按揭抵押产品发行人和 ABS CDO 发行人可以接受自身发放的贷款。房产估价师的动机是讨好贷款机构而将房价估得越高越好，这样会造成贷款与价值的比率达到最低（讨好房贷者的结果是会从贷款机构那里拿到更多的生意）。份额资产发行人关心的是份额资产将被如何评级，其目的是使得 AAA 级的份额资产数量达到最大，因此份额资产发行人会利用评级公司公布的评级标准来达到这一目的。评级公司的收入来自于被评级证券的发行人，评级公司大约有一半的收入来自于结构化产品。

另外一个代理成本源自于金融机构及其雇员之间。雇员的工资分成三类：基本工资、年终现金分红以及股票和股票期权。金融机构中许多不同级别的雇员（特别是交易员）的工资很大一部分是以年终现金分红形式给出的，这种工资形式侧重于短期表现，如果某个雇员在某年盈利很高而在今后的几年中损失很大，该雇员在第一年会收到很高的现金分红而在今后几年不需要归还已得到的分红（雇员也许因为第二年的损失而失去工作，即使这样，对他来讲，情况也不是太糟。令人惊讶的是，金融机构好像很愿意雇用那些简历上有亏损记录的求职者）。

⊖ 关于评级机构的评级标准和评级合理性分析，见 J. Hull and A. White, "Rating Arbitrage and Structured Products," Working Paper, University of Toronto, and "The Risk of the Tranches Created from Mortgages," *Financial Analysts Journal*, 66, 5(2010): 54 -67.

假设你是一位在 2006 年投资于 ABS CDO 资产的一家金融机构的雇员，你基本已经确认美国房屋市场泡沫并认定这一泡沫最终破裂，但是你仍然可能决定进行 ABS CDO 投资，如果这一泡沫在 2006 年底之前不破裂，你仍可能在 2006 年底收到一笔可观的分红。

8.4 危机带来的后果

对于世界不同地区的银行，巴塞尔银行监管委员会（The Basel Committee on Banking Supervision）制定了监管规则的基调，除此之外，银行还要受约于在其运作的国家的监管规则。信用危机造成的一个后果是新的监管规则和法令将会像海啸般蜂拥而至。

巴塞尔银行监管委员会为不同国家和地区的银行监管当局制定了一个国际标准，该委员会在信用危机前所制定的监管规则分别被称为巴塞尔 I 和巴塞尔 Ⅱ。业界事例 8-1 总结了这些监管规则。监管规则的中心要点是对银行所面临的风险而设定的资本金数量做出了要求 。[⊖]在 2009 年末，委员会又提出了巴塞尔 Ⅲ，其宗旨是提高银行持有资本金的数量和质量，同时也对银行的流动性要求制定了标准。危机带给我们的教训之一是金融机构的失败常常是由于流动性，在业界事例 4-3 中，我们对这一点曾进行过阐述，出现流动性困难的原因是金融机构的资金来源常常是短期的，当市场对金融机构的运作状态产生忧虑时（可能是对的，也可能是错的），这些资金来源很快会枯竭。

业界事例 8-1　　巴塞尔 Ⅰ、巴塞尔 Ⅱ 和巴塞尔 Ⅲ

在 20 世纪 80 年代后期，银行的业务变得越来越全球化，世界上不同国家的监管当局认识到制定一个国际监管框架的必要性。因此，巴塞尔委员会应运而生。在 1988 年，该委员会制定了一套规则，阐明银行对自身的信用风险必须持有资本金，这些规则也就是巴塞尔Ⅰ。在 1995 年，巴塞尔 Ⅰ中又添加了关于净额结算（netting）的细则（我们将在第 23 章对净额结算进行讨论）。在 1996 年，委员会颁布了关于市场风险新的资本金规则，这些规则在 1998 年得以实施。在 1999 年，委员会对信用风险资本金的计算方法进行了一次重大修改，同时对操作风险的资本金也进行了阐述。这些规则也就是在 2007 年，即危机前所实施的巴塞尔 Ⅱ。在危机以后，委员会又提出了巴塞尔 Ⅲ。

在危机以前，巴塞尔委员会的许多监管规则涉及风险价值度的计算，风险价值度是为了测定银行面临损失的程度，我们将在第 21 章对这一概念进行讨论。风险价值度在巴塞尔监管规则中将会继续扮演重要角色，但委员会也意识到由压力市场数据而不只是单单由正常市场数据来计算风险价值度的必要性，委员会同时也更加强调**压力测试**（stress testing），其要点是检测银行在极其不利的市场环境下的表现。

如前面章节所述，许多国家正在引入规则要求对于某些场外衍生产品进行中心结算。在美国，商品期货交易委员会（The Commodity Futures and Trading Commmission）有权决定哪一类场外衍生品必须通过中心结算机构进行交易。

有些国家的政府对银行和银行雇员的奖金实施了特殊税法，其目的是为了补偿危机所触发的损失。例如，在 2009 年 12 月，英国政府对超过 25 000 英镑的奖金实行超级税率（super-tax），英国政府在 2010 年 6 月的政府预算报告中称，对银行的负债要进行征税，并指出政府也在考虑向

⊖ 关于巴塞尔委员会的细节工作以及银行监管规定，见约翰 · 赫尔《风险管理与金融机构》（原书第 2 版），机械工业出版社，2010 年。

国际货币基金组织提出征收金融活动税(financial activities tax)的建议。

在2010年，美国通过立法限制那些受联邦政府保护的银行从事衍生产品交易或参与自营交易，这种法令也许会造成银行将那些从事衍生产品交易或自营交易的部门从银行分离出去。

小结

银行通过证券化的方式把贷款和其他产生收入的资产打包成证券，然后卖给投资者。这样做可以将贷款从银行的资产负债表中消除，从而使银行能比以前更快地发展贷款业务。第一批被证券化的贷款是1960~1970年的美国房屋按揭贷款。由于政府国家住房按揭协会[㊀]的担保，购买房屋抵押证券的投资者没有贷款人违约的风险。之后，汽车贷款、公司贷款、信用卡应收款以及次级贷款纷纷被证券化。很多情况下，这些证券的投资者没有违约保护。

在2007开始的信用危机中，证券化扮演了重要的角色。由次贷产生的份额被进一步打包形成新的份额。危机的源头可以追溯到美国的房屋市场，当时的美国政府热衷于鼓励住房拥有率，同时利率一度很低，按揭经纪人和按揭发行人发现通过放宽借贷标准可以使得自身的业务更具吸引力。证券化使得投资者承担的信用风险不同于按揭发行人的风险，评级机构对证券化的高级份额给出了AAA的评级，由于它的收益率比其他AAA级债券要高，AAA级份额在市场上备受投资者的青睐。银行认为“好时光”将会持续，因为交易员的薪酬只看重短期盈利，所以银行的雇员无视房屋市场的泡沫以及泡沫对一些非常复杂产品的影响。

当初次购房者和投资者一起进入市场时，房价上涨。有些按揭包括适用于最初两三年的优惠利率，当优惠利率结束后，许多贷款的还款利息会显著增加，因不能偿还高利息贷款，贷款人只能违约，从而造成了丧失赎回权的增大，同时也增大了卖方市场的供应，2000~2006年市场上涨现象终于戛然而止，投机者及其他投资者发现他们所欠按揭的价值大于其违约的房屋价值(即净资产为负)，从而加大了房价的下滑幅度。

银行正在为危机付出代价，新的立法和规则将削弱银行的盈利能力。例如，银行所持有的资本金数量有所增加，银行将面临新的关于流动性的监管要求，场外衍生品已经受到更严格的监管，并受约于新的税务规定。

推荐阅读

Gorton, G. "The Subprime Panic," *European Financial Management*, 15, 1 (2008): 10–46.

Hull, J.C. "The Financial Crisis of 2007: Another Case of Irrational Exuberance," in: *The Finance Crisis and Rescue: What Went Wrong? Why? What Lessons Can be Learned*. University of Toronto Press, 2008.

Hull, J.C., and A. White. "The Risk of the Tranches Created from Mortgages," *Financial Analysts Journal*, 66, 5 (2010): 54–67.

Keys, B.J., T. Mukherjee, A. Seru, and V. Vig. "Did Securitization Lead to Lax Screening? Evidence from Subprime Loans," *Quarterly Journal of Economics*, 125, 1 (February 2010): 307–62.

Krinsman, A.N. "Subprime Mortgage Meltdown: How Did It Happen and How Will It End," *Journal of Structured Finance*, Summer 2007, 13–19.

Mian, A., and A. Sufi. "The Consequences of Mortgage Credit Expansion: Evidence from the U.S. Mortgage Default Crisis," *Quarterly Journal of Economics*, 124, 4 (November 2009): 1449–96.

Zimmerman, T. "The Great Subprime Meltdown," *Journal of Structured Finance*, Fall 2007, 7–20.

Securitization and the Credit Crisis of 2007.

㊀ 政府国家住房按揭协会(Government National Mortgage Association)，又叫吉利美(GinnieMae)。——译者注

练习题

8.1 吉利美(Ginnie Mae)在20世纪70年代的按揭抵押证券市场中所扮演的角色是什么?

8.2 解释概念：ABS和ABS CDO。

8.3 什么是中层份额?

8.4 证券化瀑布式现金流是指什么?

8.5 表8-1中针对以下损失率的数字分别是多少：12%和15%。

8.6 什么是次级贷款?

8.7 为什么2000~2007年间的房价增长是一个泡沫?

8.8 在2000~2007年间，为什么按揭发放人不经常审查申请人所提供的信息?

8.9 市场是如何错误判断ABS CDO风险的?

8.10 什么是"代理成本"? 在信用危机中，"代理成本"又是如何体现的?

8.11 一个ABS CDO是如何派生出来的? 动机又是什么?

8.12 解释违约相关性的增加对ABS高级份额风险的影响。对股权级份额又有什么影响?

8.13 解释为什么AAA级的ABS CDO份额比AAA级的ABS份额的风险更高。

8.14 解释为什么年终奖有时被称为"短期薪酬"。

作业题

8.15 假定如图8-3所示的ABS和ABS CDO中，分配给高级、中层、股权份额的本金比例分别为70%、20%、10%，这会对表8-1产生什么影响?

8.16 如果如图8-3中ABS的中层份额的覆盖范围(宽度)变小，同时中层份额本金减少的数量被平分于高级份额和股权份额中，这时会发生什么? 尤其是对表8-1有何影响?



第 9 章

期权市场机制

我们曾经在第 1 章中引入了期权，本章我们将解释期权市场组织结构、市场专用术语、市场的交易过程以及抵押担保金的设定等。在后面的章节里我们将考虑涉及期权的交易策略、期权价格是如何确定的以及期权的对冲。本章将主要讨论股票期权，货币期权、股指期权及期货期权合约将在第 16 章和第 17 章中讨论。

期权与远期合约及期货产品有着本质的不同，期权给持有者某种权力去做什么事情，但期权持有者不一定必须行使权力。与之相反，在远期及期货合约中，合约的双方有义务执行合约。进入远期及期货合约，交易者不用付费(保证金的要求除外)，而对于期权产品，持有者需要在最初时付费。当我们用图形来展示期权的收益时，一般都忽略贴现效应，因此所得的收益为期权最终的回报减去最初的费用。本章将采用这种做法。

9.1 期权的类型

如第 1 章所述，期权有两种基本类型：**看涨期权**(call option)给期权持有者在将来一定时刻以一定价格买入某资产的权利，**看跌期权**(put option)给期权持有者在将来一定时刻以一定价格卖出某资产的权利。期权合约中注明的日期被称为**到期日**(expiration date)或**满期日**(maturity date)，期权合约中所注明的价格被称为**执行价格**(exercise price)或**敲定价格**(strike price)。

期权可以是**美式期权**(American option)或者是**欧式期权**(European option)，这些名称与期权交易的地理位置毫无关系。美式期权可在到期日之前的任何时刻行使，而欧式期权只能在到期日才能行使。大多数交易所交易的期权为美式期权，但通常来讲，欧式期权比美元期权更容易分析，一些美式期权的性质常常从相应的欧式期权的性质中类推而来。

9.1.1 看涨期权

考虑某投资者买入执行价格为 100 美元的 100 股股票的看涨期权。假定当前股票的市场价格为 98 美元，期权的到期日为 4 个月，购买一股股票的期权价格为 5 美元。持有者的最初投资为 500 美元。因为期权为欧式，持有者只能在到期日才能行使期权。如果在到期日，股票价格小于 100 美元，很明显投资者不会行使期权(没有必要以 100 美元的价格买入市场价格低于 100 美元的股票)。因此投资者会损失全部 500 美元的最初投资；如果在到期日，股票价格大于 100 美元，期权将会被行使。假定在到期日股票价格为 115 美元。通过行使期权，期权持有人可以每股 100 美元的价格买入 100 股股票，如果投资者马上将股票变卖，每股可以赚入 15 美元。忽略交易费用，投资者可以挣得 1 500 美元。将最初的期权费用考虑在内，投资者的盈利为 1 000 美元。

图 9-1 显示了本例中投资者买入看涨期权的净收益与最终的股票价格的关系。我们应该认识

到期权持有人有时在行使期权后，整体来讲仍承受损失，对这一点有所认识很重要。例如，假定在到期日的股票价格为 102 美元，期权持有人会行使期权，这时收益为 100 ×（102 - 100）= 200 美元，将最初的期权费用考虑在内，期权持有人的损失为 300 美元。可能有人会认为此时期权持有人不应该行使期权，但这样一来整体损失会高达 500 美元，这比行使期权时 300 美元的损失还要高。一般来讲，当到期日股票价格高于执行价格时，期权持有人就应该行使期权。

9.1.2　看跌期权

看涨期权的持有人希望股票价格上涨，而看跌期权的持有人则希望股票价格下跌。考虑一个购买了执行价格为 70 美元的 100 股股票的看跌期权。假定当前股票价格为 65 美元，期权的到期日为 3 个月，卖出一股股票的期权价格为 7 美元，投者的最初投资为 700 美元。因为期权为欧式，即这一期权只能在到期日股票价格低于 70 美元时才会被行使。假定在到期日股票价格为 55 美元，按照期权的约定，期权持有人可以以每股 70 美元的价格卖出股票，因此投资者每股收益为 15 美元，即整体收益为 1 500 美元(我们仍然忽略交易费用)。将最初的期权费用考虑在内，投资者的净收益为 800 美元。这里并不能保证投资者一定会盈利。如果在到期日股票价格高于 70 美元，期权在到期时会一文不值，投资者会损失 700 美元。图 9-2 显示了投资者买入看跌期权的净收益与最终股票价格之间的关系。

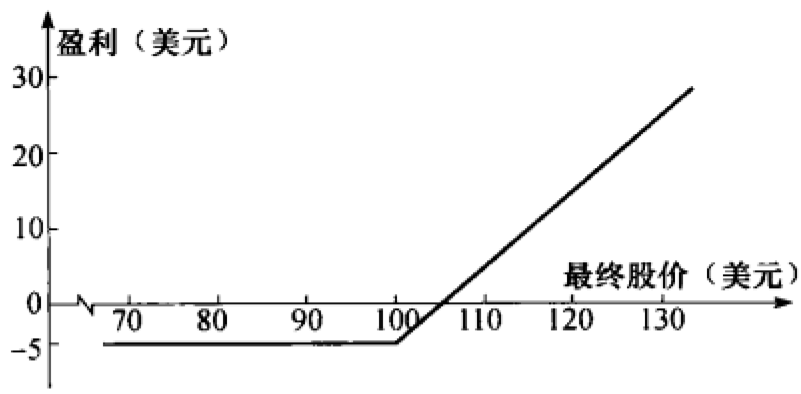


图 9-1　买入一股股票的看涨期权收益曲线
（期权价格 =5 美元，执行价格 =100 美元）

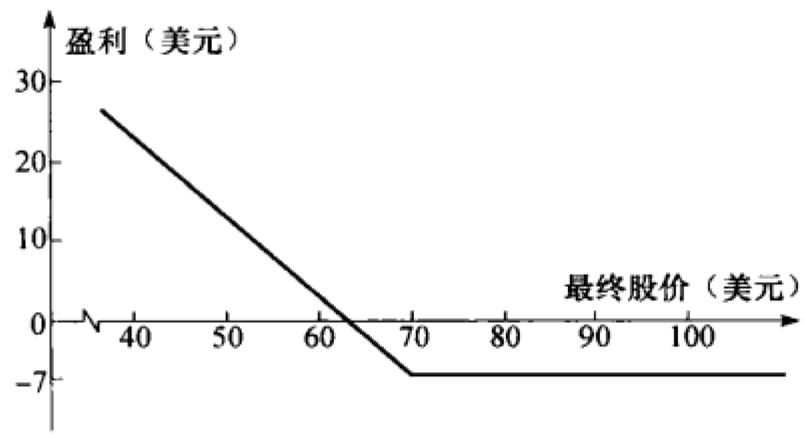


图 9-2　买入看跌期权的收益曲线
（期权价格 =7 美元，执行价格 =70 美元）

9.1.3　提前行使期权

如上所述，交易所的交易期权通常为美式期权而不是欧式期权。这意味着在前面所述的投资者并不一定要等到到期日时才行使期权，我们后面将看到有时在到期日之前行使期权为最优。

9.2　期权头寸

任何一个期权都有两个方面。一方为取得期权的长头寸方(即买入期权)，另一方为取得期权的短头寸方[即卖出期权或**对期权进行承约**(written the option)]。卖出期权的一方在最初收入期权费，但在今后有潜在的义务，承约方的收益与买入期权一方的收益刚好相反。图 9-3 及图 9-4 分别是图 9-1 及图 9-2 的变形，它们显示了期权承约人的盈亏与最终股票价格之间的关系。

期权交易共有 4 种头寸形式：

- 看涨期权长头寸；
- 看跌期权长头寸；
- 看涨期权短头寸；
- 看跌期权短头寸。

利用对投资者来讲的期权终值或在到期日时的收益来区别期权头寸常常是十分有用的，这时

期权的最初费用不包括在计算中。如果 K 为执行价格，S_T 为标的资产的最终价格，欧式看涨期权长头寸的收益为

$$\max(S_T - K, 0)$$

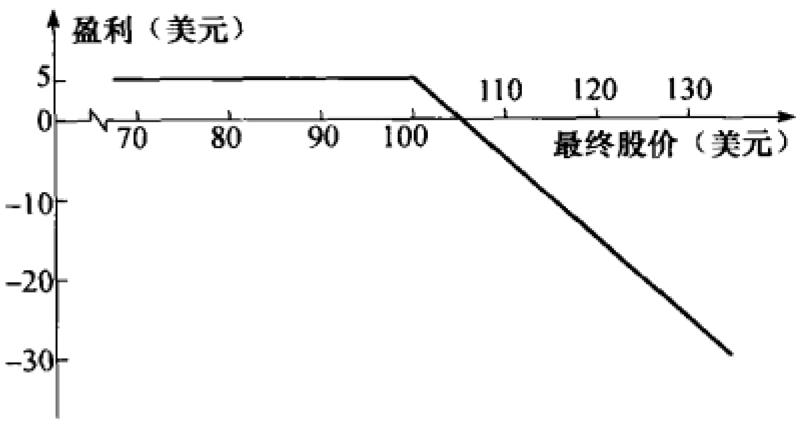


图 9-3 卖出看涨期权的收益图
（期权价格 =5 美元，执行价格 =100 美元）

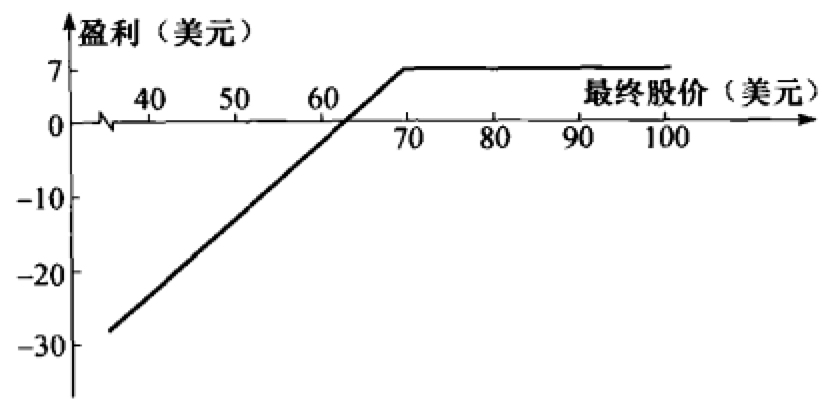


图 9-4 卖出看跌期权的收益图
（期权价格 =7 美元，执行价格 =70 美元）

这反映了在 $S_T > K$ 时，期权会被行使，而在 $S_T \leqslant K$ 时，期权将不会被行使。欧式看涨期权的短头寸的收益为

$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$$

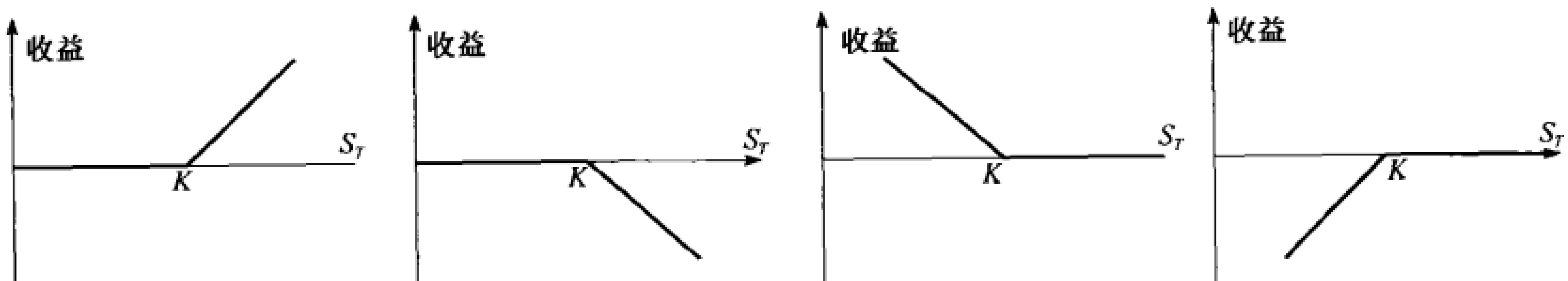
欧式看跌期权的长头寸持有者的收益为

$$\max(K - S_T, 0)$$

欧式看跌期权的短头寸的收益为

$$-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$$

图 9-5 展示了期权的收益图形。



a）看涨期权长头寸　b）看涨期权短头寸　c）看跌期权长头寸　d）看跌期权短头寸

图 9-5 欧式期权收益

注：K 是指执行价格；S_T 是指满期时的资产价格。

9.3 标的资产

本节将简要介绍标的资产为股票、货币、股指及期货等期权的交易。

9.3.1 股票期权

大部分股票期权的交易是在交易所进行的。美国主要交易股票期权的交易所包括芝加哥期权交易所（www.cboe.com）；NASDAQ OMX（www.nasdaqtrader.com，2008 年被费城股票交易所收购）；NASE Euronext（www.euronext.com，2008 年被美国股票交易所收购）；国际证券交易所（www.iseoptions.com）和波士顿期权交易所（www.bostonoptions.com）。有 2 500 多种股票可以进行期权交易。在一份期权合约中，持有者可以买入或卖出 100 股股票，因为股票本身通常是以 100 股为单位进行交易的，所以这一规定对投资者而言非常有利。

9.3.2 外汇期权

大部分外汇期权交易是在场外市场进行的，在交易所也有一些交易。美国交易外汇期权的交易所包括 NASDAQ OMX，它提供关于多种货币的欧式期权合约。期权合约的规模是利用美元买入或卖出 1 万单位的外币(日元合约规模为 100 万日元)。第 16 章将进一步讨论货币期权。

9.3.3 指数期权

世界各地有许多不同种类的指数期权在场外市场及交易所交易市场进行交易。在美国，交易所里最流行的合约为 S&P 500 股指(SPX)期权，S&P 100 股指(OEX)期权，纳斯达克 100 股指(The Nasdaq 100 Index，NDX)期权及道琼斯工业指数(Dow Jones Industrial Index，DJX)期权。所有这些期权都在芝加哥期权交易所进行，大多数为欧式期权。其中 S&P 100 股指期权是个例外，该期权为美式期权。每一份合约可以购买或出售指数的 100 倍。合约结算总是以现金结算，而不是交割指数交易组合。例如，一个 S&P 100 看涨期权的执行价格为 980 美元。当指数价格为 992 美元时，期权会被行使，承约者需向期权持有者支付(992 - 980) × 100 = 1 200 美元。我们将在第 16 章讨论股指期权。

9.3.4 期货期权

当交易所交易一种期货时，该交易所也往往交易这一期货上的期权。期货期权的到期日往往会在期货交割期之前。当看跌期权被行使时，期权持有者从期权承约方处获得标的期货合约的长头寸及期货价格超出执行价格的现金额。当看跌期权被行使时，期权持有者从期权承约方获得标的期货合约的短头寸以及执行价格超出期货价值的现金额。我们将在第 17 章进一步讨论期货期权。

9.4 股票期权的特征

本章以下内容，我们将着重讨论股票期权。前面讲过，美国交易所内交易的股票期权为可以购买或出售 100 股股票的美式期权。关于合约的细节，例如，到期日、执行价格、股息处理方式、投资者的头寸限额等均由交易所确定。

9.4.1 到期日

用于描述股票期权的一个术语是到期日所在的月份，因此 1 月份 IBM 看涨期权的到期日为 1 月份的某一天。精确的到期日期为到期月份的第 3 个星期五之后的星期六。期权的最后交易日为到期月的第 3 个星期五。期权的长头方通常在这个星期五的美国中部时间下午 4：30 之前给经纪人发出行使期权指令。经纪人可在第 2 天中部时间晚上 10：59 之前完成书面报告并通知交易所准备行使期权。

股票期权是在 1 月、2 月和 3 月的循环期上交易。1 月份循环包括 1 月份、4 月份、7 月份及 10 月份；2 月份循环包括 2 月份、5 月份、8 月份及 11 月份；3 月份循环包括 3 月份、6 月份、9 月份及 12 月份。如果本月份的到期日尚未来到，交易的期权包括当月到期期权、下个月到期的期权和当前月循环中下两个到期月的期权；如果当月的到期日已过，交易期权包括下个月到期的期权、再下一个月到期的期权以及这一个月循环中下两个到期月的期权。例如，假定 IBM 股票期权处在 1 月份循环中。在 1 月初，此股票期权的到期月份为 1 月份、2 月份、4 月份和 7 月份；在 1 月末，此股票期权的到期月份为 2 月份、3 月份、4 月份及 7 月份，在 5 月初，此股票期权的到期月份为 5 月份、6 月份、7 月份及 10 月份等。某一个期权到期后，另一个期权交易随即开始。

美国的交易所交易大约800只股票的长期限的期权，这类期权被称为LEAPS(长期资产预期证券，Long Term Equity Anticipation Securities)。这些期权的期限可能会长达39个月，LEAPS的到期日总是在1月份。

9.4.2 执行价格

执行价格通常由交易所选定，只有那些被选定执行价格的期权才能被承约，执行价格的价格间隔分别为2.5美元、5美元或10美元。一般来讲，当股票价格介于5~25美元之间时，执行价格的间隔为2.5美元；当股票价格介于25~200美元之间时，执行价格的间隔为5美元；当股票价格高于200美元时，执行价格的间隔为10美元。接下来我们将要解释，股票拆股及股息均会造成非标准的执行价格。

当一个新的到期日被引入时，交易所通常会选择两个或三个最接近股票当前价格的执行价格。如果股票价格变动超出了最高执行价格及最低执行价格的范围，交易中通常会引入新的执行价格的期权。为了说明这些规则，假定在交易10月份期权开始时，股票价格为84美元，交易所最初提供的看涨期权与看跌期权的执行价格为80美元、85美元与90美元。当股票价格上升到90美元以上时，交易所很有可能会提供执行价格为95美元的期权；当股票下降到80美元以下时，交易所会很可能提供执行价格为75美元的期权，等等。

9.4.3 术语

对于任何资产，在任何给定的时刻市场上都可能有许多不同的期权在交易。考虑某股票，其上有4个到期日及5个不同执行价格的期权。如果对于每个到期日及执行价格均有相应的看涨期权与看跌期权交易，这样就会有40种不同的期权合约。所有类型相同的期权(看涨或看跌)都可以归为一个**期权类**(option class)。例如，IBM的看涨期权为一类，IBM的看跌期权为另一类。一个**期权系列**(option series)是由具有相同到期日及执行价格的某个给定类型的所有期权。换句话说，某期权系列是指市场交易中某个特定的合约。10月份70 IBM看涨期权是一个期权系列。

期权可分为**实值期权**(in-the-money option)、**平值期权**(at-the-money option)及**虚值期权**(out-of-the-money option)。如果S为股票价格，K为执行价格，对于看涨期权，当$S>K$时为实值期权，当$S=K$时为平值期权，而当$S<K$时为虚值期权。对于看跌期权，当$S<K$时为实值期权，当$S=K$时为平值期权，而当$S>K$时为虚值期权。显然，只有在期权为实值期权时才会被行使。如果不考虑交易费用，若期权一直没有被提前行使的话，实值期权一般在到期日会被行使。

一个期权的**内涵价值**(intrinsic value)定义为0与期权立即被行使的价值的最大值。一个看涨期权内涵价值为$\max(S-K, 0)$；一个看跌期权的内涵价值为$\max(K-S, 0)$。一个实值美式期权的价值至少等于其内涵价值，因为该期权持有者可以马上行使期权来实现其内涵价值。通常一个实值美式期权的持有者最好的做法是等待而不是立即执行期权，这时期权被称为具有**时间价值**(time value)。期权的整体价值等于内涵价值与时间价值的和。

9.4.4 灵活期权

芝加哥期权交易所提供股票及股指**灵活期权**(flex option)，这种期权具有交易所大厅内交易员之间认可的一些非标准条款。这些非标准化条款涉及到期日或执行价格不同于交易所通常提供的期权。灵活期权是期权交易所试图从场外市场争夺客户的一种尝试。交易所会注明灵活期权交易的最小规模(比如100份合约)。

9.4.5 股息及股票拆股

早期的场外期权受到股息保护。如果一家公司发放现金股息，公司股票期权的执行价格会减

去股息金额，而交易所交易的期权不受股息保护。换句话说，当公司发放现金股息时，期权中的条款不做任何调整。对于大额现金股息有时会有例外(见业界事例9-1中古弛集团的例子)。

业界事例9-1 古弛集团的大额股息

当股票股息很大(通常大于股票价格的10%)时，芝加哥期权交易所的期权结算委员会(Option Clearing Corporation, OCC)可以做出决定是否要对期权条款做出调整。

2003年5月28日，古弛集团(Gucci Group N. V, GUC)宣布其股票每股将支付13.50欧元(大约为15.88美元)的股息，这一决定在2003年7月16日GUC的年会上得到批准。股息大约为公布股息时股票价格的16%。对于这种情况OCC决定调整期权的条款。其结果是：看跌期权被行使时需要交付100股股票附加100×15.88=1 588美元现金。看涨期权的持有者付出的金额为100乘以行使执行价格并同时收入1 588美元及100股股票。

对应于大数额股息，并不是总要调整。例如，在1998年3月10日德国奔驰(Daimler-Benz)公司宣布了占股票价值12%的股息，这一股息量令市场震惊，而其德国证券交易所(Deutsche Terminborse)没有对交易所交易的期权做出任何调整。

当股票拆股时，交易所交易的期权要进行调整。股票拆股时，现存的股票被分割成更多的股票。例如，在股票3对1(3-for-1)拆股时，3股新发行的股票将代替原来的1股股票。因为股票拆股不改变公司的资产以及盈利能力。我们不应看到拆股会影响公司股东的财富。在其他条件不变的情况下，3对1股票拆股会使得拆股后的股票价格等于拆股前价格的1/3。一般来讲，n对m股票拆股会使得股票价格下降为拆股前价格的m/n。期权中的条款会有所调整以反映因拆股而造成的价格变化。在n对m股票拆股时，期权的执行价格也变为拆股前执行价格的m/n倍，每一个新的期权所涉及的股票数量为初始期权所涉及的股票数量的n/m倍。如果股票价格按预期的那样降低，期权承约方及买入方的头寸不会改变。

【例9-1】 考虑可以让持有者以每股30美元的价格买入100股股票的看涨期权。假定公司进行了2对1股票拆股，期权合约的条款将变为持有者有权以每股15美元的价格买入200股股票。

股票期权对股票股息进行调整。股票股息可以是公司向其股东分发更多的股票。例如，20%的股票股息是指股东每拥有5股原公司股票就会收到1股新股票。同股票拆股类似，股票派发股息对公司的资产及盈利均无影响。在公司派发股息后，可以预计公司的股票价格会有所下降。20%的股票股息基本上等价于6对5股票拆股。在其他条件不变的情况下，这一股票股息会造成股价下降到派发股息前价格的5/6。与股票拆股类似，这时期权合约中的条款会有所调整，以反映股票股息所带来的股票价格的变化。

【例9-2】 考虑可以使持有者以每股15美元的价格出售100股股票的看跌期权。假定公司发放25%股票股息，等价于5对4的股票拆股。期权合约的条款将会变成持有者有权以12美元的价格出售125股股票。

对于**优先权证**(rights issue)，期权条款也会加以调整。基本的调整方法是首先计算权证的理论价格，然后从执行价格中减去这一数量。

9.4.6 头寸限额与行使限额

芝加哥期权交易所常常阐明期权合同的**头寸限额**(position limit)。这些限额是投资者在市场的一方中可持有期权合约的最大数量。为此目的，看涨期权的长头寸及看跌期权短头寸被认为是市场的同一方。同样，看涨期权的短头寸与看跌期权的长头寸也被看做市场的同一方。**行使限额**(exercise limit)规定了任一投资个人(或者一投资集团)在5个连续交易日中可以行使期权合约的最大额度。对于市场上最大与交易最频繁的股票期权行使限额为250 000份合约。市场规模较小的股票期权行使限额可以是200 000份、75 000份、50 000份及25 000份合约不等。

虽然头寸限额及行使限额的设定是为了防止某些个人或群体操纵市场，但投资者对于这些额度设定的必要性仍有争议。

9.5 交易

传统上，交易所为投资者提供了一个交易期权的空间，但最近这种情况有所变化。许多衍生产品交易所完全电子化，因此交易员之间并不需要见面。国际证券交易公司(International Securities Exchange，www. iseoptions. com)在2000年5月推出了第一个将股票期权交易完全电子化的市场。芝加哥期权交易所拥有的电子交易系统与交易大厅形式的公开喊价市场同时存在。

9.5.1 做市商

大多数交易所都采用做市商制度来促成交易的进行。一个期权的造市商是一个当需要时会报出买入价与卖出价的人。买入价是做市商准备买入期权的价格，卖出价是做市商准备卖出期权的价格。在报出买入价与卖出价时，做市商并不知道问询价格一方是要买入还是卖出期权。卖出价一定会高出买入价，高出买入价的差额就是**买卖差价**(bid-offer spread)。交易所设定买卖差价的上限。例如，期权价格小于0.5美元时，交易所可以设定买卖差价不超过0.25美元，期权价格介于0.5~10美元之间时，不超过0.5美元，期权价格介于10~20美元之间时不超过0.75美元，期权价格高于20美元时不超过1美元。

做市商的存在可以确保买卖指令在没有延迟的情况下在某一价格立即执行，因此，做市商的存在增加了市场的流动性。做市商本身可以从买卖差价中盈利，他们可以应用第18章所讨论的一些方法来对冲风险。

9.5.2 冲销指令

购买期权的投资者可以发出出售相同期权的**冲销指令**(offsetting order)来结清头寸。类似地，某期权的承约者也可以发出一个购买相同期权的冲销指令来结清其头寸。当一个期权正在交易时，如果交易的任何一方都没有冲销其现存交易，则**持仓量**(open interest)加1；如果某一方冲销某现存头寸而另一方没有冲销其头寸，这时持仓量保持不变；如果双方投资者都冲销头寸，这时持仓量减1。

9.6 佣金

投资者向经纪人发出的期权交易指令形式与期货交易(见2.8节)类似。市场指令可以马上执行，限价指令是当市场出现合适价格才被执行的指令，等等。

对于零售投资者来讲，不同经纪人的佣金会大不相同。**折扣经纪人**(discount broker)的收费比提供**全面服务经纪人**(full service broker)低。实际收费常常等于一个固定数量再加上交易量的百分比。表9-1是某一个折扣经纪人的收费报表。根据该表，买入8份价格为3美元的期权交易佣金

为 20 +0.02 ×2 400 =68 美元。

表 9-1　典型折扣经纪人的佣金报价

交易规模	佣金①
小于 2 500 美元	20 美元 + 交易规模的 2%
2 500 ~ 10 000 美元	45 美元 + 交易规模的 1%
大于 10 000 美元	120 美元 + 交易规模的 0.25%

①最大佣金计算如下：对于 5 份合约，每份佣金 30 美元，在超出 5 份合约之上的每一份合约，每份佣金为 20 美元；最小佣金计算如下：对于第一份合约，每份佣金 30 美元。在之后的每一份合约，每份佣金为 20 美元。

当进入冲销交易来结清现存交易时，投资者也必须再次支付佣金。当期权被执行时，所付佣金的数量会与买入及卖出标的资产的佣金相同，通常费用为股票价值的 1% ~2%。

考虑买入了一个执行价格为 50 美元的看涨期权的投资者，股票价格为 49 美元。假定期权价格为 4.5 美元，买入期权的整体费用为 450 美元。按表 9-1 的价格计算，买入或卖出一个期权的费用为 30 美元(最多佣金与最少佣金对于第一个期权的费用均为 30 美元)。假定股票价格上涨，期权被行使，期权被行使时的股票价格为 60 美元。假定投资者投资股票需付 0.75% 的佣金，那么在期权被行使时，佣金数量为

$$2 \times 0.0075 \times 60 \times 100 = 90 \text{ 美元}$$

因此，所付佣金的总数为 120 美元，投资者的净盈利为

$$1\,000 - 450 - 120 = 430 \text{ 美元}$$

注意，以 10 美元价格卖出期权会给投资者节省 60 美元的佣金(在我们的例子中，卖出期权的佣金仅为 30 美元)。一般来讲，佣金系统会趋向于使投资者更有利于卖出期权而不是行使期权。

期权交易(股票交易亦然)中一个隐含的费用是买卖差价。假定在我们以上考虑的例子中，期权买入价为 4 美元，而同时期权卖出价为 4.5 美元，我们可以假定期权的**公平价格**(fair price)为 4.25 美元。对期权卖方及买方而言，市场做市系统的费用为公平价格与付出价格之差，即每单位期权为 0.25 美元，每份期权为 25 美元。

9.7　保证金

在美国购买股票，投资者既可以支付现金，也可以通过利用在保证金账户借入资金来买入股票[这种做法被称为**以保证金购买**(buying on margin)]。当股票价格下跌速度很快，造成贷款远远高于当前股票价值的 50% 时，会触发**保证金催付**(margin call)。保证金催付要求投资者在经纪人处存入现金保证金。如果投资者不能及时存入保证金，经纪人会卖出股票。

当购买期限小于 9 个月的看涨期权与看跌期权时，投资者必须付清全部费用，这时投资者不能用保证金方式来购买期权，因为这些期权已具有很高的杠杆效应。以保证金方式买入期权会将杠杆效应提高到不可接受的水平。对于期限长于 9 个月的期权，投资者可以至多借入期权价格 25% 的资金来以保证金购买的形式买入期权。

当投资者卖出期权时必须在保证金账户中保持一定的资金。投资者的经纪人和交易所需要确保当期权被行使时，期权的承约人不会违约。就像我们讨论的那样，担保金的数额与交易环境有关。

9.7.1　出售裸露期权

裸露期权(naked option)是指期权不与对冲该期权头寸风险的标的资产并用。在芝加哥期权交易所，卖出裸露看涨期权的初始保证金是以下两个数量中的较大值：

- 变卖期权所得金额的 100%，加上 20% 的标的股票的价值，减去(如果存在)期权的虚值数量；
- 变卖期权所得金额的 100%，加上 10% 标的股票价值。

卖出裸露看跌期权，初始保证金为以下两个数量的较大值：

- 变卖期权所得金额的100%，加上20%的标的股票的价值，减去(如果存在)期权的虚值数量；
- 变卖期权所得金额的100%，加上10%的执行价值。

由于包含广泛股票的股指比单个股票的波动率要小，所以在以上计算中，用15%代替20%。

【例9-3】 投资者卖出了4个裸露看涨期权，期权价格为5美元，期权执行价格为40美元，股票当前价格为38美元，因为期权的虚值数量为2美元，计算保证金第1步为

$$400\times(5+0.2\times38-2)=4\,240\text{ 美元}$$

第2步为

$$400\times(5+0.1\times38)=3\,520\text{ 美元}$$

因此，最初保证金要求为4 240美元。假定这里的期权为看跌期权，期权的实值数量为2美元，因此最初保证金数量为

$$400\times(5+0.2\times38)=5\,040\text{ 美元}$$

看跌及看涨两种情形，最初的收费(即2 000美元)均可用于满足保证金的要求。

与初始保证金计算类似(但由目前市价代替卖出价值)的计算每天都会重复一遍。当计算表明所需保证金比保证金账户中的数量低时，可以从账户中提取资金；当计算表明需要更高保证金数量时，将会有追加保证金的通知。

9.7.2 其他规则

在第11章，我们将讨论期权交易策略。例如，**备保看涨期权**(covered call)、**保护性看跌期权**(protective put)、**溢差**(spread)、**组合**(combination)、**跨式期权**(straddle)及**异价跨式期权**(strangle)。CBOE对这些交易保证金要求有特殊的规则，这些规则在CBOE保证金手册(CBOE Margin Manual)中有所说明，这一手册在CBOE网页上(www.cboe.com)可以下载。

我们考虑以下例子，一个投资者卖出了一备保看涨期权，投资者可能是在已经拥有股票后才对期权进行承约，拥有的股票可以用于交割。备保看涨期权比裸露看涨期权的风险要小得多，这是因为最差的情形莫过于投资者以低于市场价格卖出自身已拥有的股票。对于卖出备保看涨期权的投资者，交易所不需要任何保证金。但投资者对于股票头寸最多可以借入资金的数量为$0.5\min(S, K)$，而非$0.5S$。

9.8 期权结算公司

期权市场中期权结算公司(OCC)的职能与期货市场中结算中心的职能很相似(见第2章)，其职能是确保出售期权的一方按照期权合约的规定来履行义务，同时结算公司也要记录长头寸及短头寸方的状况。期权结算中心拥有一些会员，所有的期权交易必须通过其会员来结清。如果经纪人公司本身并不是结算公司的会员，那么该经纪人必须通过期权结算公司的会员来结清交易。会员必须满足资本金的最低限额要求，而且必须提供特殊资金。当有任一会员对其义务违约时，这一特殊资金会得到启用。

当买入期权时，期权买入方必须在第二个业务日的早上支付期权费用，资金要存入期权结算公司。如上所述，期权的出售方必须在经纪人那里开设保证金账户[⊖]，而同时经纪人在负责结算其交易的结算公司会员那里维持一个保证金账户。同样，结算公司会员也要在结算公司维持一个保证金账户。

⊖ 保证金要求为期权结算公司注明的最低保证金。交易商对其客户可能会要求更高的保证金，但是无论如何其所要求的保证金不会低于期权结算公司注明的最低保证金。有些交易商甚至不允许自己的客户出售无掩护的期权。

期权的行使

当投资者通知其经纪人要执行期权时，经纪人随后通知在期权结算公司负责结算交易的会员，该会员随后向期权结算公司发出执行期权指令。之后，期权结算公司会随机选择某持有相同期权的短头寸的会员。这个会员按事先约定的程序，选择出售该期权的投资者。如果是看涨期权，那么出售期权的投资者必须按执行价格出售股票；如果是看跌期权，那么出售期权的投资者必须按执行价格购买股票。这里的投资者称为**被指定**(assigned)。当一期权被执行后，期权的未平仓数量减1。

在期权的到期日，除非由于交易成本太高以至于抵消收益，否则所有的实值期权都应该被执行。当在到期日执行期权对客户有利时，一些经纪人公司会替客户自动执行期权。许多交易所也制定了当在到期日期权为实值状态时的期权行使规则。

9.9 监管规则

期权市场受多种形式的监管。交易所与其结算公司都制定了监管其交易员行为的规则。另外，对于期权市场还存在州与联邦的监管机构。一般来讲，期权市场还会有某种自律协会。到目前为止，期权结算公司还没有出现大的丑闻或成员违约事件。投资者对于期权市场的运作应当有很强的信心。

证券交易委员会(SEC)是在联邦层次上负责监管股票、股指、外汇及债券期权市场的组织。商品期货交易委员会(CFTC)负责监管期货市场。美国最大的期权市场在伊利诺伊州和纽约州，这些州也积极制定法律来遏制违规交易行为。

9.10 税收

关于期权策略的税收规定比较复杂，因此对于税收规则有疑问的投资者应尽量咨询税务专家。在美国一般规则是(除非纳税人为专业交易员)：股票期权交易的收益与**资本损益**(capital gains/losses)要被征税。在2.10节中，我们讨论了在美国资本损益的征税方式。对于股票期权持有方及承约方而言当期权到期而没有执行以及期权已经被出售平仓时，行使期权会被认为带来了损益。期权被行使后的收益或损失会纳入到股票中，损益会在卖出股票时得到确定。例如，当一个看涨期权被行使时，期权长头寸方购买股票的费用为执行价格加上期权价格。因此，这些费用会被作为这一方出售股票时计算盈亏的基础。类似地，看涨期权短头寸方被认为是按执行价格加上原始看跌期权的价格卖出了股票。当一个看跌期权被行使时，期权的卖出方被认为是以执行价格减去原始期权价格买入了股票，同时期权的买入方被认为是以执行价格减去原始看跌期权价格来卖出股票。

9.10.1 虚售规则

在美国期权交易中，一个税务规则被称为**虚售规则**(wash sale rule)。为了理解这一规则，想象一个投资者在股票价格为60美元时买入股票同时打算长期持有这一股票。如果股票下跌到40美元，该投资者也许会出售股票，然后马上将股票购回。从税务角度而言，投资者有20美元的损失。为了防止这一情况的发生，税务当局规定如果在售出股票的30天内(即介于售出股票的前30天及售出股票后的30天)将股票重新买入，那么出售股票产生的损失不能在税中扣除。这种规定同样也对投资者买入期权或以其他形式获取股票的情形适用，而且这时限定时间长度为61天。因此当卖出股票后30天内买入看涨期权时，亏损是不允许扣税的。虚售规则不适用于股票及债券交易商，因为其损失在正常业务中是常常发生的。

9.10.2 推定出售

在1997年之前，美国纳税人如果要卖空某债券，并同时持有一个基本与卖空债券一样的债券，这时在卖空交易平仓之前的损益是不能被接受的。这意味着卖空交易可用于延迟税务的收益。以上情形在《1997税务减轻法案》(*Tax Relief Act*)通过后有所改变。一个增值的财产在当财产拥有人做出投资行为时可被当成**推定出售**(constructive sale)：

- 进入相同或几乎相同的财产的卖空交易；
- 进入期货或远期合约，在合约中投资者会交付相同或几乎相同的财产；
- 进入一个或多个交易，这些交易几乎消除所有损失与盈利机会。

应该指出只是，减轻损失或只是减少盈利机会的交易不能被划为推定出售。因此，一个持有某股票的投资者可以买入实值看跌期权而不触发推定出售。税务人可以利用期权来对税务费用进行极小化或对税务收益进行最大化(见业界事例9-2)。许多地区的税务部门纷纷遏制那些只是为了避税而使用衍生产品的行为。在进入一个以税务为动机的交易之前，企业资金部主管或个人投资者应该仔细考虑当税法变动时，交易结构将如何平仓，以及平仓交易会带来什么样的成本。

业界事例9-2 使用期权的税务计划

作为一个简单说明使用期权税务的实例，我们假定A国的税务制度对利息及股息征税较低，但对资产增值征税较高，B国的税务制度对利息及股息征税较高，但对资产增值征税较低。对于公司来讲，在A国得到利息收入，而在B国得到资产增值(如果增值存在的话)会比较合算，公司会将资产的亏损尽量保留在A国，因为这些损失可以用于冲销在A国的资产增值。以上计划可以通过以下形式来实现：在A国成立分公司并同时以法律形式拥有证券，在B国成立分公司并买入A国分公司承约的看涨期权，期权的执行价格等于证券的当前价格。在期权有效期内，证券的收入由A国公司获得，如果证券价格迅速上涨，期权会被行使而资产增值在B国实现；如果证券价格迅速下降，期权不会被行使，资产损失仍然会在A国实现。

9.11 认股权证、雇员股票期权及可转换证券

认股权证(warrant)是由金融机构和非金融机构发行的期权。例如，一家金融机构可以发行关于100万盎司黄金的看跌认股权证，并同时创立关于这些权证的市场。为了行使权证，投资者需要同金融机构取得联系。非金融机构一般在债券发行时应用权证。一家公司可以发行关于自身股票的看涨权证，并将这些权证附属在证券上，以便使其更能吸引投资者。

雇员股票期权(employee stock option)是公司雇主发给高管的看涨期权，这样做的目的是为了保证高管的管理动机与股东利益一致(见第15章)。在发行时，期权通常为平值。目前，在许多国家，这些期权都已被当成费用包括在公司损益表中，使得将这一产品作为报酬已变得越来越不合算。

可转换债券(convertible bond)常常简称为**可转换产品**(convertible)，这是由公司发行的并在将来以某预定的比例转换为股票的债券。这些产品是含有对公司股票看涨期权的债券。

认股权证、雇员股票期权和可转换证券的一个特性是期权发行数量事先已确定。与这一特性相对应，CBOE交易所或其他交易所交易期权的数量并不能事先确定。当有更多的人交易某个期权系列时，市场上期权数量(即未平仓数量)也会随之增加。公司发行的对于股票认股权证、雇员股票期权以及可转换证券与交易所交易期权还有一个很重要的区别：当这些期权被行使时，公司要发行更多的股票并以行使价格卖给期权持有人。执行这些期权会导致公司股票数量的增加。与

这一点相反，当交易所期权被行使时，期权的短头寸方从市场上买入已发行股票并以行使价格卖给期权的长头寸方。发行股票的公司不需要介入交易过程。

9.12 场外市场

本章大部分内容是关于交易所交易的期权市场。自20世纪80年代初起，场外期权市场已经变得十分重要，现在这一市场规模已经超过交易所交易市场。如第1章所述，金融机构、企业资金部主管及基金经理通过电话在场外市场进行交易。期权交易的标的产品范围很广。场外市场的外汇及利率期权十分流行。场外市场的一个最大缺点是期权的承约方可能会违约，这意味着期权买入方会承担信用风险。为了克服这些缺点，市场参与者采用了许多方式。例如，注入抵押保证金来降低这一风险等。这一点曾在2.5节中有所讨论。

场外交易产品之所以产生，是由于金融机构能准确地满足客户的需求。场外市场产品的到期日、执行价格、合约的规模与交易所交易的产品的特性不同。在某些情形，期权结构不同于标准的看涨期权和看跌期权，这些产品被称为**特种期权**(exotic option)。在第25章，我们将描述几种不同的特种期权。

小结

期权分为两类：看涨期权及看跌期权。看涨期权的持有者有权在将来某时刻以指定价格买入标的资产，看跌期权的持有者有权在将来某时刻以指定价格卖出标的资产。市场上有4种期权交易策略：看涨期权长头寸、看涨期权短头寸、看跌期权长头寸、看跌期权短头寸。进入期权的短头寸也被称为对期权承约。期权市场的标的资产包括股票、股指、外汇、期货及其他资产。

交易所必须要阐明交易期权合约的条款，特别是期权的规模、到期日的准确时刻及执行价格等。在美国一个股票期权给持有人买入100股股票的权利，股票期权的到期日为到期月第3个星期五之后的星期六中部时间晚上10：59分。在任意时刻有几个具有不同到期月的期权在进行交易。执行价格的区间间隔为2.5美元、5美元及10美元，具体的选择与股票价格有关。在期权刚刚开始交易时，执行价格与当前股票价格十分接近。

股票期权合约的条款对现金股息不做调整，而是这些条款对于股票股息、股票分股及优先权证做出调整。调整的目的是使承约方及买入方的头寸整体保持不变。

大多数期权交易所采用做市商机制。做市商同时报出买入价(即做市商以此价买入资产)及卖出价(即做市商以此价卖出资产)。做市商的存在提高了市场的流动性，并同时确保市场订单没有被延迟执行。做市商从买入卖出价格差(被称为买卖差价)中盈利。交易所会阐明买卖差价的上限。

期权的承约方有潜在的责任，因此市场要求他们在经纪人那里要保持一定的保证金。如果经纪人不是期权结算公司的成员，承约方必须在期权结算公司的某个成员那里开设一个保证金账户。期权结算公司负责记录所有的流通的期权合约，并处理行使指令等。

并不是所有的期权都在交易所交易，许多期权通过电话在场外市场进行交易。场外市场的一个优点是可以满足某个企业资金部主管及基金经理的要求。为了做到这一点，金融机构必须对产品进行特殊设计。

推荐阅读

Arzac, E. R. "PERCs, DECs, and Other Mandatory Convertibles," *Journal of Applied Corporate Finance*, 10, 1 (1997): 54–63.

Chicago Board Options Exchange, *Characteristics and Risks of Standardized Options*. Available online at www.optionsclearing.com/about/publications/character-risks.jsp. First published 1994; last updated 2009.

McMillan, L. G. *McMillan on Options*, 2nd edn. Hoboken, NJ: Wiley, 2004.

练习题

9.1 某投资者以3美元的价格买入欧式看跌期权，股票价格为42美元，执行价格为40美元，在什么情况下投资者会盈利？在什么情况下期权会被行使？画出在到期时投资者盈利与股票价格的关系图。

9.2 某投资者以4美元的价格卖出一欧式看涨期权，股票价格为47美元，执行价格为50美元，在什么情况下投资者会盈利？在什么情况下期权会被行使？画出在到期时投资者盈利与股票价格的关系图。

9.3 某投资者卖出一欧式看涨期权同时买入一欧式看跌期权，看涨及看跌期权的执行价格均为 K，到期日均为 T，描述投资者的头寸。

9.4 解释经纪人为什么向期权的承约方而不是向买方收取保证金。

9.5 一股票期权的循环周期为2月份、5月份、8月份及11月份，在以下几个日期有哪种期权在进行交易：4月1日和5月30日。

9.6 一家公司宣布2对1的股票拆股，解释执行价格为60美元的看涨期权条款会如何变化。

9.7 "雇员股票期权与正规的交易所或场外交易的美式期权是不同的，这是因为前者可以影响公司的资产结构。"解释这一结论。

9.8 一家企业的资金部主管计划采用外汇期权对冲外汇风险。列举以下两种交易市场的优缺点：NASDAQOMX；场外交易市场。

9.9 假定某欧式看涨期权的价格为5美元，该期权持有人有权以100美元的价格买入股票，假定这一期权一直被持有至到期日。在什么情形下期权持有人会盈利？在什么情形下期权会被行使？画出在期权到期时期权长头寸的价格与股票价格的关系。

9.10 假定某欧式看跌期权的价格为8美元，该期权持有人有权以60美元的价格卖出股票。在什么情况下期权持有人会盈利？在什么情形下期权会被行使？画出在期权到期时期权的短头寸的收益与股票价格的关系。

9.11 描述以下交易组合的最终价值：一个刚刚进入的某资产远期合约及对于同一资产的欧式看跌期权的短头寸。这一看跌期权的期限与远期合约的期限相同，期权的执行价格等于交易组合刚刚设定时资产的远期价格。证明欧式看跌期权的价格与具有相同期限及相同执行价格看涨期权的价格相等。

9.12 某交易员买入一看涨期权及看跌期权，看涨期权的执行价格为45美元，看跌期权的执行价格为40美元，两个期权具有相同的期限，看涨期权价格为3美元，看跌期权价格为4美元，画出交易员盈利与资产价格的关系图。

9.13 解释为什么一个美式期权的价格不会小于一个具有同样期限及执行价格欧式期权的价格。

9.14 解释为什么一个美式期权的价格至少为其内涵价格？

9.15 仔细解释卖出看跌期权与买入看涨期权的区别。

9.16 一家企业的资金部主管试图采用期权或远期合约来对公司的外汇风险进行对冲，说明两种办法的优缺点。

9.17 考虑交易所交易的一个看涨期权，期权到期日为4个月，执行价格为40美元，这一期权给期权拥有人买入500股的权利。说明在以下情况下期权合约条款的变化：

(a) 10%的股票股息；

(b) 10%的现金股息；

(c) 4对1的拆股。

9.18 "如果一种股票看涨期权大多为实值型，这说明股票价格在最近几个月会上升得很快。"对这句话做一评论。

9.19 一种预期的现金股息对以下期权的影响是什么？

(a) 看涨期权；

(b) 看跌期权。

9.20 通用汽车公司的股票期权期限的周期为3月份、6月份、9月份及12月份。在以下日期都有什么样的股票在进行交易？(a)3月1日；(b)6月30日；(c)8月5日。

9.21 解释为什么做市商的买卖差价代表期权投资者的实际费用。

9.22 某美国投资者出售了5股裸露看涨期权，期权价格为3.5美元，执行价格为60美元，股票价格为57美元，最初的保证金为多少？

作业题

9.23 股票价格为40美元，关于这一股票的一个1年期的看跌期权的执行价格为30美元，期权价格为7美元；关于这一股票的一个1年期的看涨期权的执行价格为50美元，期权价格为5美元。假如投资者买入了100股股票，卖出了100份看涨期权，买入了100份看跌期权。画出图形来说明1年时投资者的盈利与股票价格的关系。当投资者买入100股股票，卖出200份看涨期权并且买入200份看跌期权，你的答案会有什么变化？

9.24 “一家公司经营不比其竞争对手好，但其股票价格仍在上涨，公司的高管在雇员股票期权中会得到很多好处，这种现象实在是不合理。”讨论这一观点。为了解决这一问题，对常规的雇员股票期权进行修改。

9.25 采用DerivaGem来计算一个无股息股票的美式看跌期权的价格，股票价格为30美元，执行价格为32美元，无风险利率为5%，波动率为30%，期权的期限为1.5年(选择二叉树美式期权模型，二叉树的步数为50步)。

(a)期权的内涵价值是什么？

(b)期权的时间价值是什么？

(c)时间价值为0是什么含义？时间价值为0的期权价值是什么？

(d)采用“试错法”(trial and error)，计算使得期权时间价格刚好为0的股票价格。

9.26 在2004年7月20日，微软公司宣布了3美元股息的消息，这一消息令市场震惊，股票的除息日(ex-dividend)日期为2004年11月7日，股息的付款日为2004年12月2日，当时微软股票价格为28美元，雇员股票期权的条款也进行了调整，每一份期权的执行价格下调到

$$股息前执行价格 \times \frac{收盘价 - 3.0}{收盘价}$$

每一份期权所能购买的股票数量被调至

$$股息前购买数量 \times \frac{收盘价}{收盘价 - 3.0}$$

这里的收盘价是指在纳斯达克，微软普通股股票在除息日的最后一个交易日的收盘价。评价这些调整，并将这些调整与交易所非同寻常的股息调整系统进行比较(见业界事例9-1)。



第 10 章

股票期权的性质

本章我们将讨论影响股票期权价格的因素。我们采用一些不同形式的套利方式来探讨欧式期权价格、美式期权价格和标的资产价格之间的关系式，其中最重要的关系式为欧式看涨期权和看跌期权价格之间的**看跌-看涨平价关系式**(put-call parity)，该式给出了欧式看涨期权、欧式看跌期权和标的资产价格之间的关系。

本章我们将讨论美式期权是否应提前行使，我们将证明提前行使无股息股票上美式看涨期权肯定不会是最佳选择，但是在一定条件下，提前行使这种股票上的看跌期权则是最佳选择。

10.1 影响期权价格的因素

有 6 种因素会影响股票期权的价格：

- 当前股票价格，S_0；
- 执行价格，K；
- 期权期限，T；
- 股票价格的波动率，σ；
- 无风险利率，r；
- 期权期限内预期发放的股息。

本节我们将考虑以上某因素发生变化，而其他因素保持不变的条件下，对于期权价格的影响。表 10-1 对此做了总结。

图 10-1 和图 10-2 显示了期权价格与以上前 5 种因素之间的关系，图中采用的参数为：$S_0=50$，$K=50$，$r=5\%$（每年），$\sigma=20\%$（每年），$T=1$ 年，并且假定股票无股息。此时看涨期权价格为 7.116，看跌期权价格为 4.677。

10.1.1 股票价格及执行价格

如果看涨期权在将来某一时刻行使，期权收益等于股票价格与执行价格的差额。因此，随着股票价格的上升，看涨期权价格也会增大，而随着执行价格的上升，看涨期权价格将会减小。看跌期权的收益等于执行价格与股票价格的差额。因此，看跌期权的价格走向刚好与看涨期权相反，即随着股票价格的上升，看跌期权价格会减小；随着执行价格的上升，看跌期权价格将会增大。

表 10-1　一个变量增加而其他变量保持不变时对于股票期权价格的影响

变　量	欧式看涨期权	欧式看跌期权	美式看涨期权	美式看跌期权
当前股票价格	+	−	+	−
执行价格	−	+	−	+
期限	?	?	+	+
波动率	+	+	+	+
无风险利率	+	−	+	−
股息	−	+	−	+

注：+代表变量增加，期权价格增加；−代表变量增加，期权价格减少；?代表变量增加，期权价格变化不定。

10.1.2　期权期限

接下来我们考虑期限对期权价格的影响。当期限增加时，美式看涨期权与看跌期权价格都会增加。考虑两个美式看涨期权，这两个期权只是期限不同。期限较短的期权在行使时，较长期限的期权也可以被行使。因此，长期限期权的价格至少不会低于短期限期权的价格。

一般来讲，随着期限的增加，欧式看跌期权和看涨期权的价值会增加（见图 10-1e 和图 10-1f），但这一结论并非总是成立。考虑两个关于同一股票的欧式期权，一个期权的到期日在一个月后，另一个期权的到期日在 2 个月后，假定在 6 个星期后股票支付一个大额股息，股息会使得期权价格下降。因此，短期限期权价格可能会超过长期限的期权价格。[⊖]

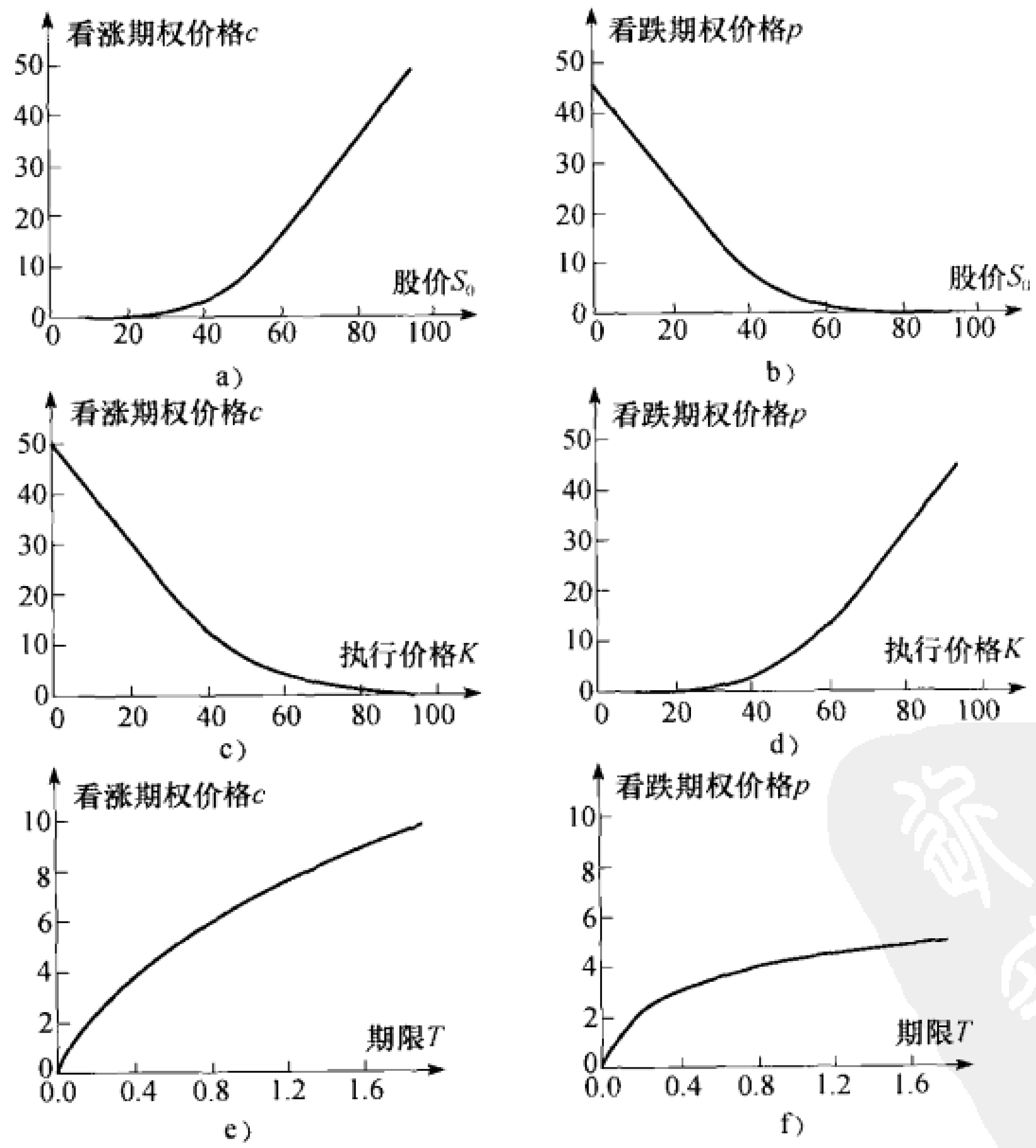


图 10-1　股票价格、执行价格及期限的变化对期权价格的影响

注：$S_0=50$，$K=50$，$r=5\%$，$\sigma=30\%$，$T=1$。

⊖ 假定当期权期限改变时，股票上票息的数量与支付时间均不改变。

10.1.3 波动率

在第 14 章里我们将讨论波动率的精确定义方式。粗略地讲，股票价格的**波动率**(volatility)是用于衡量未来股票价格变动的不定性的一个测度。当波动率增大时，股票价格上升很多或下降很多的机会将会增大。对于股票持有者而言，这两个变动常常会互相抵消，但对于看涨期权或看跌期权持有者而言，情况会有所不同。看涨期权的拥有者可以从股票上升中获利，但当股票下跌时，其损失是有限的，因为期权的最大损失只是期权费用。类似地，看跌期权持有者可以从价格下跌中获利，同时损失也有限。因此随着波动率的增加，看涨期权及看跌期权价格都会增加(见图 10-2a 和图 10-2b)。

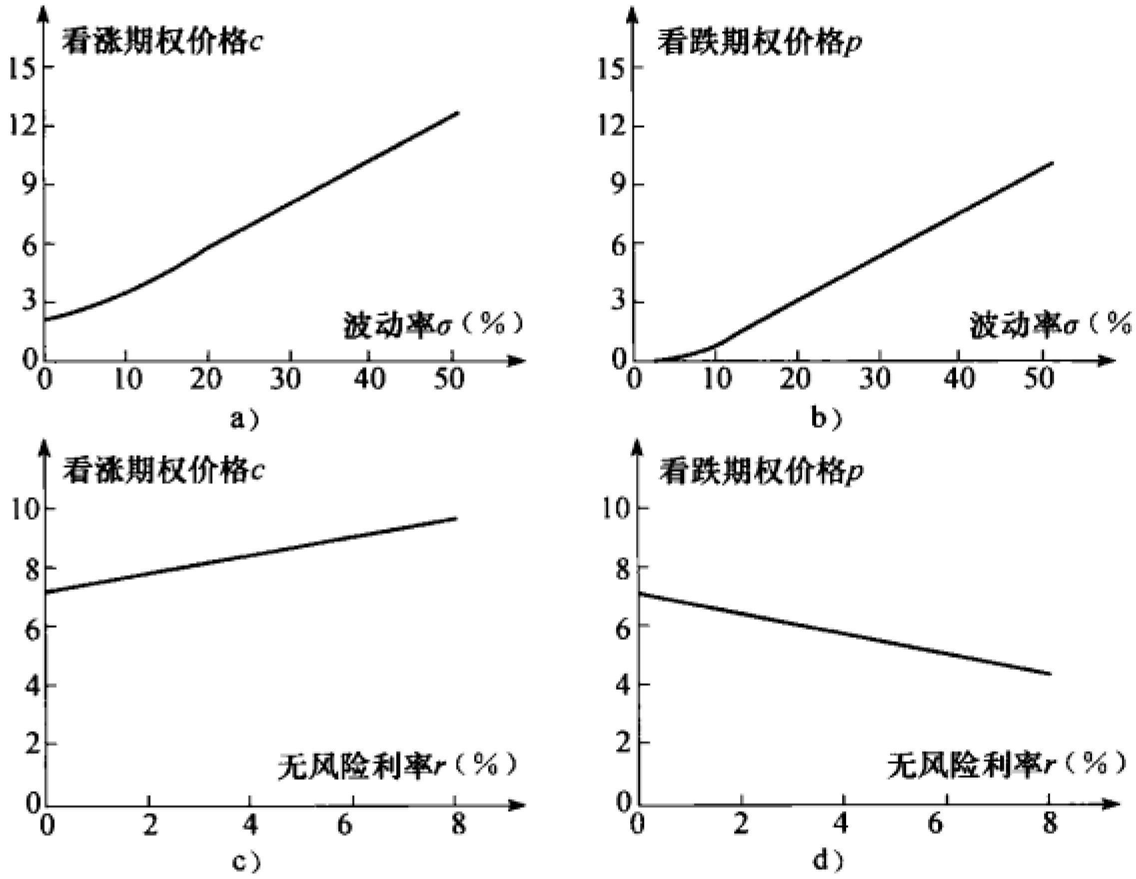


图 10-2　股票波动率、无风险利率的变化对期权价格的影响

注：$S_0=50$，$K=50$，$r=5\%$，$\sigma=30\%$，$T=1$。

10.1.4 无风险利率

无风险利率对期权价格的影响并不是那么一目了然。当整个经济环境中利率增加时，投资者所要求的股票预期收益也会增加。同时，期权持有人将来所收到现金流的贴现值会有所降低。以上两种效应的合成效应是：看涨期权价格会增加，看跌期权价格会降低(见图 10-2c 和图 10-2d)。

应该强调，我们假定利率增大时其他变量的值保持不变。特别是，在表 10-1 中当利率上升(下降)时，股票价格保持不变。在实际中，当利率上升(下降)时，股票价格往往会下降(上升)。利率上升与相应的股票价格下降的净效应可能会使看涨期权价格下降，而看跌期权价格上升。类似地，利率下降与相应的股票价格上升的净效应可能会使看涨期权价格上升，而看跌期权价格下降。

10.1.5 将来的股息数量

股息将使股票在除息日的价格降低。对于看涨期权，这是一个坏消息；但对于看跌期权，这却是一个好消息。因此，看涨期权价值与预期股息的大小成反向关系；看跌期权的价值与预期股息的大小成正向关系。

10.2 假设及符号

本章采用与第 5 章推导远期以及期货的价格时类似的假设。我们假定市场上存在一些大投资银行这样的参与者，从而使下面的假设成立：

- 没有交易费用；
- 对于所有交易盈利(减去交易损失)的税率相同；
- 投资者可以按无风险利率借入及借出资金。

我们假定市场一旦出现套利机会，参与者马上会利用这些套利机会。正如我们在第 1 章与第 5 章所述，任何套利机会都会很快消失。因此，为了分析问题起见，我们可以合理地假定在市场上不存在套利机会。

我们将采用以下符号：

S_0 ——股票的当前价格；

K ——期权的执行价格；

T ——期权的期限；

S_T ——T 时刻股票的价格；

r ——在 T 时刻到期的无风险投资收益率，即无风险利率(连续复利)；

C ——买入一股股票的美式看涨期权的价格；

P ——买入一股股票的美式看跌期权的价格；

c ——买入一股股票的欧式看涨期权的价格；

p ——买入一股股票的欧式看跌期权的价格。

注意，r 为名义利率，而非实际利率。我们可以假定 $r>0$，否则无风险投资的收益并不比持有现金更好(事实上，如果 $r<0$，持有现金比无风险投资更好)。

10.3 期权价格的上限与下限

本节我们将推导出期权价格的上下限。这里的上下限与 10.1 节中的假设无关($r>0$ 除外)。如果期权价格大于上限或者小于下限，则会出现套利机会。

10.3.1 上限

美式或欧式期权给其持有人以某指定价格买入一股股票的权利。无论发行什么情况，期权的价格总不会超出股票价格。因此，股票价格是期权价格的上限，即

$$c \leqslant S_0 \quad 与 \quad C \leqslant S_0 \tag{10-1}$$

如果以上的不等式不成立，那么套利者可以通过购买股票并同时出售期权来获取无风险盈利。

美式看跌期权的持有者有权以价格 K 卖出一股股票。无论股票价格变得多么低，期权的价格不会高于执行价格，即

$$P \leqslant K \tag{10-2}$$

对于欧式期权，我们知道在 T 时刻，期权的价格不会超出 K。因此，当前期权的价格不会超过 K 的贴现值，即

$$p \leqslant Ke^{-rT} \tag{10-3}$$

如果以上不等式不成立，那么套利者可以卖出一个期权，同时将卖出期权所得费用以无风险利率进行投资，套利者将可以获取无风险盈利。

10.3.2 无股息股票的看涨期权的下限

一个不支付任何股息的股票的欧式看涨期权下限为

$$S_0 - Ke^{-rT}$$

在正式讨论以上结论之前，我们首先给出一个例子。

假定 $S_0 = 20$ 美元，$K = 18$ 美元，$r = 10\%$（每年），$T = 1$ 年，这时

$$S_0 - Ke^{-rT} = 20 - 18e^{-0.1} = 3.71$$

即3.71美元。考虑欧式看涨期权价格为3美元的情形，这一价格小于理论下限3.71美元。一个套利者可以卖空股票并同时买入看涨期权，交易的现金流为20 − 3 = 17美元。如果将17美元以每年10%的利率投资一年，17美元将变为 $17e^{0.01} = 18.79$ 美元。在这一年的年末，如果股票价格高于18美元，套利者按18美元价格行使期权，并对卖空交易进行平仓，所得盈利为

$$18.79 - 18 = 0.79 \text{ 美元}$$

如果股票价格小于18美元，套利者可以在市场上买入股票并对卖空交易进行平仓。这时套利者盈利会更多。例如，如果股票价格为17美元，套利者的盈利为

$$18.79 - 17 = 1.79 \text{ 美元}$$

为了更正式的讨论，我们考虑以下两个交易组合：

组合A：一个欧式看涨期权加上在时间 T 提供收益 K 的零息债券；

组合B：一股股票。

在组合A中，在 T 时刻，零息债券的价值为 K。在 T 时刻，如果 $S_T > K$，投资者行使看涨期权，组合A的价值为 S_T。如果 $S_T < K$，期权到期时价值为0，这时组合A的价值为 K。因此，在 T 时刻组合A的价值为

$$\max(S_T, K)$$

组合B在 T 时刻的价值为 S_T。因此，在 T 时刻组合A的价值总不会低于组合B的价值。因此，在无套利的条件下，我们有

$$c + Ke^{-rT} \geqslant S_0$$

或

$$c \geqslant S_0 - Ke^{-rT}$$

对于一个看涨期权而言，最差的情况是期权到期时价值为0。因此，期权价值不能为负值，即 $c \geqslant 0$。因此

$$c \geqslant \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \tag{10-4}$$

【例10-1】 考虑一个无股息股票的美式看涨期权，假定股票价格为51美元，期权执行价格为50美元，期权期限为6个月，无风险利率为每年12%。在本例中，$S_0 = 51$ 美元，$K = 50$ 美元，$T = 0.5$ 年及 $r = 0.12$。由不等式(10-1)得出，期权的下限为 $S_0 - Ke^{-rT}$，即

$$51 - 50e^{-0.12 \times 0.5} = 3.91 \text{ 美元}$$

10.3.3 无股息股票的欧式看跌期权下限

对于一个无股息股票的欧式看跌期权，其价格下限为

$$Ke^{-rT} - S_0$$

我们接下来仍先给出一个数值例子，然后再正式讨论。

假设 $S_0=37$ 美元，$K=40$ 美元，$r=5\%$（每年），$T=0.5$ 年，在这种情形下

$$Ke^{-rT}-S_0=40e^{-0.05\times0.5}-37=2.01\text{ 美元}$$

欧式期权价格为 1 美元，这一价格小于理论下限值，即 2.01 美元。套利者可借入 38 美元，借款期限为 6 个月，并同时买入看跌期权及股票。在 6 个月结束时，套利者需支付 $38e^{0.05\times0.5}=38.96$ 美元。如果股票价格低于 40 美元，套利者执行期权，即以 40 美元价格卖出股票，偿还贷款，从而获利

$$40-38.96=1.04\text{ 美元}$$

如果股票价格高于 40 美元，套利者放弃期权，卖出股票，偿还贷款，并获得更高盈利。例如，如果股票价格是 42 美元，这时套利者的盈利为

$$42-38.96=3.04\text{ 美元}$$

为了更正式的讨论，我们考虑以下两个交易组合：

组合 C：一个欧式看跌期权加上一股股票；

组合 D：在 T 时刻收益为 K 的零息债券。

如果 $S_T<K$，在到期时组合 C 的期权会得到执行，组合 C 的价值变为 K；如果 $S_T>K$，在到期时，期权价值为 0，C 的价值为 S_T，因此在 T 时组合 C 的价值为

$$\max(S_T,K)$$

在 T 时刻，组合 D 的价值为 K，因此在 T 时刻组合 C 的价值总是不低于组合 D 的价值。在无套利条件下，今天组合 C 的价值不会低于组合 D 的价值

$$p+S_0\geqslant Ke^{-rT}$$

或

$$p\geqslant Ke^{-rT}-S_0$$

对于一个看跌期权而言，最差的情况是期权到期时价值为 0，期权价值不能为负值，因此

$$p\geqslant\max(Ke^{-rT}-S_0,0)\tag{10-5}$$

【例 10-2】 考虑一个无股息股票的美式看涨期权，假定股票价格为 38 美元，期权执行价格为 40 美元，期权期限为 6 个月，无风险利率为每年 10%。在本例中，$S_0=38$ 美元，$K=40$ 美元，$T=0.25$ 年及 $r=0.10$。由不等式(10-5)得出，期权的下限为 $Ke^{-rT}-S_0$，即

$$40e^{-0.1\times0.25}-38=1.01\text{ 美元}$$

10.4 看跌-看涨平价关系式

我们现在推导具有相同执行价格与期限的欧式看跌期权与看涨期权价格之间的一个重要关系式。考虑下面两个在前一节里已经用过的组合：

组合 A：一个欧式看涨期权加上在 T 时刻收益为 K 的零息债券；

组合 C：一个欧式看跌期权加上一股股票。

我们仍然假设股票不支付票息，看涨期权与看跌期权具有相同的执行价格 K 与期限 T。

像在上一节那样，组合 A 中的零息债券在 T 时刻的价值为 K。如果在 T 时刻股票价格 S_T 高于 K，那么组合的期权将被执行，所以在这种情况下，组合 A 在 T 时刻的价值为 $(S_T-K)+K=S_T$。如果 S_T 低于 K，那么组合 A 的看涨期权将会没有价值，因此在 T 时刻组合的价值为 K。

在组合 C 中，在 T 时刻股票的价值为 S_T。如果 S_T 低于 K，这时在组合 C 中的看跌期权将会被行使，这说明在 T 时刻，组合的价值为 $(K-S_T)+S_T=K$。如果 S_T 大于 K，此时在组合 C 中的

看跌期权将会没有价值，从而在T时刻组合的价值为S_T。

这些结果总结在表 10-2 中。如果$S_T > K$，在T时刻两个组合的价值均为S_T；如果$S_T < K$，在T时刻两个组合的价值均为K。换句话说，在T时刻当期权到期时，两个组合的价值均为

$$\max(S_T, K)$$

由于组合 A 和组合 C 中的期权均为欧式期权，在到期日之前均不能行使，因此两个组合在T时刻有相同的收益，从而组合 A 和组合 C 在今天必须有相同的价值。如果不是这样，套利者可以买入便宜的组合，而同时卖空较贵的组合。由于两个组合在T时刻会相互抵消，因此这种交易策略会生成套利机会，所得数量等于两个组合价值的差。

表 10-2　组合 A 和 C 在 T 时刻的价值

		$S_T > K$	$S_T < K$
组合 A	看涨期权	$S_T - K$	0
	零息债券	K	K
	总和	S_T	K
组合 B	看跌期权	0	$K - S_T$
	股票	S_T	S_T
	总和	S_T	K

组合 A 的组成部分在今天的价值为c和Ke^{-rT}，组合 C 的组成部分在今天的价值为p和S_T，因此

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \tag{10-6}$$

这就是所谓的**看跌－看涨平价关系式**(put-call parity)。该公式表明，具有某个执行价格与行使日期的欧式看涨期权价格可由一个具有相同执行价格和行使日期的看跌期权价值推导出来，结论反之亦然。

如果式(10-6)不成立，就会出现套利机会。假定股票价值为 31 美元，执行价格为 30 美元，无风险利率为每年 10%，3 个月的欧式看涨期权为 3 美元，3 个月期的欧式看跌期权为 2.25 美元，这时

$$c + Ke^{-rT} = 3 + 30e^{-0.1\times3/12} = 32.26 \text{ 美元}$$

$$p + S_0 = 2.25 + 31 = 33.25 \text{ 美元}$$

相对于组合 A 来讲，组合 C 的价格太高。一个正确的套利策略是买入组合 A 中的证券并同时卖出组合 C 中的证券，交易策略中包括买入看涨期权，卖出看跌期权及股票，因此，今天的现金流为

$$-3 + 2.25 + 31 = 30.25 \text{ 美元}$$

以无风险利率投资，这笔现金在 3 个月后将变为

$$30.25e^{0.1\times0.25} = 31.02 \text{ 美元}$$

如果在到期日股票价格高于 30 美元，看涨期权将会被行使，如果股票价格低于 30 美元，看跌期权将被行使。在这两种情况下，投资者以 30 美元的价格买入一股股票，购入股票可用于平仓卖空的股票。因此净收益为

$$31.02 - 30 = 1.02 \text{ 美元}$$

对于另外一种情况，假定看涨期权价格为 3 美元，看跌期权价格为 1 美元：

$$c + Ke^{-rT} = 3 + 30e^{-0.1\times3/12} = 32.26 \text{ 美元}$$

$$p + S_0 = 1 + 31 = 32.00 \text{ 美元}$$

这时组合 A 的价值比组合 C 的价值高。套利者可以卖空组合 A 中的证券，同时买入组合 C 中的证券来锁定盈利。交易策略包括卖空看涨期权，买入看跌期权及股票，最初的投资为

$$31 + 1 - 3 = 29 \text{ 美元}$$

当以无风险利率借入资金时，在 3 个月后需要偿还的金额为$29e^{0.1\times0.25} = 29.73$美元。与前面的例子类似，看涨期权或看跌期权将会被行使。卖出看涨期权与买入看跌期权将会使得股票以 30 美元的价格售出，因此净盈利为

$$30 - 29.73 = 0.27 \text{ 美元}$$

表 10-3 描述了以上例子。业界事例 10-1 说明看跌-看涨平价关系式可以用于解释公司的债券人及股权人的相互关系。

表 10-3 看跌-看涨期权平价关系式不成立时会出现的套利机会

	3 个月期限看跌期权为 2.25 美元	3 个月期限看跌期权为 1 美元
当前交易	买入看涨期权，付费 3 美元 卖出看跌期权，收入 2.25 美元 卖空股票收入 31 美元 将 30.25 美元的资金以无风险利率投资 3 个月	借入 29 美元资金，期限为 3 个月 卖出看涨期权，收入 3 美元 以 1 美元价格买入看跌期权 以 31 美元的价格买入股票
$S_T > 30$ 时 3 个月后的交易	由投资收入 31.02 美元 行使看涨期权，以 30 美元价格买入股票 净利润为 1.02 美元	看涨期权被行使，以 30 美元价格卖出股票 偿还 29.73 美元贷款 净利润为 0.27 美元
$S_T < 30$ 时 3 个月后的交易	由投资收入 31.02 美元 行使看跌期权，以 30 美元价格买入股票 净收益为 1.02 美元	看跌期权被行使，以 30 美元价格卖出股票 偿还 29.73 美元贷款的本息 净利润为 0.27 美元

业界事例 10-1 看跌-看涨期权平价关系式与资本结构

期权定价理论的先驱者为费舍尔·布莱克(Fisher Black)、梅隆·斯科尔斯(Myron Scholes)及罗伯特·默顿(Robert Merton)。在 20 世纪 70 年代初，他们证明了用期权理论可以对公司的资本结构进行分类，今天这一模型已被金融机构用来描述公司的信用风险。

为了对这种分析做示范，考虑一家公司，其资本结构包括：一零息债券及股票。假定债券在第 5 年时到期，到期的本金为 K。公司不付任何股息，假定在第 5 年时资产价格大于 K，公司股东选择偿还债券；如果资产价格小于 K，股东将宣布破产。这时债券持有人将掌握公司的所有权。

公司股票在第 5 年时价值为 $\max(A_T - K, 0)$，其中 A_T 为公司资产在第 5 年时的价值。这一关系式显示股东拥有一个对于公司资产的看涨期权，执行价格为 K。这时，债券持有者拥有什么呢？债券持有者的收益为 $\min(A_T, K)$，这一表达式等价于 $K - \max(K - A_T, 0)$。这表示债券价格等于 K 的贴现值减去公司资产上执行价格为 K 的欧式看跌期权的价值。

综上所述，令 c 及 p 分别为看涨及看跌期权的价值，则

$$\text{股权价值} = c$$

$$\text{债券价值} = PV(K) - p$$

将公司的当前资产价值记为 A_0，资产价值等于融资资产的全部价值。这意味着公司资产的现值等于股票价值加上债券的价格，因此

$$A_0 = c + [PV(K) - p]$$

重新组织上式，我们得出

$$c + PV(K) = p + A_0$$

这是由式(10-6)所述的平价关系式，它展示了公司资产的看涨及看跌期权所满足的关系式。

美式期权

虽然看跌-看涨期权的平价关系式只对欧式期权成立，但我们也可以从中得出美式期权服从的关系式。可以证明(见练习题 10.18)，当没有股息时

$$S_0 - K \leqslant C - P \leqslant S_0 - Ke^{-rT} \tag{10-7}$$

【例 10-3】 一个美式看涨期权的执行价格为 20 美元，期限为 5 个月，期权价格为 1.5 美元。假定当前股票价格为 19 美元，无风险利率为年率 10%。由式(10-7)，我们得出

$$19 - 20 \leqslant C - P \leqslant 19 - 20e^{-0.1 \times 5/12}$$

即

$$1 \geqslant P - C \geqslant 0.18$$

上式显示 $P - C$ 介于 0.18 ~1 美元之间。由于 C 为 1.5 美元，P 必须介于 1.68 ~2.50 美元之间。换句话讲，与美式看涨期权具有相同执行价格及期限的美式看跌期权价格的上下限分别为 2.50 美元及 1.68 美元。

10.5 提前行使期权：无股息股票的看涨期权

本节我们将说明在到期之前行使无股息股票的看涨期权永远不会是最佳选择。

为了说明问题的基本原理，考虑一个不付股息而且期限为 1 个月的美式看涨期权，股票价格为 70 美元，执行价格为 40 美元。这一期权实值程度很大(deep in the money)，期权的持有者可能会很想马上行使期权。但是，如果投资者计划在行使期权后将所得股票持有一个月以上，那么这不会是最佳策略。更好的方案是持有期权并在一个月后(即在到期日)行使期权，这样做可以使 40 美元的执行价格比马上行使晚一个月付出，因此可以挣得一个月内 40 美元的利息。因为股票不付任何股息，投资者不会损失任何由股票带来的收入。持有期权而不马上行使期权的另一个好处是股票在一个月内有可能低于 40 美元(尽管机会不大)。在这种情况下，投资者将不会行使期权，并且会很庆幸在一个月前没有提前行使期权。

这一讨论说明如果投资者计划在期权的剩余期限内持有股票(本例中的期限为一个月)，提前行使期权没有任何好处。但如果投资者认为股票的价格被高估了，这时是否应行使期权然后将股票卖掉呢？在这种情况下，投资者应该卖掉期权，而不是行使期权[⊖]。那些确实想持有股票的投资将会购买期权，而这样的投资者一定会存在，否则股票的当前价格就不会是 70 美元。综上所述，期权价格会大于其内涵价格 30 美元。

为了给出一个正式论证，我们利用式(10-4)

$$c \geqslant S_0 - Ke^{-rT}$$

因为美式期权的持有者行使期权的机会包括欧式期权行使期权的机会，因此

$$C \geqslant c$$

于是

$$C \geqslant S_0 - Ke^{-rT}$$

因为 $r>0$，当 $T>0$ 时我们有 $C>S_0-K$。这说明在当期之前期权价格 C 总是大于其内涵价值。如果提前行使期权，C 将等于行使时的内涵价值。因此，我们得出提前行使期权不会最优。

上下限

由于在没有股息时永远不会提前行使美式看涨期权，所以 $C=c$。由式(10-1)和式(10-4)，期权价值的上下限为

$$\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \leqslant c, C \leqslant S_0$$

这些上下限显示在图 10-3 中。

⊖ 另一种策略是投资者保留期权而卖空股票来锁定比 10 美元更多的盈利。

图 10-4 显示了期权价格与标的股票价格 S_0 之间的一般关系式。随着 r 或 T 或股票价格波动率的增长，看涨期权与股票价格关系的图形会朝箭头方向移动。

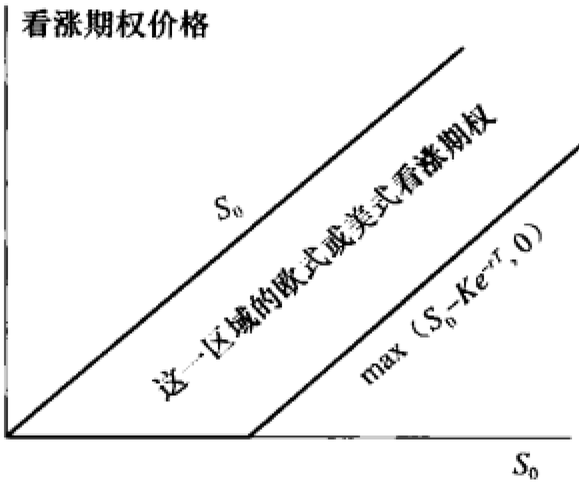


图 10-3　没有股息时美式与欧式看涨期权价格的上下限

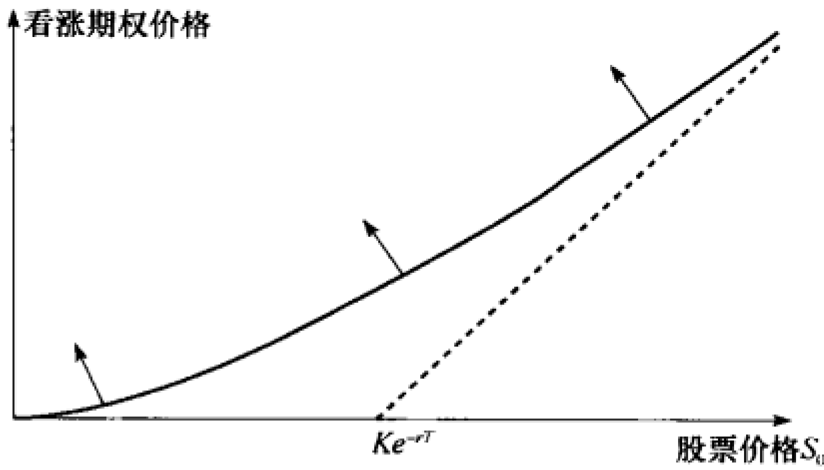


图 10-4　没有股息时美式与欧式看涨期权的价格与股票价格 S_0 之间的变化关系

一般来讲，无股息股票上美式看涨期权不应被提前行使的原因有两个。一个原因同期权所提供的保险相关。当拥有期权而不是股票时，持有者拥有价格保险。一旦期权被行使，执行价格同股票进行互换，保险也因此消失。另一个原因与货币的时间价值有关。对期权持有人而言，支付执行价格的时间越迟越好。

10.6　提前行使期权：无股息股票的看跌期权

提前行使无股息股票的看跌期权有时可能是最优的。事实上，在期权期限内的任一给定时刻，如果期权的实值程度足够大，应该提前行使期权。

为了说明这一点，考虑以下极端情形：假定执行价格为 10 美元，股票价格几乎为 0。通过立即行使期权，投资者可以马上获取近 10 美元。如果投资者选择等待，行使期权的盈利可能低于 10 美元，但不可能高于 10 美元，这是因为股票的价值不可能为负值。而且，现在收到 10 美元要比将来收到 10 美元更好。所以期权应该马上被行使。

与看涨期权类似，看跌期权也可以看做是一种保险，当同时持有股票与看跌期权时，看跌期权可以为期权持有者在股票价格下跌到一定水平时提供保险。但与看涨期权不同的是，放弃这一保险而提前行使期权从而立即实现行使价格可能为最优。一般来讲，当 S_0 减小，r 增大，以及 σ 减小时，提前行使期权可能会更有利。

上下限

在没有股息的情况下，由式(10-3)与式(10-5)可知欧式看跌期权的上下限为

$$\max(Ke^{-rT}-S_0,0)\leqslant p\leqslant Ke^{-rT}$$

对于无股息股票的美式看跌期权，由于总是可以马上行使期权，所以永远满足

$$P\geqslant\max(K-S_0,0)$$

这比式(10-5)中欧式看跌期权的关系式更强。利用式(10-2)中的结果，无股息股票的美式看跌期权的上下限为

$$\max(Ke-S_0,0)\leqslant P\leqslant K$$

图 10-5 展示了这些上下限。

图 10-6 说明了在一般情况下，美式看跌期权价格随 S_0 变化的形式。只要 $r>0$，当股票价格足够低时，立即行使美式期权的做法总是最优的。当提前行使期权是最优选择时，期权的价值为

$K-S_0$。因此当 S_0 很小时，表示看跌期权价值的曲线与看跌期权的内涵价值 $K-S_0$ 相重合。在图 10-6中，S_0 的值由 A 点表示。当 r 减小，或波动率增大，或期限 T 增大时，表示看跌期权价格与股票价格之间关系的曲线会按箭头所指方式移动。

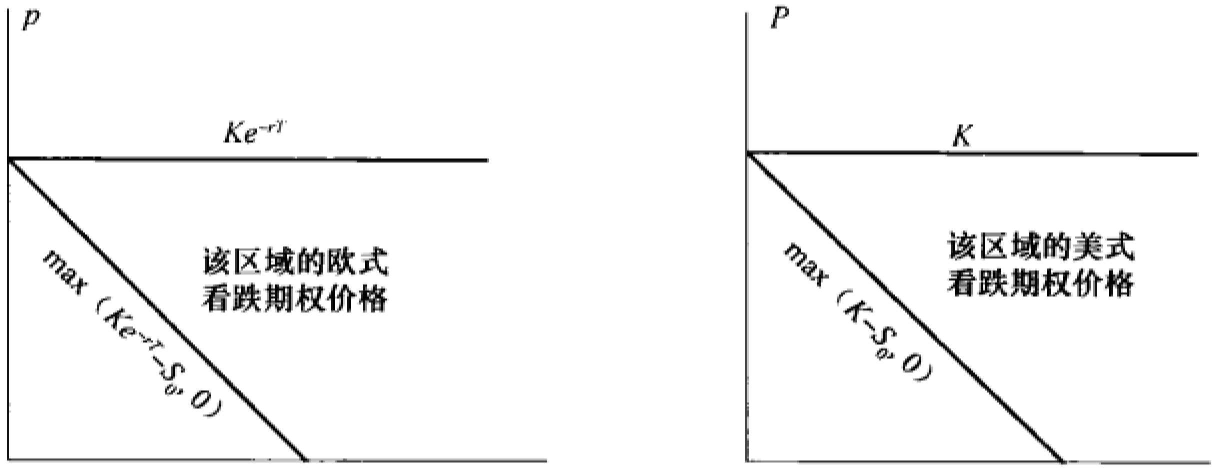


图 10-5　没有股息时欧式与美式看跌期权的上下限

由于在某些情形下提前行使美式看跌期权是最优的，因此美式看跌期权的价格总是会高于相应的欧式看跌期权价格。而且，由于美式看跌期权的价值有时等于其内涵价值(见图 10-6)，因此欧式看跌期权的价值有时会低于内涵价值，这说明欧式期权价格与标的股票价格之间关系的曲线将会位于相应美式期权曲线之下。

图 10-7 给出了欧式看跌期权价格随股票价格变化的图形。注意，在图 10-7 的 B 点上，期权价格等于其内涵价格，它所代表的股票价格必须大于图 10-6 中 A 点所代表的股票价格，因为图 10-7 的曲线位于图 10-6 的曲线之下。在图 10-7 中，E 点对应于 $S_0=0$ 而看跌期权价格为 Ke^{-rT}的情形。

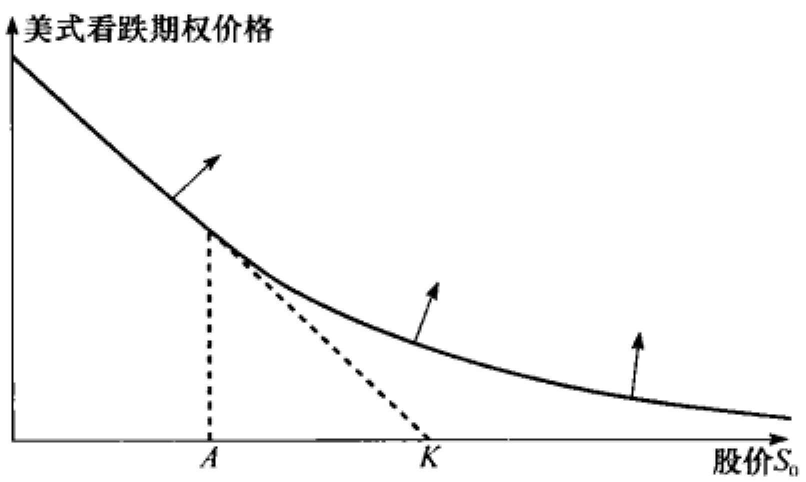


图 10-6　美式看跌期权的价格与股票价格之间的变化关系

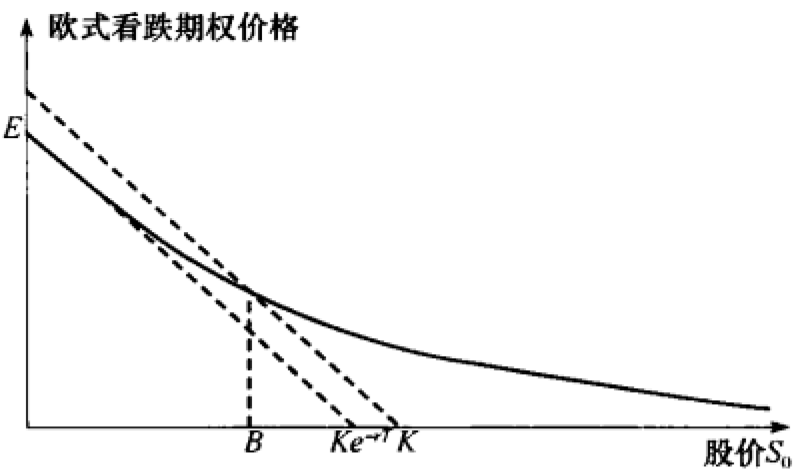


图 10-7　欧式看跌期权的价格与股票价格之间的变化关系

10.7　股息对于期权的影响

到目前为止，本章的结论均是在假设标的股票不支付任何股息的前提下得到的。在本节，我们考虑股息对期权的影响。我们假设在期权期限内股息的支付时间与数量都是已知的，因为大多数在交易所交易期权的期限都不超过 1 年，所以在大多数情况下这个假设并非不合理。我们用 D 来表示期权期限内股息的贴现值。在计算 D 时，假定股息在除息日支付。

10.7.1　看涨期权与看跌期权的下限

我们将组合 A 及 B 重新定义如下：

组合 A：一个欧式看涨期权加上数量为 $D+Ke^{-rT}$的现金；

组合 B：一股股票。

以推导式(10-4)的类似方法可以证明

$$c \geqslant \max(S_0 - D - Ke^{-rT}, 0) \tag{10-8}$$

我们将组合 C 和 D 重新定义如下：

组合 C：一个欧式看跌期权加上一股股票；

组合 D：数量为 $D + Ke^{-rT}$ 的现金。

以推导式(10-5)的类似方法可以证明

$$p \geqslant \max(D + Ke^{-rT} - S_0, 0) \tag{10-9}$$

10.7.2 提前行使

当股息在预计之中时，我们将不再有美式看涨期权不会被提前行使的结论。有时在除息日之前，行使美式看涨期权为最优，而在其他时刻行使美式看涨期权不会是最优策略。在 14.12 节中我们将进一步讨论这一点。

10.7.3 看跌-看涨平价关系式

比较在 T 时刻的经过重新定义的组合 A 与组合 C 的价格，我们可以得出：当存在股息时，式(10-6)所表达的看跌-看涨平价关系式变为

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0 \tag{10-10}$$

股息会使式(10-7)变成(见练习题 10.19)

$$S_0 - D - K \leqslant C - P \leqslant S_0 - Ke^{-rT} \tag{10-11}$$

小 结

6 种因素会影响股票期权的价值：股票的当前价格、执行价格、期限、股票价格的波动率、无风险利率，以及在期权期限内所预期的股息。当股票当前价格、期限、波动率以及无风险利率增加时，看涨期权的价值也会增加；当执行价格及预期股息增加时，看涨期权价值会减小。当执行价格、期限、波动率和预期股息增加时，看跌期权价值一般也会增加；当股票的当前价格及无风险利率增加时，看跌期权的价值会减小。

我们也可以在不对股票价格的波动率做任何假设的前提下，对期权价格做出一定判断。例如，股票看涨期权的价格一定总是低于股票本身的价格。类似地，股票看跌期权的价格永远低于股票期权的执行价格。

一个无股息股票的看涨期权的价格必须高于

$$\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$$

式中 S_0 为股票价格，K 为执行价格，r 为无风险利率，T 为期限。无股息股票的看跌期权的价格必须高于

$$\max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$$

假定股票支付的股息的贴现值为 D，欧式看涨期权的下限为

$$\max(S_0 - D - Ke^{-rT}, 0)$$

欧式看跌期权的下限为

$$\max(Ke^{-rT} + D - S_0, 0)$$

看跌-看涨期权的平价关系是欧式股票看涨期权 c 和欧式股票看跌期权 p 之间的关系式。对于无股息股票，该平价关系式为

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

支付股息股票的平价关系式为

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

对于美式期权，看跌-看涨平价关系式不成立。但是，我们可以利用无套利理论获得美式看涨期权与看跌期权差价的上限和下限。

在第 14 章中，我们将利用股票价格的概率分布假设来对于本章的结论做出进一步分析。我们将推导欧式期权的准确定价公式。在第 12 章和第 20 章中我们将看到如何采用数值方法来对美式期权定价。

推荐阅读

Black, F., and M. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81 (May/June 1973): 637–59.

Broadie, M., and J. Detemple. "American Option Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods," *Review of Financial Studies*, 9, 4 (1996): 1211–50.

Merton, R.C.. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29, 2 (1974): 449–70.

Merton, R.C. "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973): 141–83.

Merton, R.C. "The Relationship between Put and Call Prices: Comment," *Journal of Finance*, 28 (March 1973): 183–84.

Stoll, H.R. "The Relationship between Put and Call Option Prices," *Journal of Finance*, 24 (December 1969): 801–24.

练习题

10.1 列出影响期权价格的6个因素。

10.2 一个无股息股票的看涨期权的期限为4个月，执行价格为25美元，股票的当前价格为28美元，无风险利率为每年8%，期权的下限为多少？

10.3 一个无股息股票的看跌期权的期限为1个月，执行价格为15美元，当前股票价格为12美元，无风险利率为每年6%时，期权的下限为多少？

10.4 列举两个原因来说明为什么无股息股票的美式看涨期权不应被提前行使。第一个原因应涉及货币时间价值；第二个原因在利率为0时也应成立。

10.5 "提前行使美式看跌期权是在货币的时间价值与看跌期权的保险价值之间的权衡"，解释这一观点。

10.6 解释为什么一个支付股息股票美式看涨期权的价格至少等于其内涵价格。这对欧式看涨期权也成立吗？解释你的答案。

10.7 一只无股息股票的价格为19美元，这一股票上一个3个月期的欧式看涨期权的执行价格为20美元，期权的价格为1美元，无风险利率为每年4%，这只股票上3个月期限执行价格为20美元的看跌期权价格为多少？

10.8 解释为什么对于欧式期权看跌-看涨平价关系的讨论对于美式期权不适用。

10.9 一个无股息股票的欧式看涨期权的期限为6个月，执行价格为75美元，股票当前价格为80美元，无风险利率为每年10%时，期权价格的下限为多少？

10.10 一个无股息股票的欧式看跌期权的期限为2个月，执行价格为65美元，股票当前价格为58美元，无风险利率为每年5%时，期权价格的下限为多少？

10.11 一个期限为4个月，支付股息的股票的欧式看涨期权的价格为5美元，期权执行价格为60美元，股票当前价格为64美元，股票预计在一个月时将支付0.8美元的股息，对于所有期限的无风险利率均为12%，这时对于套利者而言存在什么样的套利机会？

10.12 一个期限为1个月的无股息股票的欧式看跌期权的当前价格为2.5美元。股票价格为47美元，执行价格为50美元，无风险利率为每年6%，这时对套利者而言存在什么样的套利机会？

10.13 给出一个直观解释当无风险利率上升及波动率下降时，提前行使美式看跌期权会变得更吸引人。

10.14 一个执行价格为30美元，期限为6个月的欧式看涨期权的价格为2美元。标的股票价格为29美元，股票预期在2个月及5个月时分别发放0.5美元股息，所有期限的无风险利率均为10%，执行价格为30美元，期限为6个月的欧式看跌期权的价格为多少？

10.15 仔细解释当练习题10.14中的欧式看跌

期权价格为3美元时，套利者会有什么样的套利机会？

10.16 一个无股息股票的美式看涨期权的价格为4美元，执行价格为30美元，期限为3个月，无风险利率为8%，股票价格为31美元，推出具有相同股票价格、相同执行价格及相同期限的美式看跌期权的上下限。

10.17 在练习题10.16中，如果美式看跌期权价格高于其上限，仔细说明这时存在什么样的套利机会。

10.18 证明式(10-7)[提示：对于关系式的第一部分，考虑一个由欧式看涨期权及一个数量为K的现金组合，以及一个由美式看跌期权及一股股票的组合]。

10.19 证明式(10-11)[提示：对于关系式的第一部分，考虑一个由欧式看涨期权及一个数量为$D+K$的现金的组合，以及一个由美式看跌期权及一股股票的组合]。

10.20 考虑一个5年期的雇员股票期权，标的股票不支付股息，期权可以在一年后任何时刻行使。与通常在交易所内交易的看涨期权不同的是，雇员股票期权不能被出售。这一限制对提前形式策略会有什么影响？

10.21 采用DerivaGem软件来验证图10-1及图10-2的正确性。

作业题

10.22 对于同一股票的欧式看涨及看跌期权的执行价格均为20美元，期限均为3个月，两个期权价格均为3美元，无风险利率均为每年10%，当前股票价格为19美元，在1个月时股票预计支付1美元的股息。识别对于交易员来讲，这时会有什么样的套利机会。

10.23 假设c_1、c_2、c_3分别代表执行价格为K_1、K_2及K_3的欧式看涨期权的价格，这里的执行价格满足$K_3 > K_2 > K_1$和$K_3 - K_2 = K_2 - K_1$。所有期权具有相同的期限，证明

$$c_2 \leqslant 0.5(c_1 + c_3)$$

(提示：考虑以下交易组合：一个执行价格为K_1的期权的长头寸，一个执行价格为K_3的期权的长头寸，以及两个执行价格为K_2的期权的短头寸。)

10.24 如果作业题10.23中的期权为欧式看跌期权，结果又会如何？

10.25 假设你是一家杠杆比例很高的公司经理和唯一股东，所有的债务在1年后到期，如果届时公司的价值高于债务的面值，你将偿还债务；如果届时公司价值小于债务的面值，你将宣布破产，同时债务人将会拥有公司。

(a)将公司的价值作为期权的标的资产，描述你的头寸状况。

(b)将公司的价值作为期权的标的资产，描述债权人的头寸状况。

(c)你应该如何提高你的头寸的价值？

10.26 考虑以下期权：股票价格为41美元，执行价格为40美元，无风险利率为6%，波动率为35%，期限为1年。假定股票预计在6个月时发放0.5美元股息。

(a)假定期权为欧式看涨期权，采用DerivaGem软件对这一期权进行定价。

(b)假定期权为欧式看跌期权，采用DerivaGem软件对这一期权进行定价。

(c)验证看跌-看涨平价关系式。

(d)用DerivaGem来说明当期权期限变得很长时，期权价格会如何改变？在分析中假定股票无股息。对你所得出的结果进行解释。

10.27 考虑无股息股票的看跌期权，股票价格是40美元，执行价格是42美元，无风险利率是2%，波动率是每年25%，期限是3个月。利用DerivaGem解决以下问题：

(a)当期权是欧式时的价格(采用Black-Scholes European)。

(b)当期权是美式时的价格(采用Binomial: American，100步)。

(c)图10-7中的点B。



第 11 章

期权交易策略

在第 8 章我们讨论过由单个期权所产生的盈利形式。在本章，我们将讨论当期权与其他资产相结合时能够产生什么样的盈利形式，特别是由以下头寸构成的组合：期权与零息债券，期权与标的资产，以及同一标的资产上的两个或更多个期权。

在以后的章节里还会考虑涉及期权的更多交易策略。例如，在第 16 章将讨论如何利用股指来管理股票组合的风险，并解释如何利用范围远期来对冲关于外汇的风险暴露；在第 18 章我们考虑在交易期权时如何利用希腊字母来管理风险；第 25 章考虑特种期权以及所谓的静态期权复制方法。

11.1 保本债券

在零售市场上，期权常常用来构造**保本债券**(principal-protected notes)，这种产品对保守的投资者很有吸引力。投资者收益依赖于单个股票、股指或其他风险资产的表现，但是本金却没有风险。下面的例子说明了如何构造简单的保本债券。

【例 11-1】 假设连续复利的 3 年期利率为 6%，这说明 $1\,000e^{-0.06\times 3}=835.27$ 美元在 3 年后将增长为 1 000 美元。1 000 美元与 835.27 美元的差额是 164.73 美元。假设一个组合的价值是 1 000 美元，提供的收益率是每年 1.5%。再假设可以按低于 164.73 美元的价格买入该组合的 3 年期欧式平值看涨期权(由 DerivaGem 可以验证，当组合价值的波动率小于 15% 时，确实如此)。一家银行可以向客户提供以下形式的 1 000 美元的投资机会：

- 面值为 1 000 美元的 3 年期零息债券；
- 标的物为股票组合的 3 年期欧式平值看涨期权。

如果组合的价值增长，那么投资者将得到 1 000 美元所增长的数量(因为零息债券的收益是 1 000美元，这正好等于期权的执行价格)。假如组合价值下跌，期权将没有价值，在零息债券上的投资保证了投资者可以得到所投资的本金 1 000 美元。

保本债券的诱人之处是投资者能够在不用冒本金风险的情况下，对风险资产建立头寸。最坏的情况是在债券有效期内失去赚取初始投资的利息(或其他收入，比如红利)的机会。

市场上有许多上述产品的变形。认为资产价格将会下跌的投资者可以购买由零息债券与看跌期权组成的保本债券，3 年后投资者的收益是 1 000 美元加上看跌期权的收益。

从投资者的角度看，保本债券是不是合算呢？当生成保本债券时，银行总是首先要将自己的盈利包含在内，这说明在例 1-1 中，零息债券加上看涨期权对银行的成本将会小于 1 000 美元。另外，投资者还要承受银行无法支付保本债券收益的风险(在 2008 年，当雷曼兄弟倒闭时，有些保本债券投资者在雷曼发行的保本债券上蒙受了损失)。因此，在某些情况下，更好的做法是投

资者自己按通常的方式购买标的期权，并将剩余的本金投资到无风险投资上。但情况并非总是如此，在购买期权时，同银行相比，普通投资者很可能面临更大的买入卖出差价，而且所挣的利息很可能比银行要低。因此银行有可能会给投资者带来利益，同时自己也能盈利。

我们现在从银行的角度看保本债券。例 11-1 中结构的经济可行性依赖于利率水平与组合的波动率。如果利率是 3% 而不是 6%，银行仅有 $1\,000-1\,000e^{-0.03\times3}=86.07$ 美元的资金购买看涨期权。如果利率是 6%，但波动率是 25% 而不是 15%，期权的价格将会是 221 美元。在这两种情况之下，例 11-1 中的产品都无法使银行盈利。但是，银行仍然有办法构造可以盈利的 3 年期产品。例如，可以提高期权的执行价格，使得比如只有当组合价格增长 15% 时投资者才会获利；投资者的收益可以封顶；投资者的收益可以依赖于组合的平均价格（而不是最后的价格）；可以指明一个将期权敲出的临界水平。在本书的后面部分，将会讨论这里涉及的一些衍生产品（对期权加以上限对应于本章后面讨论的牛市差价期权策略）。

当利率较低或波动率较高时，一种可使银行盈利的保本债券方式是延长债券到期日。考虑例 11-1 的情形，其中利率是 3% 而不是 6%，以及股票组合的波动率为 15% 并且提供 1.5% 的股息率。DerivaGem 给出的 3 年期平值欧式看涨期权的成本为 119 美元，这高于可以用来购买期权的金额（$1\,000-1\,000e^{-0.03\times3}=86.07$ 美元）。10 年期平值欧式看涨期权的成本大约是 217 美元，这低于可以用来购买期权的金额（$1\,000-1\,000e^{-0.03\times10}=259.18$ 美元），从而使产品能够盈利。当期限延长到 20 年时，期权的成本大约为 281 美元，这比可以用来购买它的资金（$1\,000-1\,000e^{-0.03\times20}=451.19$ 美元）要低得多，因此产品的盈利更高。

在我们的例子中，对银行而言一个关键的变量是股息率，股息率越高，产品给银行的盈利也越高；如果股息率为零，无论期限是多长，例 11-1 所讨论的保本债券都不会给银行带来利润（这可以从式（10-4）看出）。

11.2 包括单一期权与股票的策略

为了方便起见，我们假设在本章剩下部分内所考虑的期权标的资产是股票（对其他标的产品同样可以建立类似的交易策略）。我们也按通常的做法来计算盈利，即最后的收益减去最初的费用，并且忽略贴现效应。

包括单一股票期权和股票的策略有多种不同的形式。这些盈利的状态见图 11-1。在本图及本章的其他图形中，虚线代表组合中的单个证券的盈利与股票价格之间的关系，而实线则代表整个组合的盈利和股票价格之间的关系。

在图 11-1a 中，交易组合是由一个股票的长头寸与一个欧式看涨期权的短头寸组成，这种交易策略被称为**备保看涨期权承约**（writing covered call）。这里股票的长头寸"**掩护**"（cover）或保护投资者，使其免遭由于股票价格急剧上涨所带来的损失。在图 11-1b 中，交易组合由一个股票的短头寸加上一个欧式看涨期权的长头寸组合而成，其盈利状态与备保看涨期权的盈利状态相反。在图 11-1c 中，交易组合包括一个看跌期权的长头寸及股票长头寸本身，这一交易策略有时被称为**保护看跌期权**（protective put）策略。在图 11-1d 中，交易组合是由一个看跌期权的短头寸和一个股票本身短头寸本身组成，这一交易策略的盈利状态与有保护的看跌期权的盈利状态相反。

图 11-1 中的盈利状态与第 9 章中讨论的看跌期权短头寸、看跌期权长头寸、看涨期权长头寸及看涨期权短头寸的盈利状态相似。由看跌-看涨平价关系式，我们可以理解为何如此。由第 10 章的看跌-看涨平价关系式为

$$p+S_0=c+Ke^{-rT}+D \tag{11-1}$$

式中 p 为欧式看跌期权的价格，S_0 为股票价格，c 为欧式看涨期权的价格，K 为看涨期权与看跌期权的执行价格，r 为无风险利率，T 为看涨期权及看跌期权的期限，D 为期权期限内预期发放

股息的贴现值。

式(11-1)表明，看跌期权的长头寸加上股票的长头寸等同于看涨期权的长头寸加上一定数量($Ke^{-rT}+D$)的现金。这就解释了为什么图 11-1c 中的头寸与看涨期权的长头寸相似。图 11-1d 的头寸与图 11-1c 的形式相反，因此其盈利状态类似于看涨期权的短头寸的盈利状态。

式(11-1)可变形为

$$S_0 - c = Ke^{-rT} + D - p$$

换句话讲，一个股票的长头寸与一个欧式看涨期权的短头寸等价于一个欧式看跌期权的短头寸加上一定数量($Ke^{-rT}+D$)的现金。这一方程解释了为什么图 11-1a 的盈利状态类似于看跌期权短头寸的盈利状态。图 11-1b 的头寸刚好与图 11-1a 中的头寸相反，因此其盈利状态类似于看跌期权的长头寸的盈利状态。

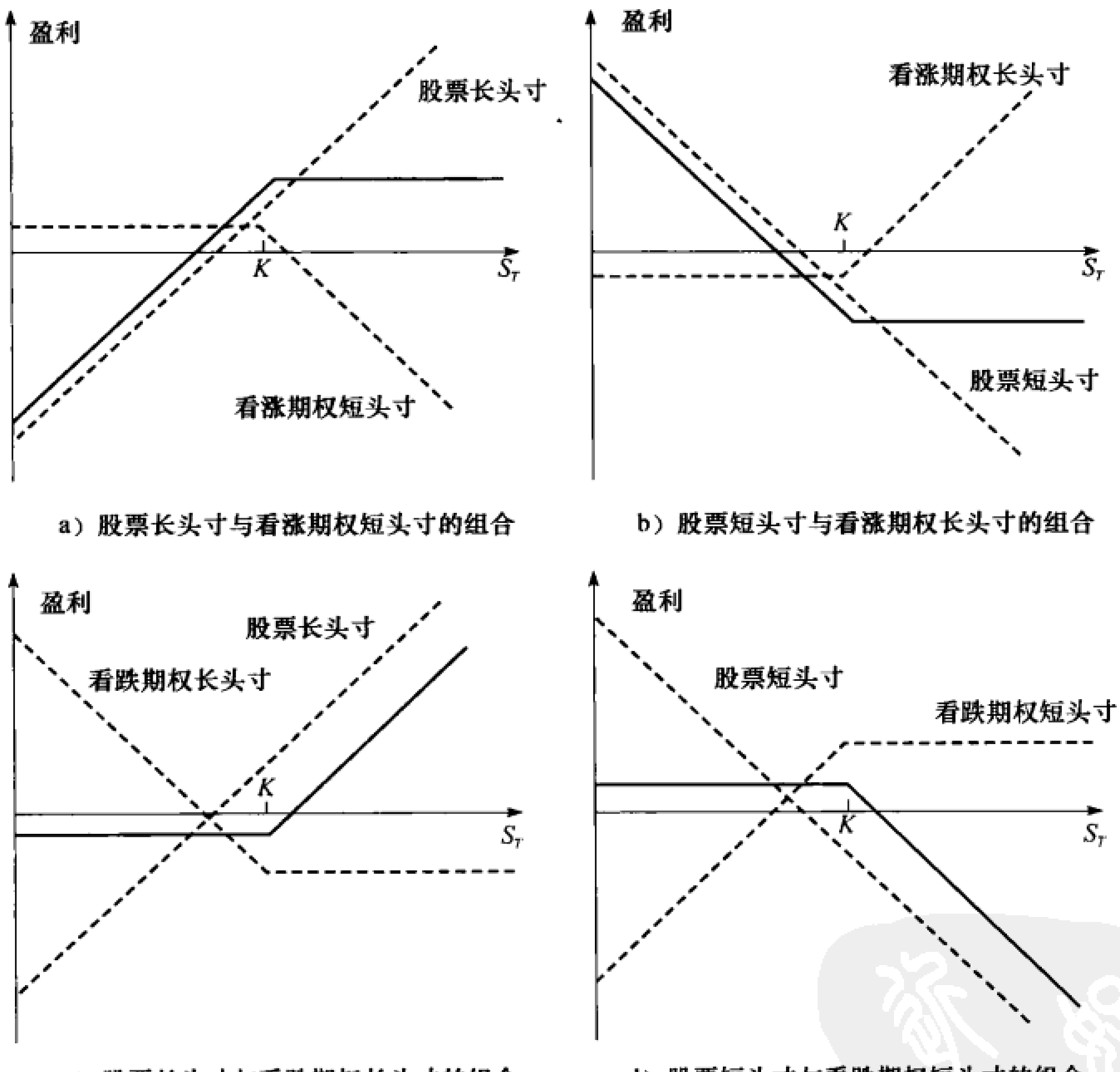


图 11-1 4 种交易策略的盈利

11.3 差价

差价是指将具有相同类型的两个或多个期权(由两个或更多个看涨期权或两个或更多个看跌期权)组合在一起的交易策略。

11.3.1 牛市差价

最流行的差价中的一种是**牛市差价**(bull spread)，这种差价可以通过买入一个具有某一确定

执行价格的欧式股票看涨期权和卖出一个同一股票但具较高执行价格的欧式股票看涨期权组合而成，两个期权的期限相同。该策略见图 11-2。两个期权头寸的盈利由虚线表示。整个交易策略的盈利为两个虚线表示的盈利之和，在图中由实线表示。随着执行价格的上升，看涨期权的价格会下降，执行价格较高期权的价值总是小于执行价格较低的期权的价值。由此可见由看涨期权组成的牛市差价是需要初始投资的。

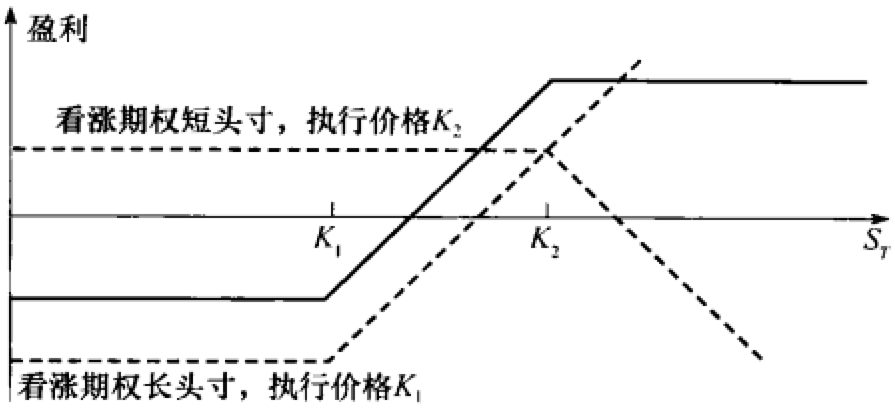


图 11-2　由看涨期权所构造的牛市差价的盈利

假定 K_1 为买入的看涨期权的执行价格，K_2 为卖出的看涨期权的执行价格，S_T 为期权到期日时股票价格。表 11-1 显示了牛市差价在不同情况下实现的总收益。如果股票价格表现良好，即价格上涨并高于组合中较高的执行价格时，牛市差价收益为两个执行价格的差，即 K_2-K_1；如果在到期日股票价格介于两个执行价格之间，牛市差价的收益为 S_T-K_1；如果在期权到期日时，股票价格低于较低的执行价格，牛市差价的收益为0。在图 11-2 中，盈利等于最终收益减去最初的投资。

表 11-1　由看涨期权所构造的牛市差价的收益

股票价格范围	看涨期权长头寸的收益	看涨期权短头寸的收益	整体收益
$S_T \leqslant K_1$	0	0	0
$K_1 < S_T < K_2$	S_T-K_1	0	S_T-K_1
$S_T \geqslant K_2$	S_T-K_1	$-(S_T-K_2)$	K_2-K_1

牛市差价限制了投资者的收益但同时也控制了损失的幅度。这一策略可表达为：投资者拥有一个执行价格为 K_1 的期权，同时通过卖出执行价格为 $K_2(K_2>K_1)$ 的期权而放弃了股票上涨的潜在盈利。作为对放弃潜在盈利的补偿，投资者获得了执行价格为 K_2 的期权费用。在市场上有 3 种不同类型的牛市差价。

- 最初的两个看涨期权均为虚值期权；
- 最初的一个看涨期权为实值期权，另一个看涨期权为虚值期权；
- 最初的两个看涨期权均为实值期权。

第一种牛市差价最为激进，这一策略的成本很低，收到高收益（$=K_2-K_1$）的概率也很小。当我们从类型 1 到类型 2，从类型 2 到类型 3，牛市差价逐渐趋于保守。

【例 11-2】　某投资者以 3 美元的价格买入一个 3 个月期限执行价格为 30 美元的欧式看涨期权并同时以 1 美元的价格卖出一个 3 个月期限执行价格为 35 美元的欧式看涨期权。如果股票价格高于 35 美元，这一牛市差价的收益为 5 美元；如果股票价格低于 30 美元，牛市差价的收益为 0；如果股票价格介于 30～35 美元之间，牛市差价的收益为股票价格与 30 美元的差。这一牛市差价策略的成本为 3－1＝2 美元。其盈利如表 11-2 所示。

表　11-2

股票价格范围	盈利
$S_T \leqslant 30$	-2
$30 < S_T < 35$	S_T-32
$S_T \geqslant 35$	3

如图 11-3 所示，牛市差价也可以由通过买入较低执行价格的欧式看跌期权和卖出较高执行价格的欧式看跌期权构造而成。与采用看涨期权来构造牛市差价不同的是，用看跌期权来构造牛市差价会给投资者在最初带来一个正的现金流（忽略保证金的要求），而其收益为负或为 0。

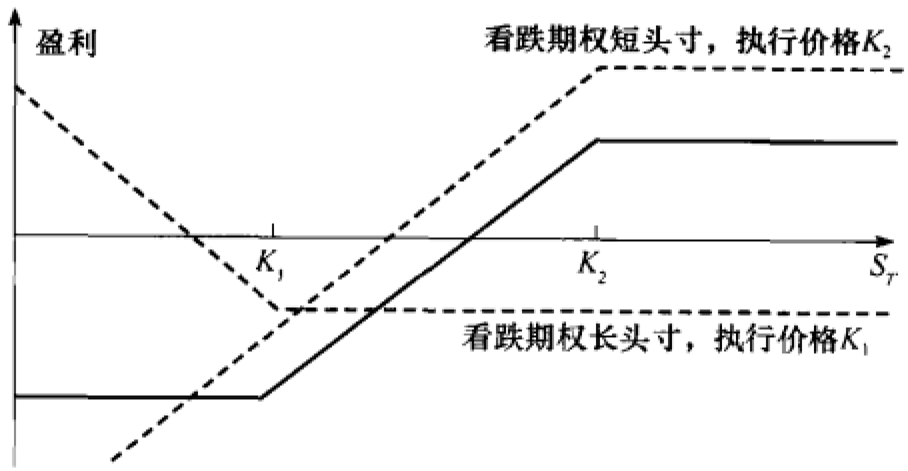


图 11-3 由看跌期权所构造的牛市差价的盈利

11.3.2 熊市差价

持有牛市差价的投资者希望股票价格上升。与此相反，持有**熊市差价**(bear spread)的投资者希望股票价格下降。熊市差价的期权策略可以由买入具有某一执行价格的欧式看跌期权并同时卖出具有另一执行价格的欧式看跌期权来构造。买入期权的执行价格大于卖出期权的执行价格(这与牛市差价刚好相反，牛市差价中的买入期权的执行价格总是小于卖出期权的执行价格)。在图 11-4 中，差价的盈利由实线表示。由看跌期权构造的熊市差价在最初会有一个现金流的支出，这是因为卖出期权的价格小于买入期权的价格。事实上，买入具有某一执行价格看跌期权的投资者决定在卖出一个具有低执行价格看跌期权后放弃了一部分可能的盈利。对放弃可能盈利的投资者的补偿是得到卖出期权的价格。

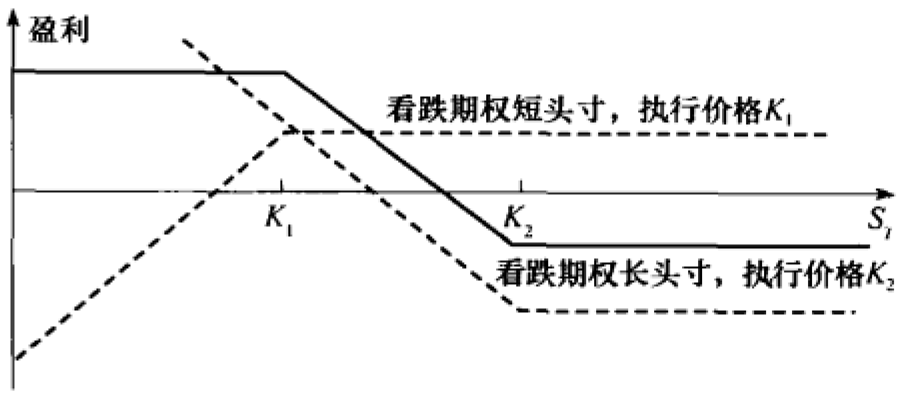


图 11-4 由看跌期权所构造的熊市差价的盈利

假定期权的执行价格为 K_1 及 K_2，其中 $K_1 < K_2$。表 11-3 显示了在不同情况下，熊市差价的收益。当股票价格大于 K_2 时，收益为 0；当股票价格低于 K_1 时，收益为 $K_2 - K_1$；当股票价格介于 K_1 与 K_2 之间时，收益为 $K_2 - S_T$。交易策略的盈利等于收益减去初始费用。

表 11-3 由看跌期权所构造的熊市差价的收益

股票价格范围	看涨期权长头寸的收益	看涨期权短头寸的收益	整体收益
$S_T \leqslant K_1$	$K_2 - S_T$	$-(K_1 - S_T)$	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T < K_2$	$K_2 - S_T$	0	$K_2 - S_T$
$S_T \geqslant K_2$	0	0	0

【例 11-3】 由看跌期权所构成的熊市差价。投资者以 3 美元的价格买入 3 个月期限执行价格为 35 美元的欧式看跌期权，并以 1 美元的价格卖出了 3 个月期限执行价格为 30 美元的欧式看跌期权。如果股票价格高于 35 美元，熊市差价策略的收益为 0；如果股票价格小于 30 美元，熊市差价策略的收益为 5 美元；如果股票介于 30 ~ 35 美元之间，熊市差价的收益为 $35 - S_T$。期权的最初费用为 $3 - 1 = 2$ 美元。因此盈利如表 11-4 所示。

表 11-4

股票价格范围	盈利
$S_T \leqslant 30$	+3
$30 < S_T < 35$	$33 - S_T$
$S_T \geqslant 35$	-2

与牛市差价类似，熊市差价限定了盈利的上限，同时也控制了损失幅度。熊市差价可以不用

看跌期权而用看涨期权来构造。投资者可以买入一个具有较高执行价格的看涨期权并同时卖出一个具有较低执行价格的看涨期权，交易策略如图 11-5 所示，由看涨期权所构成的熊市差价会有一个现金流的流入（忽略保证金的要求）。

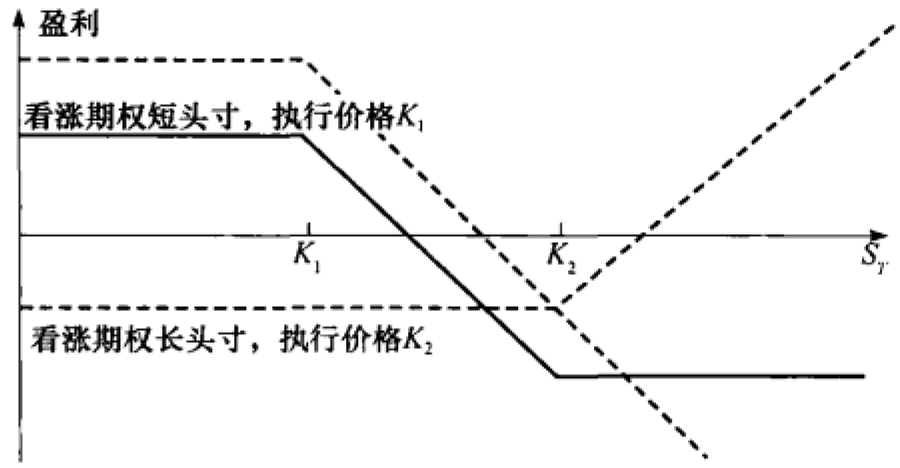


图 11-5 由看涨期权所构造的熊市差价的盈利

11.3.3 盒式差价

盒式差价（box spread）是由执行价格为 K_1 与 K_2 的看涨期权所构成的牛市差价与一个具有相同执行价格所构成的熊市差价的组合。如表 11-5 所示，一个盒式差价的收益为 K_2-K_1，因此盒式差价的贴现值为 $(K_2-K_1)e^{-rT}$。如果其值与这一数值有所不同，就会产生套利机会。如果盒式差价的市场价格过低，套利者可以采用买入盒式来盈利，这时套利策略包括：买入一个具有执行价格 K_1 的看涨期权，买入一个执行价格为 K_2 的看跌期权，卖出一个执行价格为 K_2 的看涨期权并卖出一个执行价格为 K_1 的看跌期权。如果盒式差价的市场价格过高，套利者可以采用卖出盒式来盈利，套利策略为买入执行价格为 K_2 的看涨期权，买入一个执行价格为 K_1 的看跌期权，卖出一个执行价格为 K_1 的看涨期权并卖出一个执行价格为 K_2 的看跌期权。

表 11-5 盒式差价的盈利

股票价格范围	牛市溢差收益	熊市溢差收益	整体收益
$S_T \leqslant K_1$	0	K_2-K_1	K_2-K_1
$K_1<S_T<K_2$	S_T-K_1	K_2-S_T	K_2-K_1
$S_T \geqslant K_2$	K_2-K_1	0	K_2-K_1

我们应注意到盒式差价只对欧式期权适用。在交易所交易的大多数期权为美式期权。正如业界事例 11-1 所示，没有经验的交易员将美式期权作为欧式期权来处理可能会遭受损失。

业界事例 11-1 盒式差价产生的损失

假定一只股票的价格为 50 美元，波动率为 30%，股票无股息，无风险利率为 8%，一个 CBOE 交易员向你提供以 5.10 美元价格卖出一个 2 个月期限盒式差价的机会。盒式期权中的执行价格分别为 55 美元及 60 美元。你该做这笔交易吗？

这个交易看起来很诱人。这时 $K_1=55$，$K_2=60$，在 2 个月时的收益为一定量，即 5 美元。以 5.10 美元卖出盒式期权并将资金投资 2 个月，你可以在 2 个月时有足够多的资金也满足 2 个月 5 美元的收益。盒式差价的理论价格为 $5e^{-0.08\times 2/12}=4.93$ 美元。

不幸的是，这种考虑方式过于粗心大意。因为 CBOE 的股票为美式期权，而盒式差价为 5 美元的收益是建立在期权为欧式期权的基础上。一个执行价格为 55 美元及 60 美元的牛市差价的价格为 $0.96-0.26=0.70$（无论是欧式还是美式期权，这个数量相同。如第 10 章所示，当股票无股息时，欧式期权的价格等于美式期权的价格）。一个由同样执行价格

的欧式看跌期权所构造的熊市差价的价格为 10 - 5.44 = 4.56 美元。当差价期权由欧式期权构成时，两个差价期权的组合费用为 0.70 + 4.23 = 4.93 美元。这一数值刚好等于以上所计算的理论价格。当差价期权由美式期权构成时，两个差价期权的组合费用为 0.70 + 4.56 = 5.26 美元。以 5.10 美元的价格卖出由美式期权所构成的盒式差价并不合算。原因是在交易后，由于交易涉及卖出一个 60 美元执行价格的看跌期权，你会很快认识到这一点，因为交易涉及到卖出一个 60 美元执行价格的看跌期权，这个期权在卖出后会马上被行使。

表 11-6 （单位：美元）

期权类型	执行价格	欧式期权价格	美式期权价格	期权类型	执行价格	欧式期权价格	美式期权价格
看涨	60	0.26	0.26	看跌	60	9.46	10.00
看涨	55	0.96	0.96	看跌	55	5.23	5.44

11.3.4 蝶式差价

蝶式差价(butterfly spread)策略由 3 种具有不同执行价格的期权组成。其构造方式为：买入一个具有较低执行价格 K_1 的欧式看涨期权，买入一个具有较高执行价格 K_3 的欧式看涨期权，并卖出两个具有执行价格为 K_2 的欧式看涨期权，其中 K_2 为 K_1 及 K_3 的中间值。一般来讲，K_2 接近于当前股票价格。这一交易策略的盈利表示在图 11-6 中。如果股票价格保持在 K_2 附近，蝶式差价会产生盈利，但如果股票价格远远偏离 K_2，蝶式差价会有小量的损失。因此蝶式差价对于那些认为股票价格不会有较大波动的投资者而言会非常合理。该策略需要少量的初始投资。表 11-7 给出了蝶式差价的收益。

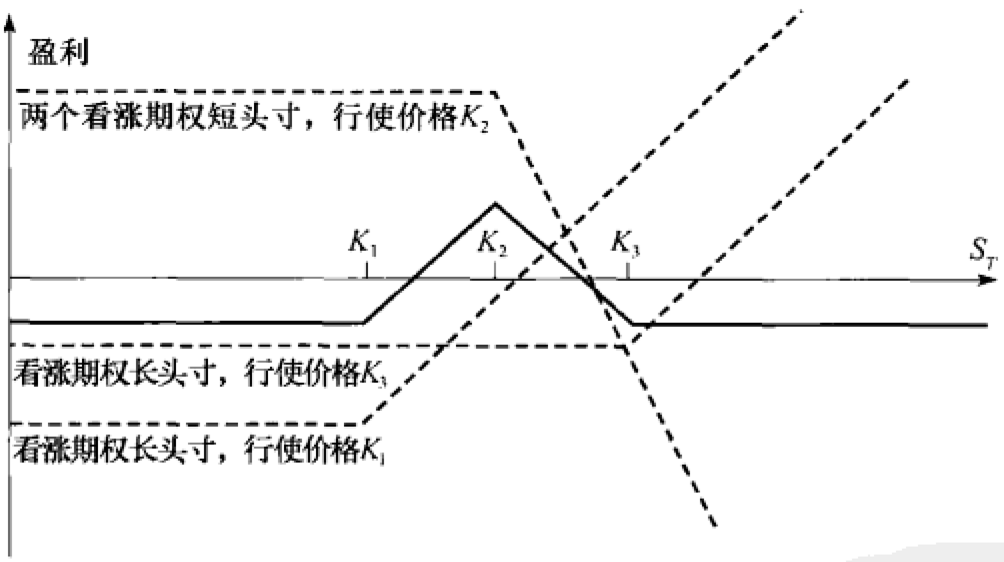


图 11-6 由看涨期权所构造的蝶式差价的收益

表 11-7 一个蝶式差价期权的收益

股票价格范围	第一看涨期权长头寸的收益	第二看涨期权长头寸的收益	期权短头寸的收益	整体收益
$S_T \leqslant K_1$	0	0	0	0
$K_1 < S_T \leqslant K_2$	$S_T - K_1$	0	0	$S_T - K_1$
$K_2 < S_T < K_3$	$S_T - K_1$	0	$-2(S_T - K_2)$	$K_3 - S_T$
$S_T \geqslant K_3$	$S_T - K_1$	$S_T - K_3$	$-2(S_T - K_2)$	0

注：计算整体收益时采用了关系式 $K_2 = 0.5(K_1 + K_3)$。

假定某股票的当前价格为 61 美元，某投资者认为在今后 6 个月股票价格不可能会发生重大变动。假定 6 个月欧式看跌期权价格如右表所示。

执行价格	看涨期权
55	10
60	7
65	5

投资者可以买入执行价格为 55 美元的看涨期权，买入一个执行价格为 65 美元的看涨期权，并同时卖出两个执行价格为 60 美元的看涨期权来构造蝶式差价。构造这一蝶式差价的费用为 $10+5-2\times7=1$ 美元。如果在 6 个月后，股票价格高于 65 美元或低于 55 美元，蝶式差价的收益为 0，这时投资者的净损失为 1 美元，如果股票价格介于 56 美元和 64 美元之间，投资者会盈利。在 6 个月时，股票价格为 60 美元，投资者会有最大盈利，即 4 美元。

蝶式差价也可以由看跌期权来构造。投资者可以买入一个具有较低执行价格及一个具有较高执行价格的两个欧式看跌期权，同时卖出 2 个具有中间执行价格的欧式看跌期权，如图 11-7 所示。以上考虑的蝶式差价可由买入一个执行价格为 55 美元的看跌期权、买入一个执行价格为 65 美元的看跌期权并同时卖出两个执行价格为 60 美元的看跌期权构成。由看涨期权所构造的蝶式差价与由看跌期权所构造的蝶式差价完全一致。看跌-看涨平价关系可用来证明最初的投资是相同的。

利用与以上相反的策略可以卖空蝶式差价。这时蝶式差价等于卖出两个执行价格分别为 K_1 及 K_3 的期权，买入两个具有平均执行价格 K_2 的期权。如果股票价格发生较大的变动，这一交易策略会有一定数量的盈利。

11.3.5 日历差价

到目前为止，我们一直假定构造差价的所有期权具有相同到期日。我们接下来讨论日历差价，这一差价的构成期权具有相同的执行价格却具有不同的到期日。

一个**日历差价**(calendar spread)可以由一个具有某一执行价格的欧式看涨期权的短头寸及一个具有同样执行价格但具有较长期限欧式看涨期权的长头寸来构成。期限越长，期权的价格也会越昂贵，因此日历差价需要一定的初始投资。在日历差价的盈利图形中，通常假设日历差价的盈利实现在短期限期权的到期日，而且长期限期权会被出售。图 11-8 展示了由看涨期权所构成的日历差价的盈利状态。日历差价的盈利形状与图 11-6 中的蝶式差价类似。在短期限的期权到期时，如果股票的价格接近短期限期权的执行价格，投资者就可以获得盈利。但是，如果股票价格远高于或远低于期限较短的期权价格执行价格，投资者将会蒙受损失。

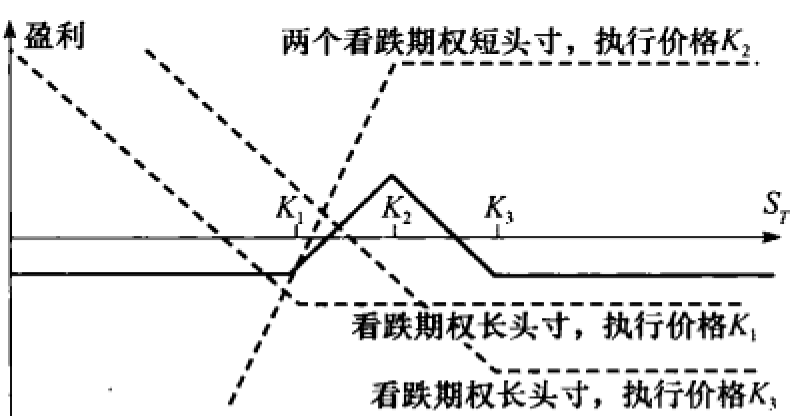


图 11-7　由看跌期权所构造的蝶式差价的盈利计算时间是在较短期限期权的到期日

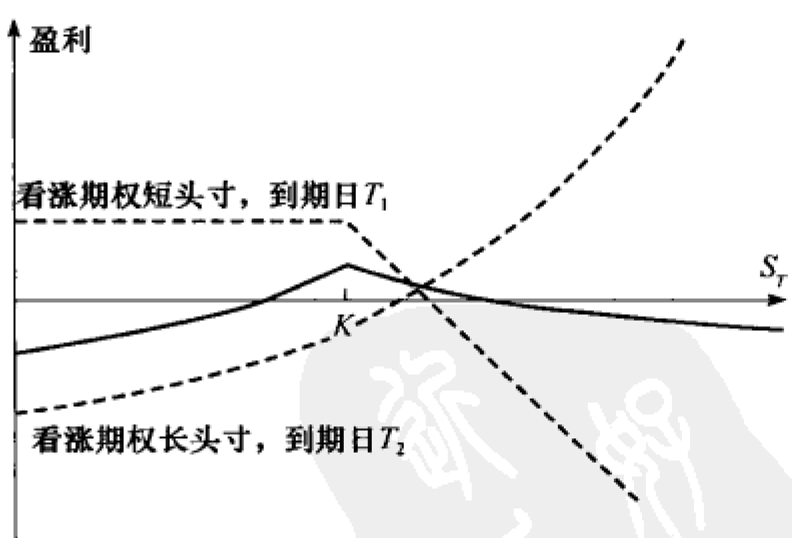


图 11-8　由两个看涨期权所构造的日历差价的盈利计算时间是在较短期限期权的到期日

为了理解日历差价的盈利形式，我们首先考虑在期限较短的期权到期时，股票价格较低的情形。这时期限较短的期权的价值为 0，期限较长的期权的价格也接近 0。因此，此时投资者的损失等于建立日历差价的最初费用。接下来我们考虑当期限较短的期权到期时，股票价格 S_T 很高的情形。期限较短的期权给投资者带来的费用为 S_T-K，期限较长的期权的价格会比 S_T-K 更高些，这里 K 为期权的执行价格。这时投资者的净损失量也会与建立日历差价策略大体相同。如果

S_T 接近于 K，短期限期权给投资者带来的费用或者为 0 或者数量很小，但是长期限期权仍很有价值，这时投资者会得到一笔可观的利润。

在**中性日历差价**(neutral calender spread)中，选取的执行价格接近于股票的当前价格。**牛市日历差价**(bullish calender spread)涉及较高的执行价格，而**熊市日历差价**(bearish calendar spread)涉及较低的执行价格。

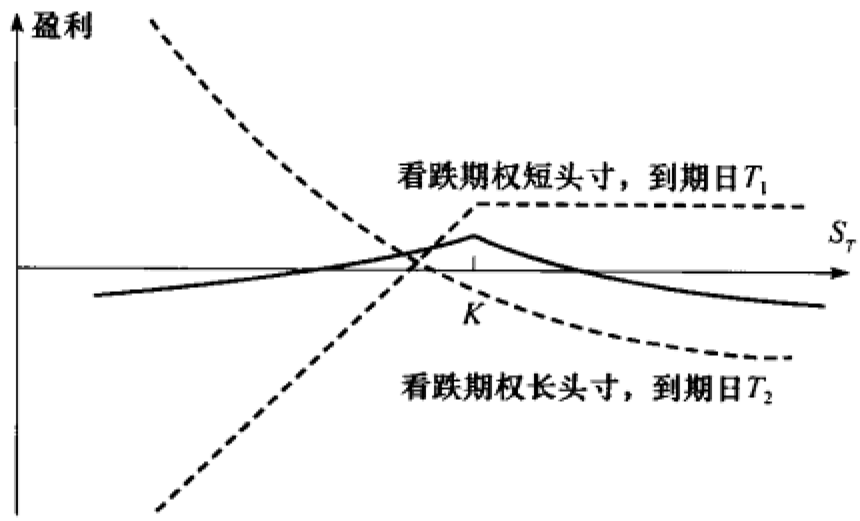


图 11-9 由两个看跌期权所构造的日历差价的收益

倒置日历差价(reverse calender spread)的收益正好与图 11-8 及图 11-9 的形状相反。投资者买入期限较短的期权，并同时卖出期限较长的期权。当短期限期权到期时，如果股票远高于或远低于短期限期权的执行价格，投资者就可能获得少量利润。但是当股票价格接近该执行价格时，投资者会有很大的损失。

11.3.6 对角差价

牛市、熊市及日历差价均可以由一看涨期权的长头寸及另一看涨期权的短头寸来构造。对于牛市及熊市差价，两个看涨期权的执行价格不同而到期日相同；对于日历差价，期权具有相同的执行价格但有不同的到期日。

在**对角差价**(diagonal spread)中，两个看涨期权的执行价格及到期日均不相同。这一交易策略会产生更多的盈利方式。

11.4 组合策略

组合是一种包括同一种股票的看涨期权与看跌期权的策略。我们将要考虑的组合包括跨式组合、序列组合、带式组合及异价跨式组合(strangle)等。

11.4.1 跨式组合

一种比较流行的组合形式为**跨式组合**(straddle)策略，该策略包括买入具有同样执行价格与期限的一个看涨期权和看跌期权，盈利形式见图 11-10。这里执行价格被记为 K。在期权到期时，如果股票价格接近于期权的执行价格，跨式组合会导致损失。但是股票在任何方向有一个足够大的变动时，跨式组合会带来显著的盈利。表 11-8 计算了跨式组合的收益。

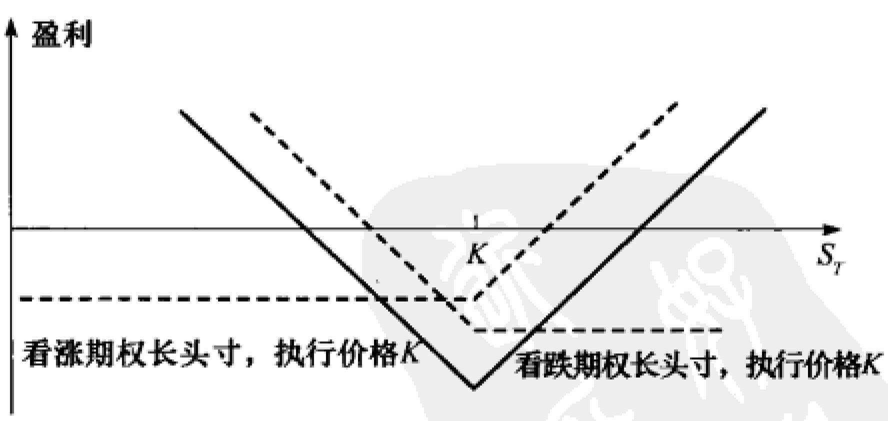


图 11-10 跨式期权的收益

表 11-8 跨式期权的收益

股票价格范围	看涨期权的收益	看跌期权的收益	整体收益
$S_T \leqslant K$	0	$K-S_T$	$K-S_T$
$S_T > K$	S_T-K	0	S_T-K

当投资者认为股票价格将有重大变动但又不确认变动方向时，可以采用跨式组合。考虑以下情形：某投资者认为一个当前价格为 69 美元的股票在 3 个月后价格会有重大变动，该投资者可

以同时买入 3 个月期限的看涨期权及看跌期权，期权的执行价格为 70 美元。假定看涨期权的成本为 4 美元，看跌期权的成本为 3 美元。如果股票价格保持在 69 美元不变，我们很容易得出这一交易策略给投资者带来的成本为 6 美元(初始投资为 7 美元，期权到期时，看涨期权价值为 0，看跌期权价值为 1 美元)。如果股票价格变为 70 美元，则会产生 7 美元的损失(这是可能会发生的最差情况)。但是如果股票价格跳跃到 90 美元，投资者可获利 13 美元；如果股票价格降至 55 美元，投资者获利 8 美元。如业界事例 11-2 所示，投资者在进行一个跨式组合交易之前应仔细考虑，自己所预测的价格跳跃是否已在期权价格中有所体现。

业界事例 11-2　如何由跨式期权交易中盈利

假定某公司成为被兼并的对象，或者公司卷入了某一法律诉讼，法律诉讼的结果即将公布。以上两种情形均会造成股票价格的大浮动，这时你应该交易跨式期权吗?

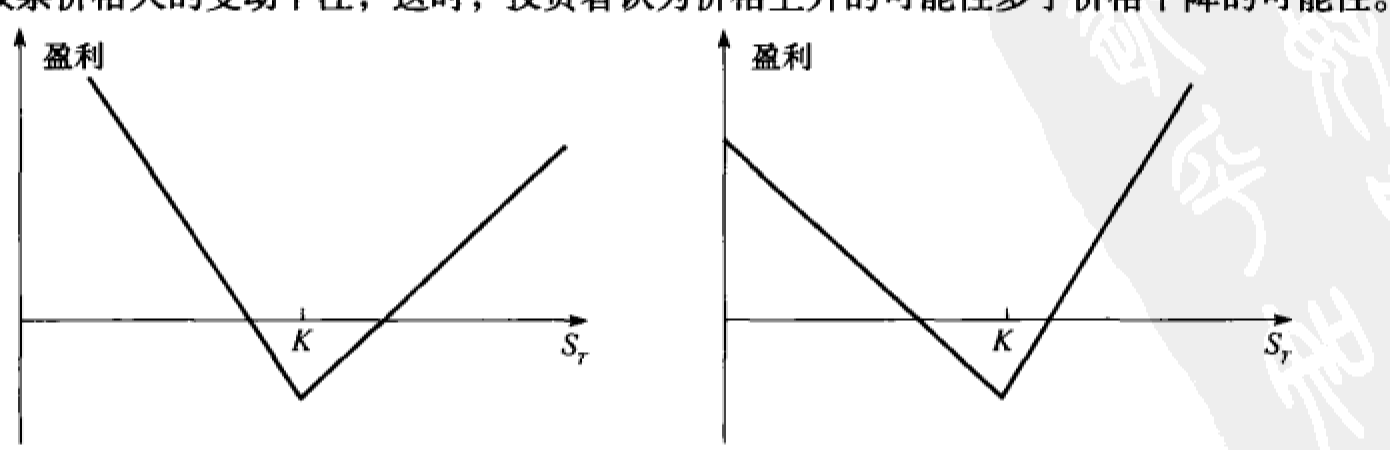
交易跨式期权在此时看来很合理。但是，如果你的观点与市场上其他投资者的观点一致，这些观点将反映在期权价格上。这时该股票期权的价格要远远高于类似的但没有预期的较大价格跳跃的股票期权的价格。因此，由图 11-10 所示的跨式期权交易的盈利会降低。此时，为了取得盈利，股票价格的波动需要很大。

为了使交易跨式期权成为有效的交易策略，你应该认为股票价格变动会很大，同时你的观点同其他大多数投资者的观点有所不同。市场价格包含投资者的观点。为了从某投资策略中盈利，你必须同市场其他投资者的观点不同，同时你的观点还必须是正确的。

图 11-10 的跨式组合有时被称为**底部跨式组合**(bottom straddle)或**买入跨式组合**(straddle purchase)。**顶部跨式组合**(top straddle)或**卖出跨式组合**(straddle write)的情形刚好相反。这种交易策略由卖出一个看涨期权及卖出一个看跌期权来构成。该投资策略风险很大。如果在到期日，股票价格接近于执行价格，投资者会有一定的利润。但是，股票价格大的变动所带来的损失也可能是无限的。

11.4.2　序列债券与带式债券

序列组合(strip)是具有相同执行价格和相同期限的一个欧式看涨期权和两个欧式看跌期权的组合。**带式组合**(strap)是由具有相同执行价格和相同期限的两个欧式看涨期权和一个欧式看跌期权的组合。图 11-11 显示了序列组合与带式组合的盈利形式。序列组合中，投资者认为股票价格会有大的变动，同时投资者认为价格下降的可能性要大于价格上升的可能性。在带式组合中，投资者也是对股票价格大的变动下注，这时，投资者认为价格上升的可能性多于价格下降的可能性。



a) 序列期权（1个看涨期权+2个看跌期权）　b) 带式期权（2个看涨期权+1个看跌期权）

图 11-11　序列期权及带式期权的收益

11.4.3 异价跨式组合

异价跨式组合(strangle)有时也被称为**底部垂直组合**(bottom vertical combination)。在这一交易策略中，投资者买入具有相同期限但具有不同执行价格的欧式看跌及看涨期权。图 11-12 显示了其盈利形式。

这里，执行价格 K_2 高于执行价格 K_1。表 11-9 显示了异价跨式组合的收益。

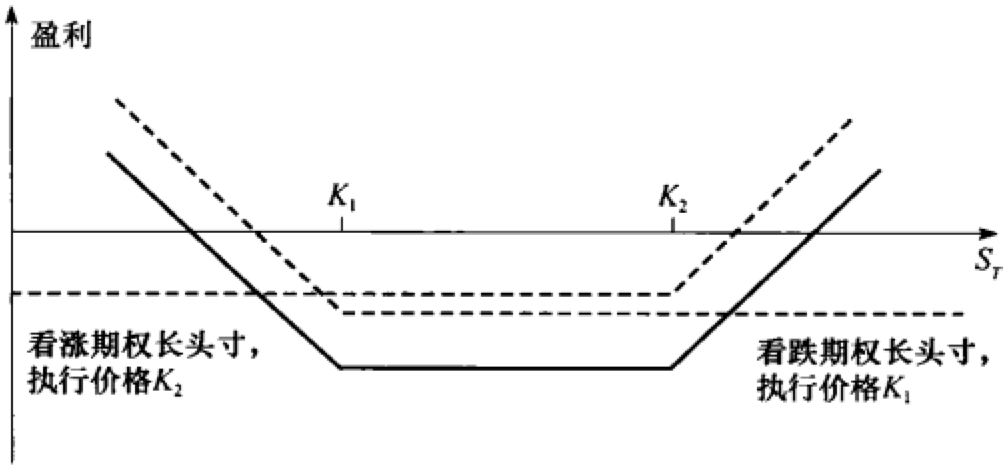


图 11-12 异价跨式期权的收益

表 11-9 异价跨式期权的收益

股票价格范围	看涨期权的收益	看跌期权的收益	整体收益
$S_T \leqslant K_1$	0	$K_1 - S_T$	$K_1 - S_T$
$K_1 < S_T < K_2$	0	0	0
$S_T \geqslant K_2$	$S_T - K_2$	0	$S_T - K_2$

异价跨式组合与跨式组合类似。投资者对股票价格有很大变动的可能性下注，但不能确认是对上涨还是下跌。比较图 11-12 及图 11-10，我们看到股票在异价跨式组合的变动要比在跨式组合的变动更大才能盈利。但是当股票价格变动介于中间价格时，异价跨式组合的损失会较小。

异价跨式组合所取得的盈利与执行价格之间的距离有关。距离越远，潜在的损失越小，但为了获取盈利，价格的变动也需要很大。

有时卖出一个异价跨式组合也被称为**顶部垂直组合**(top vertical combination)。如果投资者认为股票价格大的变动不太可能，则可以采用这一交易策略。类似于卖出跨式组合，这一交易策略的风险很大，投资者潜在的损失也为无限。

11.5 具有其他收益形式的组合

本章我们介绍了如何利用期权来产生盈利与股票之间几种有趣的关系。如果对到期日 T，任何执行价格的欧式期权均可以交易，那么从理论上讲，在 T 时刻，我们可以取得任何形式的收益。说明这一点最简单的方式会涉及蝶式差价，蝶式差价可以通过买入具有执行价格 K_1 及 K_3 同时卖出两个执行价格为 K_2 的期权来实现，其中 $K_1 < K_2 < K_3$ 并且 $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$。图 11-13 展示了蝶式差价的收益。收益图形很像某种“尖刺”(spike)。当 K_1 与 K_3 离得越来越近时，这个尖刺变得越来越细。将一巨大数量具有尖刺收益的期权适当地组合在一起，我们可以得到任何形式的收益。

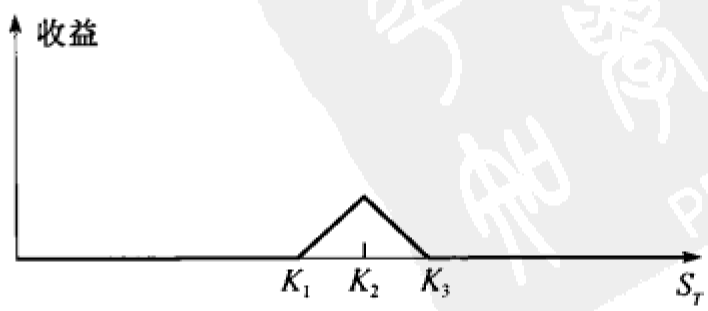


图 11-13 蝶式差价构造的尖刺回报可以用来构造其他回报

小结

带保债券可以通过零息债券与欧式看涨期权生成。这些产品对投资者很有吸引力，因为不管期权标的股票的表现如何，产品的发行人会保证投资者的本金。

一些普通交易策略包括单一期权产品与标的股票。例如，卖出一个备保看涨期权包括购买股票与卖出对于这一股票的看涨期权；一个保护性看跌期权包括买入一只股票并同时买入这一股票的看跌期权。前者类似卖出一个看跌期权；后者类似于买入一个看涨期权。

差价可能涉及持有两个或更多个看涨期权，也可能涉及买入两个或更多看跌期权。牛市差价由买入一个具有较低执行价格的看涨期权(看跌期权)，同时卖出一个具有较高执行价格的看涨期权(看跌期权)来构成；熊市差价由买入一个具有较高执行价格的看跌期权(看涨期权)同时卖出一个具有较低执行价格的看跌期权(看涨期权)来构成；蝶式差价由买入一个具有较低价格及一个具有较高执行价格的看涨期权(看跌期权)及卖出两个具有中间执行价格的看涨期权(看跌期权)构成；日历差价包括卖出一个短期限的看涨期权(看跌期权)，并同时买入一个较长期限的看涨(看跌期权)构成；对角差价包括买入一个期权及卖出一个期权，买入及卖出期权的期限及执行价格均不同。

期权组合包括持有同一股票的看涨期权和看跌期权。跨式组合包括持有一看涨期权的长头寸与一具有同一执行价格及期限的看跌期权的长头寸；序列组合包括持有一个看涨期权的长头寸及两个具有同一执行价格及期限的看跌期权的长头寸；带式组合包括持有两个看涨期权的长头寸及持有一个具有同样执行价格及期限的看跌期权的长头寸；一个异价跨式组合包括持有具有不同执行价格但具有同样期限的看涨期权的长头寸及看跌期权的长头寸。运用期权还可以构造出许多其他有趣的产品收益形态。毫不奇怪，期权交易会日趋广泛并会不断受到投资者的青睐。

推荐阅读

Bharadwaj, A. and J.B. Wiggins. "Box Spread and Put–Call Parity Tests for the S&P Index LEAPS Markets," *Journal of Derivatives*, 8, 4 (Summer 2001): 62–71.

Chaput, J. S., and L. H. Ederington, "Option Spread and Combination Trading," *Journal of Derivatives*, 10, 4 (Summer 2003): 70–88.

McMillan, L.G. *McMillan on Options*, 2nd edn. Hoboken, NJ: Wiley, 2004.

Rendleman, R.J. "Covered Call Writing from an Expected Utility Perspective," *Journal of Derivatives*, 8, 3 (Spring 2001): 63–75.

Ronn, A.G. and E.I. Ronn. "The Box–Spread Arbitrage Conditions," *Review of Financial Studies*, 2, 1 (1989): 91–108.

练习题

11.1 什么是保护性看跌期权？什么样的看涨期权头寸能等价于保护性看跌期权？

11.2 解释熊市差价的两种构造方式。

11.3 对投资者而言，什么是购买蝶式差价的良好时机？

11.4 一个有效期为 3 个月的看涨期权的执行价格分别为 15 美元、17.5 美元及 20 美元，相应的期权价格分别为 4 美元、2 美元及 0.5 美元。解释如何运用这些期权构造蝶式差价。做出一个图表来说明蝶式差价的盈利随股票价格的变化关系。

11.5 采用什么样的交易可以产生倒置日历差价？

11.6 跨式组合与异价跨式组合的差别是什么？

11.7 一个执行价格为 50 美元的看涨期权的价格为 2 美元，同一股票上一个执行价格为 45 美元的看跌期权的价格为 3 美元。解释由这两种期权如何构成异价组合，这一异价跨式组合的盈利图形为何种形式？

11.8 利用看跌-看涨平价关系式说明由看涨期权生成的牛市差价的初始投资与看跌期权生成的牛市差价的初始投资之间的关系。

11.9 解释如何用看跌期权来构造激进性(aggressive)熊市差价。

11.10 假定执行价格为30美元及35美元的看跌期权的价格分别为4美元及7美元。如何利用这些期权来构造牛市差价和熊市差价。制作一个表格说明这些差价的盈利及收益。

11.11 利用看跌-看涨平价关系式说明欧式看跌期权所构成的蝶式差价的费用等于由欧式看涨期权所构成的蝶式差价的费用。

11.12 一个执行价格为60美元的看涨期权的价格为6美元，一个具有相同执行价格及期限的看跌期权的价格为4美元。制作一个表格来说明异价跨式组合的盈利？股票在什么价位时异价跨式组合会导致亏损？

11.13 制作一个表格来说明执行价格为 K_1 及 K_2($K_2 > K_1$) 的看跌期权所构成的牛市差价收益。

11.14 某投资者相信股票价格会有大幅度变动，但对变动方向不确定，解释投资者所能采用的6种不同交易策略，并解释交易策略的不同。

11.15 如何运用期权来构造具有确定交割价格及交割时间的远期合约？

11.16 “盒式差价由4个期权构成，其中两个期权用于生成远期合约的长头寸，另两个期权用于生成远期合约的短头寸。”解释以上观点。

11.17 在一个异价跨式组合中，如果看跌期权的执行价格高于看涨期权的执行价格，结构会怎么样？

11.18 澳元的当前价格为0.64美元，一个1年期的蝶式差价由执行价格为0.60美元、0.65美元及0.70美元的欧式看涨期权构成，美国及澳大利亚的无风险利率分别为5%及4%，汇率的波动率为15%。采用DerivaGem软件来计算生成蝶式差价的费用。证明采用看跌期权的费用与采用看涨期权的费用相同。

11.19 股指的股息率为1%，波动率为20%，无风险利率为4%。对于例11-1所构造的带保债券，期限多长才能使发行银行有盈利？可用DerivaGem软件。

作业题

11.20 3种对于同一股票并具有同样期限的看跌期权的执行价格分别为55美元、60美元及65美元，这3种期权的市场价格分别为3美元、5美元及8美元。解释如何构造蝶式差价。制作表格来说明这一策略的盈利形式。股票在什么价位时，这一交易策略有所损失。

11.21 一个对角差价由买入一个执行价格为 K_2，期限为 T_2 的欧式看涨期权以及卖出一个执行价格为 K_1，期限为 T_1 的欧式看涨期权构成，这里 $T_2 > T_1$，对以下两种情况画出盈利图：$K_2 > K_1$；$K_2 < K_1$。

11.22 画出以下几种投资者的交易组合与股票价格之间的盈亏关系图。

(a)持有一股股票并持有一个看涨期权的短头寸；

(b)持有两股股票并持有一个看涨期权的短头寸；

(c)持有一股股票并持有两个看涨期权的短头寸；

(d)持有一股股票并持有四个看涨期权的短头寸。

对于以上不同情形，假定看涨期权的执行价格等于当前股票价格。

10.23 假定一个不付股息的股票的价格为32美元，股票价格波动率为30%，对于所有不同期限的无风险利率均为每年5%。采用DerivaGem软件来计算以下几种交易策略的费用，对于每种情形构造表格来说明盈利与最终股票价格之间的关系，在分析中忽略贴现效应。

(a)由执行价格分别为25美元及30美

元，期限为 6 个月的欧式看涨期权所组成的牛市差价；

(b) 由执行价格分别为 25 美元及 30 美元，期限为 6 个月的欧式看跌期权所组成的熊市差价；

(c) 由执行价格分别为 25 美元、30 美元及 35 美元，期限为 1 年的欧式看涨期权所组成的蝶式差价；

(d) 由执行价格分别为 25 美元、30 美元及 35 美元，期限为 1 年的欧式看跌期权所组成的蝶式差价；

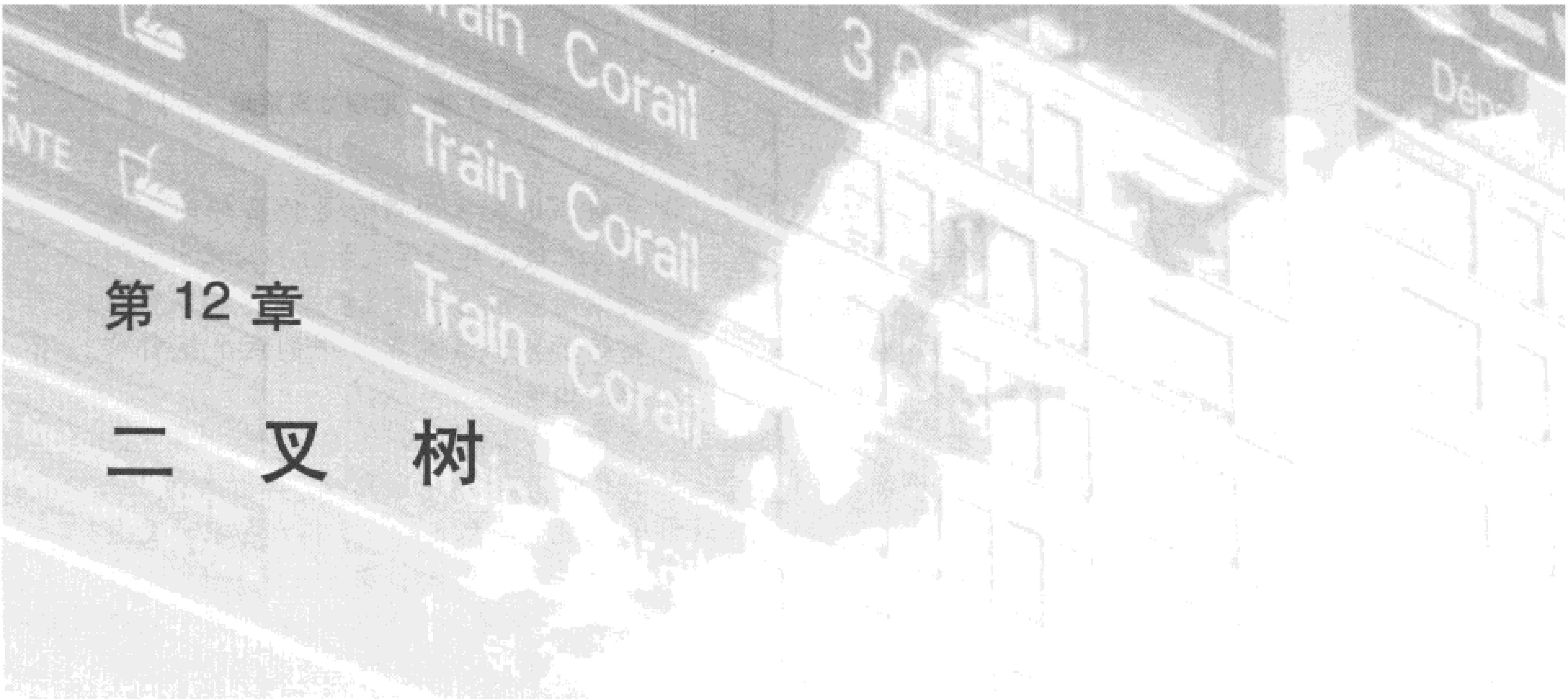
(e) 由执行价格为 30 美元、期限为 6 个月的期权所组成的跨式组合；

(f) 由执行价格分别为 25 美元及 30 美元、期限为 6 个月的期权所组成的异价跨式组合。

11.24　一个异价跨式组合的长头寸和一个跨式组合短头寸的组合是什么样的交易头寸？假定异价跨式组合和跨式组合的到期期限相同，并且跨式组合的执行价格等于异价跨式组合中的两个执行价格的均值。

11.25　买入执行价格为 K_2 的看涨期权，卖出执行价格为 K_1 的看跌期权，两者具有相同的期限，且 $K_2 > K_1$，所得交易头寸是什么？当 $K_2 = K_1$ 时，交易头寸是什么？

11.26　一家银行决定在某无股息股票上构造保本债券，方式是向投资者提供零息债券加上由看涨期权生成的牛市差价。无风险利率为 4%，股票价格波动率为 25%。牛市差价较低执行价格期权为平值。在牛市差价中，较高执行价格与较低执行价格的最大比例是多少？利用 DerivaGem 软件。



第 12 章

二 叉 树

对期权定价时一个很有用并且很流行的方法是构造**二叉树**(binomial tree)。这里的二叉树是指代表在期权期限内可能会出现的股票价格变动路径的图形，这种方法假设股票价格服从**随机漫步**(random walk)。在树形上的每一步，股票价格以某种概率会向上移动一定的比率，同时某种概率会向下移动一定的比率。在步长足够小的极限状态下，这种模型与第 14 章讨论的布莱克-斯科尔斯 - 莫顿模型是一致的。本章附录将证明当步长变得很小时，由二叉树给出的欧式期权价格收敛到布莱克-斯科尔斯-默顿价格。

本章中的结论很重要。第一个原因是本章解释了用来对期权定价的无套利假设的特点，第二个原因是介绍了常常用于对美式期权和其他衍生产品定价所用的二叉树数值方法，第三个原因是本章引进了非常重要的风险中性定价原理。

本章采用的方法与 Cox、Ross 和 Rubinstein 在 1979 年所发表的一篇重要文章中的方法相似。我们将在第 20 章对二叉树数值方法进行详细讨论。

12.1 单步二叉树模型与无套利方法

我们由一个非常简单的例子入手。假设某股票的当前价格为 20 美元，并且已知在 3 个月后股票的价格将会变为 22 美元或 18 美元。我们希望找出 3 个月后能够以 21 美元买入股票的期权价格。这个期权在 3 个月后将具有以下两个价格中的一个：如果股票价格变为 22 美元，期权价格将为 1 美元；如果股票价格为 18 美元，期权价格将为 0。这些情形如图 12-1 所示。

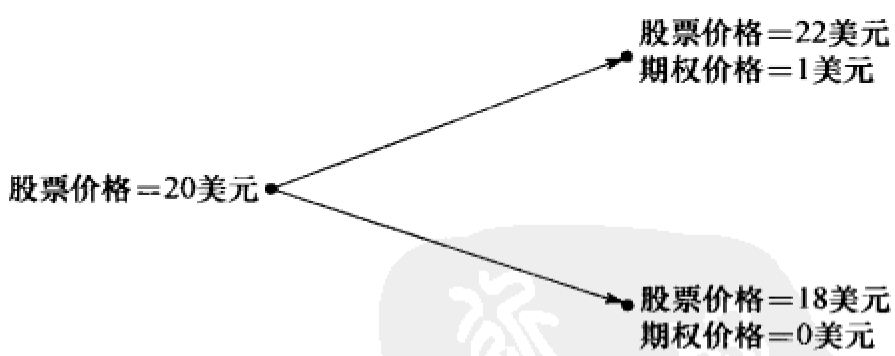


图 12-1　股票价格的数值化实例

我们发现，利用一个比较简单的方式可以对此例中的期权进行定价，唯一需要的假设是市场上没有套利机会。我们构造一个股票和期权的组合，并使得这一组合在 3 个月后的价值没有不确定性。因为这一组合没有任何风险，所以其收益率一定等于无风险利率。这样我们得出构造这一交易组合的成本，并因此得出期权的价格。因为这里有两个证券(股票与股票期权)并且只有两种不同的可能性，因此我们总是可以构造出无风险证券组合。

考虑一个有 Δ 单位的股票的长头寸和一份看涨期权短头寸构成的交易组合。我们将求出使得交易组合成为无风险的 Δ。当股票价格由 20 美元变为 22 美元时，所持股票的价值变为 22Δ，期权的价值变为 1 美元，证券组合的整体价值为 $22\Delta-1$；当股票的价格由 20 美元变为 18 美元时，

所持股票的价值变为18Δ，期权的价值为0，证券组合的整体价值为18Δ。如果证券组合在以上两个可能性下价值相等，则该组合不具有任何风险，这意味着

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

即

$$\Delta = 0.25$$

因此，无风险交易组合为

长头寸：0.25 单位股票；

短头寸：1 份期权。

如果股票价格上涨为22美元，组合价值为

$$22 \times 0.25 - 1 = 4.5 \text{ 美元}$$

如果股票价格下跌到18美元，组合价值为

$$18 \times 0.25 = 4.5 \text{ 美元}$$

无论股票价格是上涨还是下跌，在期权到期时交易组合的价格总是4.5美元。这说明Δ是对一个期权的短头寸进行对冲时应持有的股票数量。这个数量是本章后面与第18章讨论的希腊值中的一个。

在无套利机会的前提下，无风险债券的收益率等于无风险利率。假设这时的无风险利率为每年12%，那么该交易组合今天的价值必须为4.5美元的贴现值，即

$$4.5e^{-0.12\times3/12} = 4.367 \text{ 美元}$$

股票今天的价值为20美元，如果将期权的价格记为f，那么交易组合在今天的价值是

$$20 \times 0.25 - f = 5 - f$$

因此

$$5 - f = 4.367$$

或

$$f = 0.633 \text{ 美元}$$

以上讨论说明，在无套利机会的前提下，期权的当前价值为0.633美元。如果期权价值高于0.633美元，那么构造交易组合的费用就会低于4.367美元，而交易组合的收益率就会高于无风险利率；如果期权价值低于0.633美元，那么卖空这一交易组合将会提供一个低于无风险利率的借款机会。

12.1.1 推广

我们可以将以上无套利的结论推广。假定股票的价格为S_0，股票期权（或以股票为标的产品的任何衍生产品）的价格为f。假定期权的期限为T，在期权有效期内，股票价格或者会由S_0上涨到S_0u，或者会由S_0下跌到S_0d，其中$u>1$，$d<1$。当股票价格上涨时，其增长的比率为$u-1$。当股票价格下跌时，其下跌的比率为$1-d$。假设如果股票价格变到S_0u，相应的期权价格为f_u；而股票价格变为S_0d时，期权价格为f_d。结果如图12-2所示。

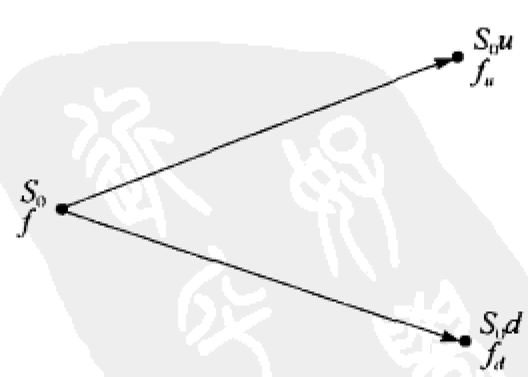


图12-2 在一步二叉树中的股票价格及期权价格

与前面相同，我们考虑一个由Δ股股票的长头寸及一份期权的短头寸所组成的交易组合。我们可以找到一个Δ使得交易组合不具有任何风险。如果股票价格上涨，在期权到期时交易组合的价值为

$$S_0u\Delta - f_u$$

如果股票价格下跌，期权到期时组合的价值为

$$S_0d\Delta - f_d$$

令以上两个值相等，即

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d$$

我们得出

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \tag{12-1}$$

这时交易组合是无风险的，因此其收益率必须等于无风险利率。式(12-1)表示，在时间 T 当股票在两个节点之间变动时，Δ 为期权价格变化与股票价格变化的比率。

如果我们将无风险利率记为 r，那么交易组合的贴现值为

$$(S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

而构造交易组合的初始成本为

$$S_0\Delta - f$$

所以

$$S_0\Delta - f = (S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

即

$$f = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_ue^{-rT}$$

将式(12-1)中的 Δ 代入上式并化简，我们得出

$$f = S_0\left(\frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}\right)(1 - ue^{-rT}) + f_ue^{-rT}$$

或

$$f = \frac{f_u(1 - de^{-rT}) + f_d(ue^{-rT} - 1)}{u - d}$$

或

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1 - p)f_d] \tag{12-2}$$

其中

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \tag{12-3}$$

当股票价格由一步二叉树给出时，式(12-2)及式(12-3)可以用来对期权进行定价。这个公式需要的唯一假设是市场上无套利机会。

在前面的数值例子中(见图 12-1)，$u=1.1$，$d=0.9$，$r=0.12$，$T=0.25$，$f_u=1$ 及 $f_d=0$。由式(12-3)，我们得出

$$p = \frac{e^{0.12\times 3/12} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523$$

由式(12-2)，我们得出

$$f = e^{-0.12\times 0.25}(0.6523 \times 1 + 0.3477 \times 0) = 0.633$$

这与本节开始时所得结果一致。

12.1.2 股票收益期望的无关性

期权定价公式(12-2)中没有涉及股票价格上涨或下跌的概率。例如，当股票价格上涨概率为 0.5 时所得的欧式期权价格与股票价格上涨概率为 0.9 时所得的欧式期权价格一样。这一点令人惊讶，似乎与我们的直觉不符。我们会很自然地认为当股票价格上涨的概率增大时，股票的看涨期权价格也会上涨，同时这一股票看跌期权价格会下降。但事实并非如此。

这里的关键原因是，我们并不是在一个绝对的条件下对期权进行定价的，我们是根据股票的价格来计算期权的价格。未来股票价格上涨与下跌的概率已经包括在它的价格之中。因此，当根

据股票价格对期权进行定价时，我们无需再次考虑股票上涨及下跌的概率。

12.2 风险中性定价

我们现在可以引进关于衍生产品定价的一个重要原理，即所谓的**风险中性定价**(risk-neutral valuation)：指当对衍生产品定价时，我们可以假设投资者是**风险中性**(risk-neutral)的。这个假设是指投资的风险增长时，投资者并不需要额外的预期回报率。所有投资者都是风险中性的世界叫做**风险中性世界**(risk-neutral world)。当然，我们所生活的世界并不是风险中性的，投资者所承受的风险越大，要求的回报也会越高。但是，我们发现当假设世界是风险中性时，给出衍生产品价格不但在风险中性世界是正确的，在我们所生活的世界里也是正确的。这种定价方式奇迹般地避开了我们一无所知的有关买方与卖方的风险厌恶程度。

风险中性定价方法乍看起来好像很令人吃惊。期权是风险投资，难道一个人对风险的态度不应当影响对它们的定价吗？这里的答案是，当我们利用标的资产的价格对期权定价时，投资者对风险的态度不重要。当投资者对风险更加厌恶时，股票价格将会下跌，但是将期权价格与股票价格联系起来的公式是不变的。

风险中性世界的两个特点可以简化对衍生产品的定价：

- 股票(或任何投资)的收益率期望等于无风险利率。
- 用于对期权(或其他债券)的收益期望值贴现的利率等于无风险利率。

在式(12-2)中，参数 p 应当理解为在风险中性世界里股票价格上涨的概率，而 $1-p$ 是股票价格下跌的概率。表达式

$$pf_u + (1-p)f_d$$

则是期权在到期日的收益在风险中性世界里的期望值，因而式(12-2)可以表达为期权今天的价值等于其收益在风险中性世界期望值的以无风险利率贴现所得的现值。这正是风险中性定价的一个应用。

为了证明我们对 p 的理解是合理的，注意当上涨概率为 p 时，股票在 T 时望的收益期望 $E(S_T)$ 为

$$E(S_T) = pS_0u + (1-p)S_0d$$

即

$$E(S_T) = pS_0(u-d) + S_0d$$

将式(12-3)中的 p 代入公式，得出

$$E(S_T) = S_0e^{rT} \tag{12-4}$$

以上公式说明股票价格上涨概率为 p 时，其按无风险利率平均速度增长。换句话说，股票价格的变化行为正如当 p 为价格上涨概率时在风险中性世界我们所期望的那样。

对衍生产品定价时，风险中性方法是非常重要的结果。这个结果说明，当我们假设世界是风险中性的时，得到的价格不但在风险中性世界里是正确的，在所有世界里都是正确的。我们证明了当股票价格按二叉树的方式变化时，风险中性定价的正确性。

在利用风险中性方法对衍生产品定价时，我们首先计算在风险中性世界里各种不同结果发生的概率，然后由此计算衍生产品的收益期望值。衍生产品的价格等于这个期望值以无风险利率贴现后的现值。

12.2.1 再论单步二叉树例子

我们现在回到图12-1所示的例子，并以此说明风险中性定价同无套利所给出的结果是一样的。在图12-1中，股票的当前价格为20美元，3个月后的股票价格变成22美元或变为18美元。这里考虑的期权为欧式期权，执行价格为21美元，期限为3个月，无风险利率为12%。

定义 p 为在风险中性世界里股票价格上涨的概率，我们可以由式(12-3)来计算 p。另外一种

计算 p 的办法是利用在风险中性世界里股票的收益率期望一定等于无风险利率，这意味着 p 必须满足

$$22p + 18(1-p) = 20e^{0.12\times3/12}$$

即

$$4p = 20e^{0.12\times3/12} - 18$$

因此 $p=0.6523$。

在第3个月后，看涨期权价值为1所对应的概率为0.6223；看涨期权价值为0所对应的概率为0.3477。因此，其期望值为

$$0.6523\times1+0.3477\times0=0.6523$$

在风险中性世界，以无风险利率对这个值进行贴现，因此期权今天的价格为 $0.6523e^{-0.12\times3/12}$，即0.633美元。这与前面所得的值相同，说明了无套利方法与风险中性定价所给出的结果是一致的。

12.2.2 现实世界与风险中性世界的区别

我们应该强调 p 为风险中性世界里股票价格上涨的概率。一般来讲，这一概率与现实世界里股票价格上涨的概率是不同的。在我们的例子中 $p=0.6523$。当价格上涨的概率为0.6523时，股票与期权的收益率期望为12%，即等于无风险利率。假设在现实世界里股票的收益率期望为16%，p^* 代表在现实世界里股票价格上涨的概率。那么

$$22p^* + 18(1-p^*) = 20e^{0.16\times3/12}$$

因此，$p^*=0.7041$。

这时在现实世界里期权的收益期望值为

$$p^*\times1+(1-p^*)\times0$$

即0.7041。不幸的是，找出在现实世界里应当使用的贴现率并不是件容易的事。市场对股票所要求的收益率是16%，因此在对该股票上投资的现金流期望值进行贴现时，应当使用这个值。期权头寸比股票头寸的风险更大，因此对于期权收益期望值的贴现率比16%更高，但是我们不知道贴现率应当比16%高多少。[⊖]风险中性定价方法解决了这个问题，因为在风险中性世界里，所有资产的期望收益率(因此对收益期望的贴现率)均为无风险利率。

12.3 两步二叉树

我们可以将以上的分析推广到图12-3所示的两步二叉树情形。这里股票初始价格为20美元，在树中的任意一步之间，股票价格或上涨10%或下跌10%。我们假定树中每一步的步长均为3个月，无风险利率为12%。与前面一样，我们所考虑期权的期限为6个月，执行价格为21美元。

这里分析的目的是计算在起始点的期权价格。我们可以重复利用12.2节的定价原理来对这个期权进行定价。图12-4与图12-3相似，其不同之处是，图12-4的节点上既显示了股票价格也显示了期权价格(节点上面的数字为股票价格，下面的数字为期权价格)。树中最后一层节点上的期权价格很容易求得，等于期权的收益：在节点D，股票价格为24.2，期权价格为24.2－21＝3.2；在节点E及F，期权处于虚值状态，因此相应的期权价格为0。

在节点C，期权的价格为0，这是因为节点C的价值来自于节点E和F，而在这两个节点上期权价格均为0。为了求得在节点B上的期权价值，我们考虑由图12-5所示的二叉树。利用本章前面引入的符号，$u=1.1$，$d=0.9$，$r=0.12$，$T=0.25$，因此 $p=0.6523$。由式(12-2)我们可以得出在节点B上，期权价值为

⊖ 因为期权价格为0.633，我们可以得出相应的贴现率为42.58%。这是因为 $0.633=0.7041e^{-0.4258\times3/12}$。

$$e^{-0.12\times3/12}(0.6523\times3.2+0.3477\times0)=2.0257$$

最后要计算最初节点 A 上的期权价格。为此考虑二叉树的第一步。已知期权在节点 B 上的价格为 2.025 7，在节点 C 上的价值为 0，由式(12-2)得出在节点 A 上期权价值为

$$e^{-0.12\times3/12}(0.6523\times2.0257+0.3477\times0)=1.2823$$

期权的价值是 1.282 3 美元。

注意在以上例子中，u 与 d(股票上涨与下跌的比率)在每一节点上均相同，而且树中每一步的步长也均相等。因此由式(12-3)所计算的风险中性概率 p 在每一个节点上也均相同。

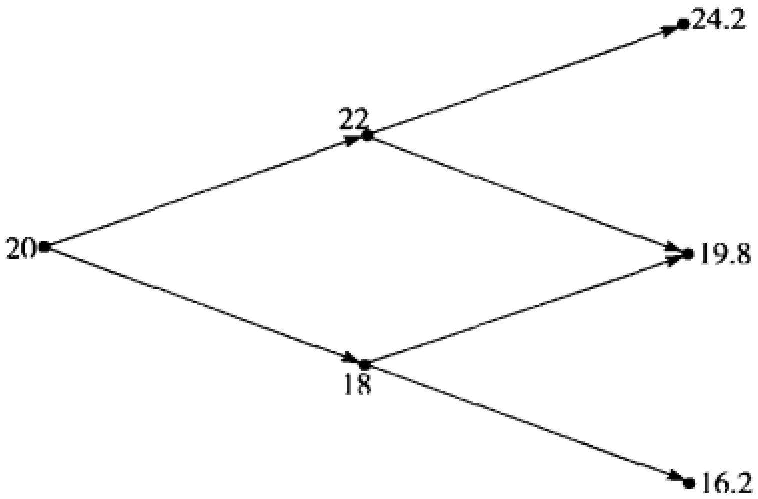


图 12-3 两步二叉树中的股票价格

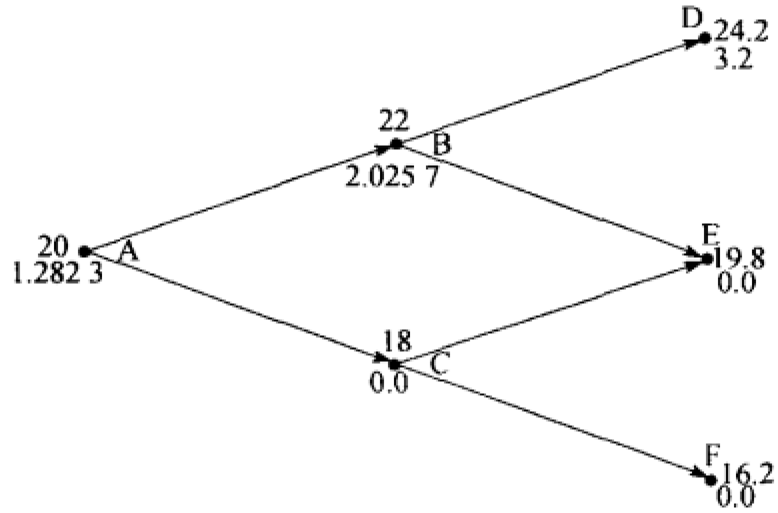


图 12-4 两步二叉树的股票价格及期权价格

推广

由图 12-6 我们可以得出关于两步二叉树的一般结论。初始股票价格为 S_0。在二叉树的每一步，股票价格或者上涨到初始价格的 u 倍，或者下跌到初始价格的 d 倍，期权价值的符号显示在树中(例如，在股票价格上涨两次后，期权价值为 f_{uu})。我们假定无风险利率为 r，二叉树的步长为 Δt 年。

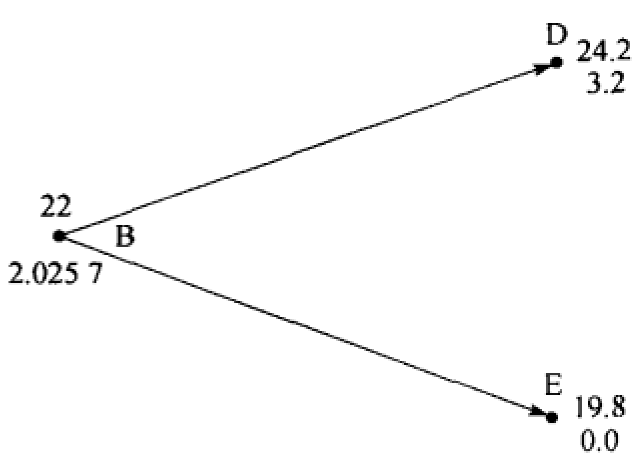


图 12-5 估计节点 B 上的期权价格

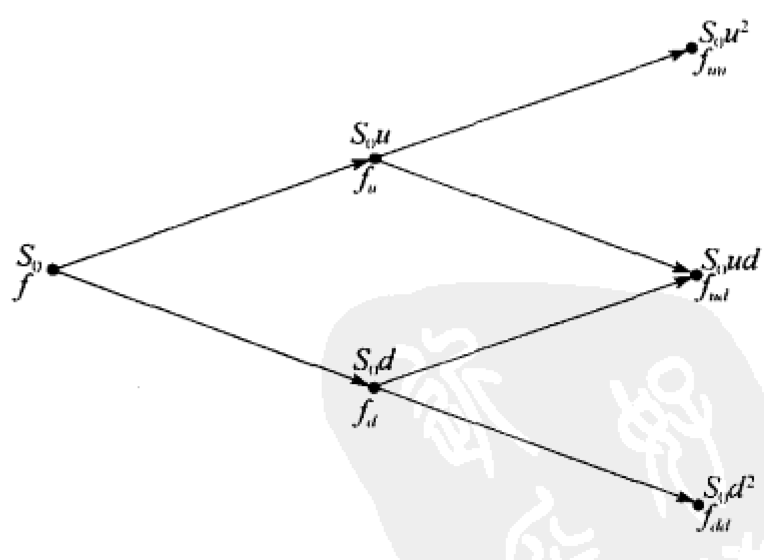


图 12-6 一般两步二叉树中的股票价格及期权价格

因为步长为 Δt，式(12-2)及式(12-3)变为

$$f=e^{-r\Delta t}[pf_u+(1-p)f_d] \tag{12-5}$$

$$p=\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d} \tag{12-6}$$

重复应用式(12-5)，我们得出

$$f_u=e^{-r\Delta t}[pf_{uu}+(1-p)f_{ud}] \tag{12-7}$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \tag{12-8}$$

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d] \tag{12-9}$$

将式(12-7)和式(12-8)代入式(12-9)，我们得出

$$f = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}] \tag{12-10}$$

以上结论与前面提到的风险中性定价理论是一致的。变量 p^2、$2p(1-p)$、$(1-p)^2$ 分别对应于股票价格取上、中、下三个节点上值的概率。期权价格等于其在风险中性世界里的收益期望值以无风险利率进行贴现所得的数量。

当我们在树上引入更多的步数时，风险中性定价原理仍然成立，期权价格依然等于其收益在风险中性世界的期望值以无风险利率贴现的现值。

12.4 看跌期权实例

本章所描述的方法既可以用于对看涨期权的定价也可以用于对看跌期权的定价。考虑一个两年期执行价格为 52 美元的欧式看跌期权，股票的当前价格为 50 美元。我们假定股票价格服从步长为 1 年的两步二叉树。在二叉树的每一步上，股票价格或者按比例上涨 20%，或者按比例下跌 20%，假定无风险利率为 5%。

二叉树如图 12-7 所示，这里 $u=1.2$，$d=0.8$，$\Delta t=1$ 及 $r=0.05$。由式(12-6)可以得出风险中性概率 p 为

$$p = \frac{e^{0.05\times 1} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.628\,2$$

最终的股票价格为 72 美元、48 美元与 32 美元。这时，$f_{uu}=0$、$f_{ud}=4$ 及 $f_{dd}=20$。由式(12-10)，我们有

$$f = e^{-2\times 0.05\times 1}(0.628\,2^2 \times 0 + 2 \times 0.628\,2 \times 0.371\,8 \times 4 + 0.371\,8^2 \times 20) = 4.192\,3$$

看跌期权的价值为 4.192 3 美元。这一结果也可以由式(12-5)并从树的最后一步向回推算得出。图 12-7 给出了中间节点上的期权价格。

12.5 美式期权

到目前为止，我们考虑的期权都是欧式期权。接下来我们考虑如何用图 12-4 或图 12-7 中所描述的二叉树来对美式期权进行定价。定价的过程从树的末尾出发以倒推的形式推算到树的起始点，在树的每一个节点上我们需要检验提前行使期权是否为最优。在树的最后节点上，期权的价格等于欧式期权的价格，之前的任何一个节点上期权的价格等于以下的数量的较大值：

- 由式(12-5)所计算的值；
- 提前行使期权的收益。

图 12-8 显示了当期权为美式期权而不是欧式期权时，图 12-7 会如何变化。股票价格和上下变动的概率没有任何改变，期权在最后节点上的价格也没有改变。在节点 B 上，式(12-5)所得出的数量为 1.414 7，同时提前行使期权的相应收益为负值(−8)。显然在节点 B 提前行使期权不会最优，因此在该节点上，期权价格为 1.414 7。在节点 C 上，式(12-5)所计算出的期权价值为 9.463 6，提前行使期权的收益为 12。这时，提前行使期权为最优，因此在该节点上期权价值为 12。在最初的节点 A 上，式(12-5)所计算的数量为

$$e^{-0.05\times 1}(0.628\,2 \times 1.414\,7 + 0.371\,8 \times 12.0) = 5.089\,4$$

提前行使期权的收益为 2，这时提前行使期权不为最优。因此，期权价值为 5.089 4 美元。

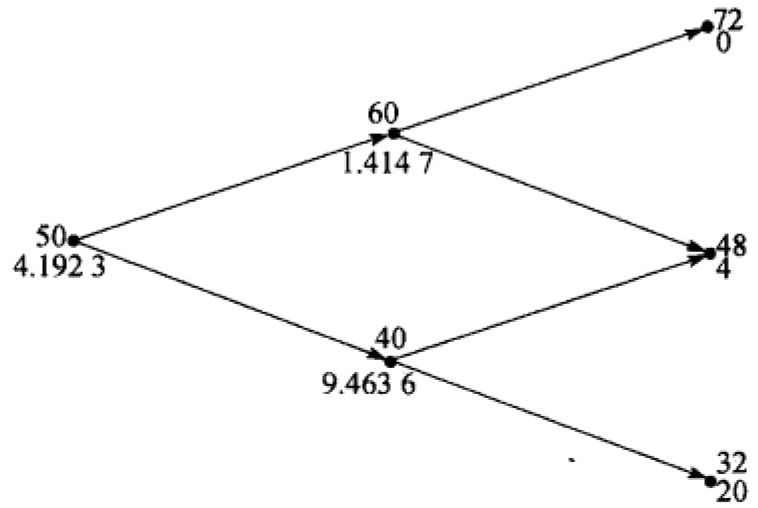


图 12-7 利用两步二叉树对欧式看跌期权定价
注：每个节点上面的数字为股票价格，下面的数字为期权价格。

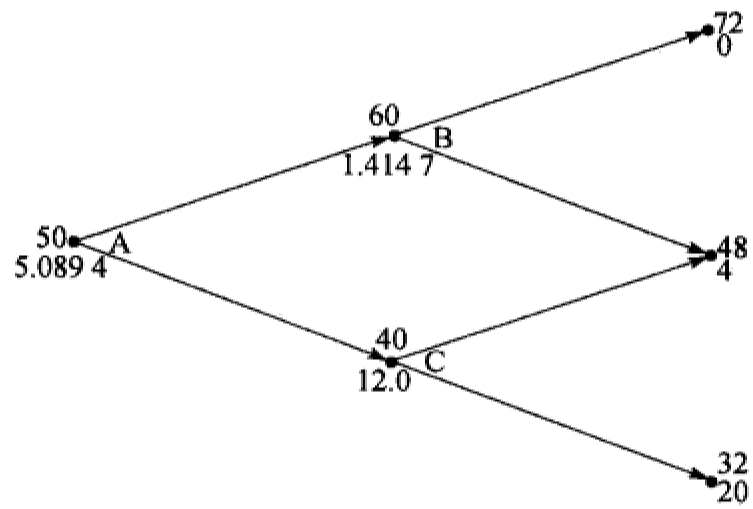


图 12-8 利用两步二叉树来对美式看跌期权定价
注：每个节点上面的数字为股票价格，下面的数字为期权价格。

12.6 Delta

我们现在引进 Delta，这个变量在期权定价以及对冲过程中是个很重要的参数。

一个股票期权的 Delta 为期权价格变化同股票价格变化之间的比率，它是当我们卖出一份期权时，为了构造无风险组合而需要持有的标的股票数量。这一数量与本章前面所引入的 Δ 相同。构造无风险组合有时也被称为 **Delta 对冲**(delta hedging)。看涨期权的 Delta 为正，而看跌期权的 Delta 为负。

由图 12-1，我们可以计算出所考虑的看涨期权 Delta 为

$$\frac{1-0}{22-18}=0.25$$

这是因为当股票由 18 美元变为 22 美元时，期权价格由 0 美元变为 1 美元(这也是 12.1 节计算出的 Δ 值)。

在图 12-4 中，对应于股票价格在第 1 步的变化的 Delta 为

$$\frac{2.0257-0}{22-18}=0.5064$$

如在第 1 步后股票价格上涨，第 2 步的 Delta 为

$$\frac{3.2-0}{24.2-19.8}=0.7273$$

如在第 1 步后股票价格下跌，在第 2 步的 Delta 为

$$\frac{0-0}{19.8-16.2}=0$$

由图 12-7 得出，在第 1 步后的 Delta 为

$$\frac{1.4147-9.4636}{60-40}=-0.4024$$

在第 2 步后的 Delta 等于

$$\frac{0-4}{72-48}=-0.1667$$

或

$$\frac{4-20}{48-32}=-1.0000$$

两步二叉树的例子说明，Delta 的值随着时间变化(在图 12-4 中，Delta 从 0.506 4 变化为 0.727 3 或 0；在图 12-7 中，Delta 从 -0.404 2 变为 -0.166 7 或 -1.000)。因此，采用期权或股

票进行无风险对冲时我们需要不断调节所持股票的数量。在第 18 章我们还要对期权的这一特性做进一步讨论。

12.7 选取 u 和 d 使二叉树与波动率吻合

在实际中，为了描述股票价格变化而构造二叉树时，我们会通过选择 u 和 d 来使树形与股票价格的波动率相吻合。这时一个很自然的问题是应当选择现实世界还是风险中性世界的波动率。我们现在证明，选取哪个世界是没有关系。对一小段时间 Δt 以及给定的 u 和 d，我们所假设的波动率在现实世界与风险中性世界是一样的。

图 12-9a 表示的是一步二叉树在现实世界的股票价格变化，图 12-9b 表示的是在风险中性世界的变化。步长是 Δt，股票价格从 S_0 开始，可能上涨到 S_0u 也可能下降到 S_0d。这是现实世界与风险中性世界股票价格仅可能取的两个值。价格向上移动在现实世界的概率是 p^*，而且与前面符号一样，在风险中性世界的概率是 p。

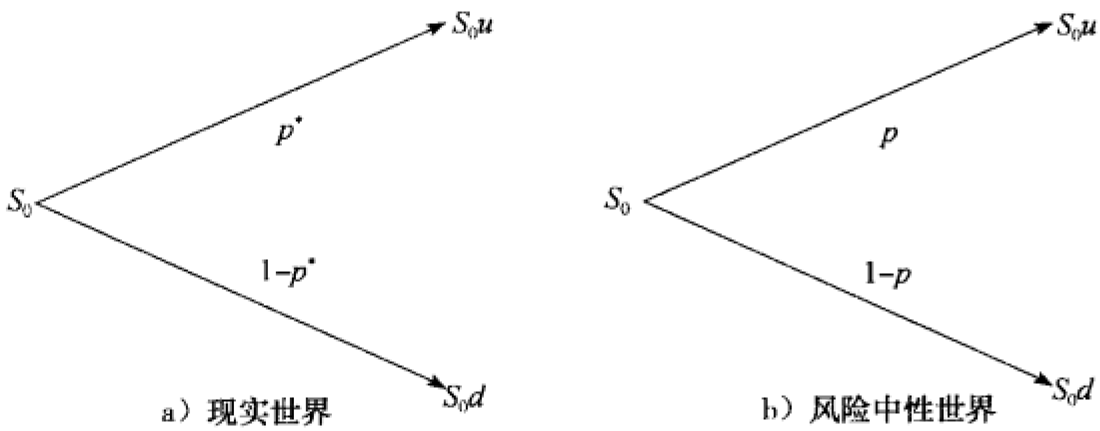


图 12-9 步长为 Δt 的二叉树上股票价格移动

在现实世界里，在第 1 步末股票价格的期望是 $S_0e^{\mu\Delta t}$。在二叉树上，相应的股票价格期望是

$$p^*S_0u+(1-p^*)S_0d$$

为了使股票价格的收益期望值与二叉树的参数一致，必须有

$$p^*S_0u+(1-p^*)S_0d=S_0e^{\mu\Delta t}$$

即

$$p^*=\frac{e^{\mu\Delta t}-d}{u-d} \tag{12-11}$$

从第 14 章我们将会看到，股票价格的波动率 σ 的定义是使得 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 为股票价格在一个长度为 Δt 的短时间段上收益的标准差。与此等价，$\sigma^2\Delta t$ 为回报的方差。在图 12-9a 的二叉树上，股票价格收益的方差为㊀

$$p^*u^2+(1-p^*)d^2-[p^*u+(1-p^*)d]^2$$

为了使股票价格的波动率与二叉树的参数一致，必须有

$$p^*u^2+(1-p^*)d^2-[p^*u+(1-p^*)d]^2=\sigma^2\Delta t \tag{12-12}$$

将式(12-11)代入式(12-12)中，可以得到

$$e^{\mu\Delta t}(u+d)-ud-e^{2\mu\Delta t}=\sigma^2\Delta t$$

当忽略 Δt^2 和 Δt 的更高级项后，这个方程的一个解为㊁

㊀ 收益为 $u-1$ 或 $d-1$。从一个变量里减去 1 对其方差是没有影响的，因此收益的方差等于一个变量的方差：等于 u 的概率为 p^*，等于 d 的概率为 $1-p^*$。这里利用了如下结果：变量 X 的协方差等于 $E(X^2)-[E(X)]^2$，式中 E 表示期望值。

㊁ 这里我们利用级数展开

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

这样选择 u 和 d 来吻合波动率是由 Cox、Ross 和 Rubinstein (1979)提出的。

在图 12-9b 中，如式(12-4)所示，在第 1 步末股票价格的期望值为 $S_0e^{r\Delta t}$，而且在风险中性世界里股票收益的方差是

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = [e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t}]$$

将 $u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$和 $d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$代入这个方程，我们发现当忽略 Δt^2 和 Δt 的更高级项后，它等于 $\sigma^2\Delta t$。

这些分析表明，当我们从现实世界转换到风险中性世界时，股票价格的收益期望将会变化，但它的波动率却保持不变(至少在 Δt 趋于零时的极限是不变的)。这是 Girsanov 定理的重要结果的特例：当我们从具有一组风险偏好的世界转换到具有另一组风险偏好的世界时，变量的收益率期望变化，但其波动率保持不变。在第 27 章，我们将会更仔细地探讨风险偏好对市场变量性质的影响。从一组风险偏好转换到另一组风险偏好有时被称为**测度变换**(changing the measures)。现实世界的测度有时被称做 P-测度，而风险中性世界的测度被称做 Q-测度。[⊖]

12.8 二叉树公式

上一节的分析表明，当二叉树上的步长为 Δt 时，为了与波动率相吻合，我们取

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{12-13}$$

和

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{12-14}$$

而且，由式(12-6)得

$$p = \frac{a-d}{u-d} \tag{12-15}$$

式中

$$a = e^{r\Delta t} \tag{12-16}$$

二叉树是由式(12-13)至式(12-16)定义的。

我们再考虑图 12-8 中的美式看跌期权，其中股票价格为 50 美元，执行价格为 52 美元，无风险利率为 5%，期权期限为 2 年，二叉树包含两步。这时 $\Delta t=1$。假定波动率为 30%，由式(12-13)至式(12-16)得出

$$u = e^{0.3\times1} = 1.349\,9, d = \frac{1}{1.349\,9} = 0.740\,8, a = e^{0.05\times1} = 1.051\,3$$

以及

$$p = \frac{1.053-0.740\,8}{1.349\,9-0.740\,8} = 0.509\,7$$

二叉树在图 12-10 中给出。看跌期权的价格为 7.43。这与图 12-8 中假定 $u=1.2$ 及 $d=0.8$ 所得出的价格很不一样。注意在第 1 步末，如果股票价格达到下面节点，那么期权将会被行使。

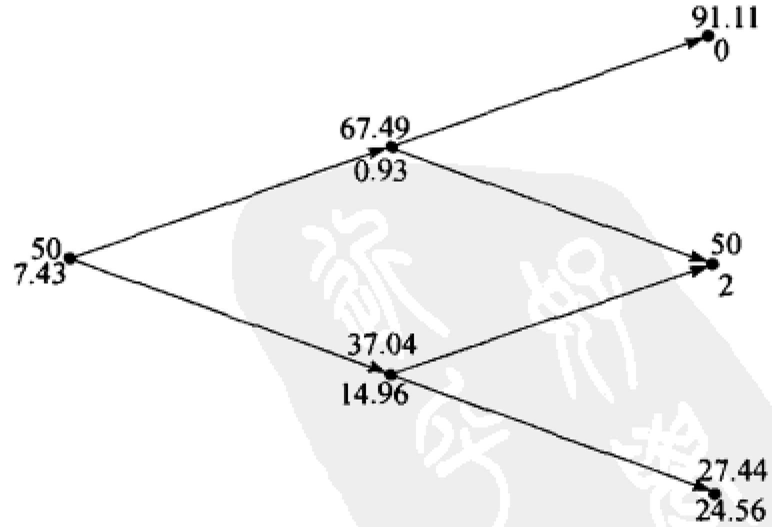


图 12-10 用两步二叉树来对一个两年期的看跌期权定价

⊖ 在我们所采用的记号下，p 为 Q-测度下的概率，而 p^* 是 P-测度下的概率。

12.9 增加二叉树的时间步数

到目前为止，我们所列举的二叉树简单得不切实际。显而易见，如果一个分析员假定在期权期限内价格变化只由一步或两步二叉树来表达，那么由此得出的期权价格将只是一个非常粗略的近似。

在实际中应用二叉树时，期权的期限通常会被分割为 30 或更多的步数。在每一个时间步，股票价格变动由一个单步二叉树来表达。在 30 个时间步中，总共有 31 个最终股票价格，即 2^{30}，大约 10 亿种可能的股票价格路径。

不管步数是多少，树形的结构都由式(12-13)至式(12-16)定义。例如，假定图 12-10 中的二叉树为 5 步而不是 2 步，相应的参数为 $\Delta t=2/5=0.4$，$r=0.05$ 及 $\sigma=0.3$。相应参数 $u=e^{0.3\times\sqrt{0.4}}=1.2089$，$d=1/1.2089=0.8272$，$a=e^{0.05\times0.4}=1.0202$，及 $p=(1.0202-0.8272)/(1.2089-0.8272)=0.5056$。

当步数增加(从而 Δt 变小)时，在二叉树模型里对股票价格变化所做的假设与在第 14 章引入的布莱克-斯科尔斯-默顿模型的假设是一样的。当利用二叉树对欧式期权定价，步数增加时，所得价格将会收敛到布莱克-斯科尔斯-默顿价格。我们在本章附录将证明这个结论。

12.10 使用 DerivaGem 软件

DerivaGem 对读者了解二叉树非常有用。用户可根据书末的说明将软件装在自己的电脑上，然后可以采用"Equilty_ Fx_ Index_ Options"工作页来进行计算，在计算中选择"股本"(Equity)作为"标的资产类型"(Underlying Type)，选择"二叉树美式"(Binominal American)作为"期权类型" Option-Type。选定股价(stock price)、波动率(volatility)、无风险利率(risk- free rate)，到期日(time to expiration)、执行价格(exercise price)以及树的步数(tree steps)分别为 50、30%、5%、2、52 及 2，点击"看跌期权"(put)键与"计算"(Calculate)键。期权价格为 7.428，这一价格显示在名为"价格"(Price)的小格中。点击"显示二叉树"(Display Tree)，用户可以看到类似于图 12-10 的图形(红色数字对应于期权将被行使的节点)。

返回到 Equilty_ Fx_ Index_ Futures_ Option 工作页并将时间步数改为 5 步，打入回车键并点击"计算"键。你将发现期权价格变为 7.671，点击"显示二叉树"，一个 5 步的树形及 u、d、a 及 p 的数值将会被展示出来。

DerivaGem 可以展示的树形最多为 10 步，但计算量最多可以到 500 步。在我们的例子中，500 步树所对应的期权价格(精确到小数点第 2 位)为 7.47，这是一个非常精确的结果。将"期权类型"选为"二叉树欧式"(Binomial European)，我们可以对欧式期权来定价。选用 500 步树所得结果与具有同样参数的美式期权结果一致，即 6.76。将期权类型改为"解析欧式"(Analytic European)，我们可以展示第 16 章将讨论的布莱克-斯科尔斯公式所得的结果，解析公式的结果也为 6.76。通过改变"标的资产类型"，我们也可以分析标的资产并非为股票的期权。接下来我们讨论这些期权。

12.11 对于其他标的资产的期权

在第 9 章，我们介绍了股指期权、货币期权和期货期权，在第 16 章及第 17 章中我们还要进一步讨论这些期权。事实上，我们可以采用几乎同构造股票期权一样的方法来构造二叉树，唯一的变化是概率 p 的计算有所改变。像对于股票期权定价那样，我们仍采用式(12-2)，即每一个节点的期权价格(在提前行使期权的可能性被考虑之前)等于 p 乘以股票价格上涨时所对应的期权价值加上 $1-p$ 乘以股票价格下跌所对应的期权价值，并以无风险利率进行贴现。

12.11.1 支付连续股息收益率股票的期权

考虑一个支付连续股息收益率 q 的股票。在风险中性世界里股息加上资本收益(capital gain)

的总利等于 r，股息收益为 q，因此资本收益率为 $r-q$。如果股票今天的价格为 S_0 在步长为 Δt 时第一步后股票的期望值为 $S_0e^{(r-q)\Delta t}$，因此

$$pS_0u+(1-p)S_0d=S_0e^{(r-q)\Delta t}$$

即

$$p=\frac{e^{(r-q)\Delta t}-d}{u-d}$$

与计算无股息股票期权类似，我们将 u 设为 $u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$，$d=1/u$ 以便使树形与波动率相吻合。这意味着我们可以采用式(12-13)到式(12-16)，而计算中唯一的改动是将 $a=e^{r\Delta t}$ 改为 $a=e^{(r-q)\Delta t}$。

12.11.2 股指期权

在第 5 章中计算股指期货价格时，我们曾假设股指中标的股票支付的股息收益率为 q，在这里我们采用类似假设。对于股指期权定价类似于对于支付已知连续股息率的股票期权定价。

【例 12-1】 某股指的当前价格为 810，波动率为 20%，股息收益率为 2%，无风险利率为 5%。图 12-11 显示了 DerivaGem 对于一个执行价格为 800，期权为 6 个月的欧式看涨期权的定价结果。在计算中采用了两步二叉树，这时

$$\Delta t=0.25,\quad u=e^{0.20\times\sqrt{0.25}}=1.105\,2,\quad d=1/u=0.904\,8,\quad a=e^{(0.05-0.02)\times 0.25}=1.007\,5,$$

$$p=\frac{1.007\,5-0.904\,8}{1.105\,2-0.904\,8}=0.512\,6$$

期权价格为 53.39。

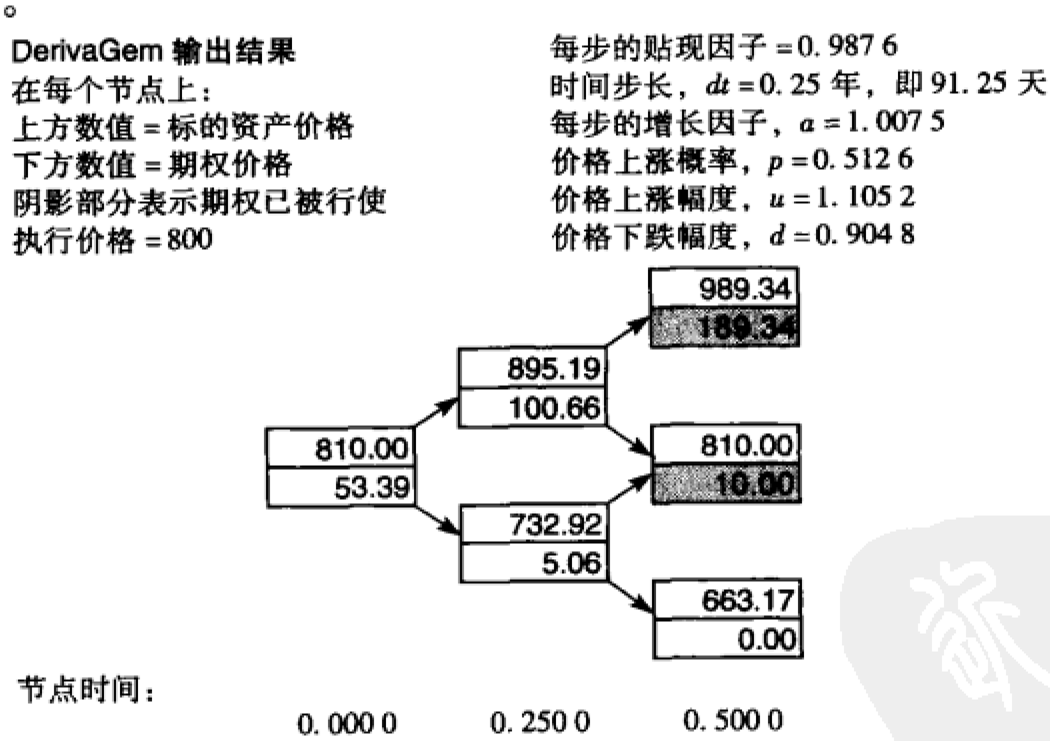


图 12-11 利用二步二叉树对股指上 6 个月期限的欧式看涨期权定价

注：目前的股指水平为 810，执行价格是 800，无风险利润是 5%，波动率是 20%，股息率是 2%。

12.11.3 货币期权

如 5.10 节所示，外汇可以被视为收益率等于外币利率 r_f 的资产。同股指相比，我们可以采用式(12-13)至式(12-16)并令 $a=e^{(r-r_f)\Delta t}$ 来对货币期权进行定价。

【例 12-2】 一澳元的现值为 0.610 0 美元，汇率波动率为 12%，澳元的无风险利率为 7%，美元无风险利率为 5%。图 12-12 显示了 DerivaGem 对于一个执行价格为 0.600 0，期限为 3 个月

的美式看涨期权的定价结果，在计算中采用了三步二叉树。这时

$\Delta t = 0.083\,33$，　$u = e^{0.12 \times \sqrt{0.083\,33}} = 1.035\,2$，　$d = 1/u = 0.966\,0$，　$a = e^{(0.05-0.07) \times 0.083\,33} = 0.998\,3$，

以及

$$p = \frac{0.998\,3 - 0.966\,0}{1.035\,2 - 0.966\,0} = 0.467\,3$$

期权价格为 0.019。

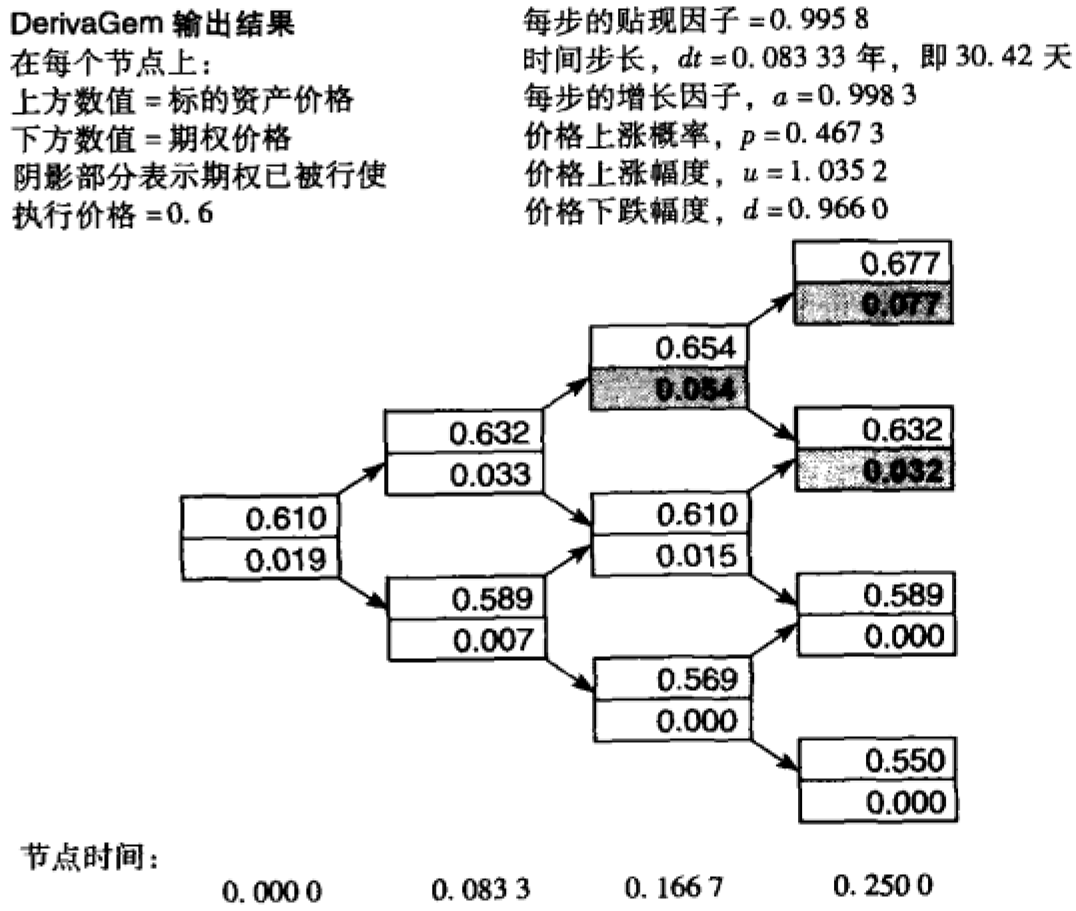


图 12-12　利用三步二叉树模型来对一个 3 个月期限的货币看涨期权定价

注：汇率当前价格为 0.610 0，执行价格为 0.600 0，波动率为 5%，股息收益率为 12%，外国无风险利率为 7%。

12.11.4　期货期权

进入期货合约的长头寸或短头寸时投资者无须支付任何费用，这说明在风险中性世界里期货的增长率期望应为 0(在 17.7 节中我们将详细讨论这一点)。同上，我们定义 p 为价格上涨的概率，u 为价格上涨的比率，p 为价格下跌的比率。期货的初始值计为 F_0。在第一步 Δt 时间后，期货价格的期望值仍然应当是 F_0。这意味着

$$pF_0u + (1-p)F_0d = F_0$$

即

$$p = \frac{1-d}{u-d}$$

我们可利用式(12-13)至式(12-16)及 $a = 1$ 来对期权进行定价。

【例 12-3】　期货的当前行使价格为 31，波动率为 30%，无风险利率为 5%。图 12-13 显示了由 DerivaGem 对于一个执行价格为 30，期限为 9 个月的美式看跌期权的定价结果，计算中采用了三步二叉树。这时

$\Delta t = 0.25$，　$u = e^{0.3 \times \sqrt{0.25}} = 1.161\,8$，　$d = 1/u = 0.860\,7$，　$a = 1$，

以及

$$p = \frac{1 - 0.860\,7}{1.161\,8 - 0.860\,7} = 0.462\,6$$

期权价格为 2.84。

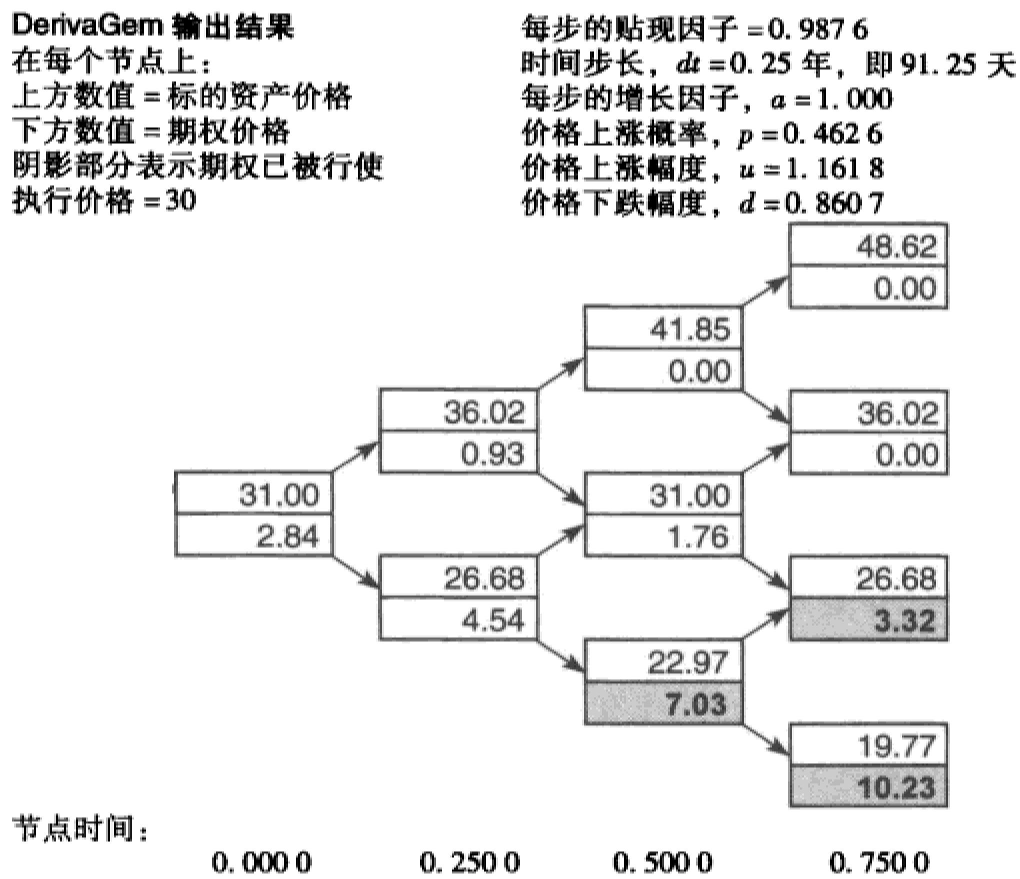


图 12-13 利用三步二叉树模型对一个 9 个月期限的期货美式看涨期权定价

注：期货当前价格为 31，执行价格为 30，波动率为 30%，无风险利率为 5%。

小 结

本章简要介绍了对于股票及其他标的资产的期权的定价过程。对于在期权期限内股票价格服从单步二叉树的情形，我们可以构造一个由期权与股票所构成的无风险交易组合，在无套利机会的前提下，无风险交易组合的收益率一定等于无风险利率，由此我们可将股票期权的价格用标的股票价格来表示。有趣的是，我们对于股票在每个节点上涨及下跌的概率无须做出任何假设。

如果股票价格的变化由多步二叉树来表述，我们可以分别处理二叉树的每一步，并由期权的到期日出发倒推到树形起始点来得出期权的价格。在分析中，我们只需要假设市场上不存在套利机会，而对价格上涨及下跌的概率无需做出任何假设。

另一个同样可以为股票期权定价的方法为风险中性定价原理，这一重要的原理指出：在对股票期权定价时，我们可以假设世界是风险中性的。本章以数值例子及代数的推导形式说明了无套利理论与风险中性理论是等价的，并会给出同样的期权价格。

股票期权的 Delta，即 Δ，考虑了标的股票价格的一个微小变化对于期权价格的影响。Delta 为期权价格的变化与标的股票价格变化的比率。为了构造无风险头寸，对于每个卖出的期权，投资者必须买入 Δ 股股票。通过观察一个典型的二叉树我们可以看到 Δ 在期权有效期内随时间变化而改变。这意味着，为了对冲期权，我们必须定期调节标的股票的头寸。

构造股指、外汇、期货定价的二叉树与构造股票期权的二叉树非常相似。在第 20 章，我们将重新讨论二叉树，并说明在实际中应用二叉树的细节。

推荐阅读

Coval, J. E. and T. Shumway. "Expected Option Returns," *Journal of Finance*, 56, 3 (2001): 983–1009.

Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein. "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics* 7 (October 1979): 229–64.

Rendleman, R., and B. Bartter. "Two State Option Pricing," *Journal of Finance* 34 (1979): 1092–1110.

Shreve, S. E. *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. New York: Springer, 2004.

练习题

12.1 股票的当前价格为40美元，已知在1个月后这只股票的价格将变为42美元或38美元，无风险利率为每年8%(连续复利)，执行价格为39美元，1个月期限的欧式期权的价格为多少?

12.2 用单步二叉树来说明无套利理论及风险中性定价理论对于欧式期权的定价过程。

12.3 股票期权的Delta的含义是什么?

12.4 某股票的当前价格为50美元，已知在6个月后这只股票的价格将变为45美元或55美元，无风险利率为10%(连续复利)。执行价格为50美元，6个月期限的欧式看跌期权的价格为多少?

12.5 某股票的当前价格为100美元，在今后每6个月内，股票价格或者上涨10%或下跌10%，无风险利率为每年8%(连续复利)，执行价格为100美元，1年期的欧式看涨期权的价格为多少?

12.6 考虑练习题12.5的情形，执行价格为100美元，1年期的看跌期权的价格为多少?验证所得结果满足看跌-看涨期权平价关系式。

12.7 以波动率表达的计算u和d的公式是什么?

12.8 考虑在期权期限内，股票价格变动服从两步二叉树的情形。解释为什么用股票及期权构造的交易组合不可能在整个期权的有效期内一直保持无风险状态。

12.9 某股票的当前价格为50美元，已知在2个月后股票价格将变为53美元或48美元，无风险利率为每年10%(连续复利)，执行价格为49美元，期限为2个月的欧式看涨期权价格为多少?在讨论中采用无套利机会方法。

12.10 某股票的当前价格为80美元，已知在4个月后股票价格将变为75美元或85美元，无风险利率为每年5%(连续复利)，执行价格为80美元，期限为4个月的欧式看跌期权价格为多少?在讨论中采用无套利机会方法。

12.11 某股票的当前价格为40美元，已知在3个月后股票价格变为45美元或35美元，无风险利率为每年8%(连续复利)，计算执行价格为40美元，期限为3个月的欧式看跌期权价格。验证由无套利理论及风险中性原理给出的价格相等。

12.12 某股票的当前价格为50美元，在今后6个月内的每3个月时间内，股票价格或上涨6%，或下跌5%，无风险利率为每年5%(连续复利)。执行价格为51美元，6个月期限的看涨期权的价格为多少?

12.13 考虑练习题12.12中的情形，执行价格为51美元，6个月看跌期权的价格为多少?验证看跌-看涨期权平价关系式的正确性。如果看跌期为美式期权，在二叉树的节点上提前行使期权会是最优吗?

12.14 一只股票的当前价格为25美元，已知在两个月后股票价格变为23美元或27美元，无风险利率为每年10%(连续复利)。假定S_T为股票在两个月后的价格，股票上一种衍生产品在两个月后收益为S_T^2，该衍生产品的价格是多少?

12.15 计算用于计算外货期权的二叉树中的u、d及p，二叉树的步长为1个月，本国的利率为5%，国外利率为8%，汇率的波动率为每年12%。

作业题

12.16 某股票的当前价格为50美元，在6个月后股票价格将变为60美元或42美元，无风险利率为每年12%(连续复利)，计算执行价格为48美元，期限为6个月的欧式看涨期权价格。验证无套利原理与风险中性理论定价方法所得结论是一致的。

12.17 某股票的价格为40美元，在今后两个

3个月的时间段内，股票价格或上涨10%或下跌10%，无风险利率为每年12%（连续复利）。

(a)执行价格为42美元，6个月的欧式看跌期权价格为多少？

(b)执行价格为42美元，6个月的美式看涨期权价格为多少？

12.18 采用“试错法”(trial and error approach)，估计作业题12.17中的期权在什么样的执行价格下应该马上行使期权。

12.19 某股票当前价格为30美元，在今后4个月中的每2个月内，股票价格或者上涨8%，或者下跌10%，无风险利率为5%。采用两步二叉树来计算收益为$[\max(30-S_T,\ 0)]^2$的衍生产品的当前价格，其中S_T为4个月时股票的价格。如果衍生产品为美式，这一期权应该被提前行使吗？

12.20 考虑一个不付股息股票的欧式期权，股票价格为40美元，无风险利率为每年4%，波动率为每年30%，期限为6个月。

(a)计算两步二叉树中的u、d及p；

(b)利用两步二叉树来对期权定价；

(c)验证DerivaGem会给出同样的结果；

(d)采用DerivaGem并分别采用5、50、100及500步二叉树来计算期权价格。

12.21 重复练习题12.20中的计算，假定标的资产为期货合约，期权为美式看跌期权，期货价格为50美元，无风险利率为10%，期限为6个月，期货价格波动率为每年40%。

12.22 12.2节的页下注显示，对应于图12-1，为了使得期权收益在现实世界里的期望值贴现后与期权价格吻合，对应于看涨期权收益的现实世界里贴现率为42.6%，而对应于看跌期权收益的现实世界的贴现率为-52.5%。解释为什么这两个现实世界的贴现率会如此不同。

附录12A

由二叉树模型推导布莱克-斯科尔斯-默顿期权定价公式

推导著名的布莱克-斯科尔斯-默顿欧式期权定价公式有许多方法，其中一种是在二叉树模型中令步数趋于无穷大。

假设我们利用n步二叉树对执行价格为K，期限为T的欧式看涨期权定价。每步的时间长度是T/n，如果在树上股票价值有j次向上移动，$n-j$次向下移动，最后的股票价格等于$S_0u^jd^{n-j}$，其中u是价格上涨的比例，d是下跌的比例，S_0是开始时的股票价格。欧式看涨期权的收益为

$$\max(S_0u^jd^{n-j}-K,0)$$

由二项分布的性质，j次向上移动，$n-j$次向下移动的概率为

$$\frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}$$

因此看涨期权收益的期望值为

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}\max(S_0u^jd^{n-j}-K,0)$$

因为树形所表示的是在风险中性世界里股票价格的变化，所以我们应当用无风险利率贴现来得到期权价格

$$c=e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}\max(S_0u^jd^{n-j}-K,0) \tag{12A-1}$$

在式(12A-1)中，只有当股票价格高于执行价格，式中的项才是非零的，即

$$S_0u^jd^{n-j}>K$$

或

$$\ln(S_0/K) > -j\ln(u) - (n-j)\ln(d)$$

因为 $u=e^{\sigma\sqrt{T/n}}$ 和 $d=e^{-\sigma\sqrt{T/n}}$，这个条件等价于

$$\ln(S_0/K) > n\sigma\sqrt{T/n} - 2j\sigma\sqrt{T/n}$$

或

$$j > \frac{n}{2} - \frac{\ln(S_0/K)}{2\sigma\sqrt{T/n}}$$

因此式(12A-1)可以被写成

$$c = e^{-rT}\sum_{j>\alpha}\frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}(S_0u^jd^{n-j}-K)$$

其中

$$\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln(S_0/K)}{2\sigma\sqrt{T/n}}$$

为方便起见，我们定义

$$U_1 = \sum_{j>\alpha}\frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}u^jd^{n-j} \tag{12A-2}$$

和

$$U_2 = \sum_{j>\alpha}\frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j} \tag{12A-3}$$

因此

$$c = e^{-rT}(S_0U_1 - KU_2) \tag{12A-4}$$

首先考虑 U_2。我们知道，当实验次数趋于无穷大时，二项分布将趋向于正态分布。具体地讲，当实验次数为 n，成功的概率为 p 时，成功次数的概率分布近似地等于均值为 np，标准协方差为 $\sqrt{np(1-p)}$ 的正态分布。式(12A-3)中的 U_2 是成功次数大于 α 的概率。由正态分布的性质，我们知道当 n 很大时，

$$U_2 = N\left(\frac{np-\alpha}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \tag{12A-5}$$

其中 N 为累积正态分布函数。将 α 代入该式，我们得到

$$U_2 = N\left(\frac{\ln(S_0/K)}{2\sigma\sqrt{T}\sqrt{p(1-p)}} + \frac{\sqrt{n}(p-1/2)}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \tag{12A-6}$$

由式(12-13)至式(12-15)，我们有

$$p = \frac{e^{rT/n} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}$$

将指数函数按级数展开后我们可以看到，当 n 趋于无穷大时，$p(1-p)$ 趋向于1/4，而 $\sqrt{n}(p-1/2)$ 则收敛于

$$\frac{(r-\sigma^2/2)\sqrt{T}}{2\sigma}$$

所以当 n 趋于无穷大时，式(12A-6)成为

$$U_2 = N\left(\frac{\ln(S_0/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{12A-7}$$

我们现在考虑 U_1。由式(12A-2)，

$$U_1 = \sum_{j>\alpha}\frac{n!}{(n-j)!j!}(pu)^j[(1-p)d]^{n-j} \tag{12A-8}$$

定义

$$p^* = \frac{pu}{pu + (1-p)d} \tag{12A-9}$$

这时

$$1 - p^* = \frac{(1-p)d}{pu + (1-p)d}$$

式(12A-8)可以写成

$$U_1 = [pu + (1-p)d]^n \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)!j!}(p^*)^j(1-p^*)^{n-j}$$

因为在风险中性世界里，收益的期望值为无风险利率 r，所以 $pu+(1-p)d=e^{rT/n}$，和

$$U_1 = e^{rT} \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)!j!}(p^*)^j(1-p^*)^{n-j}$$

这说明 U_1 涉及二项式分布，在这里上移的概率是 p^*(而不是 p)。通过由正态分布来近似二项分布，我们可以得到与式(12A-5)类似的结果：

$$U_1 = e^{rT} N\left(\frac{np^* - \alpha}{\sqrt{np^*(1-p^*)}}\right)$$

与式(12A-6)相似，代入 α，将会得到

$$U_1 = e^{rT} N\left(\frac{\ln(S_0/K)}{2\sigma\sqrt{T}\sqrt{p^*(1-p^*)}} + \frac{\sqrt{n}(p^* - 1/2)}{\sqrt{p^*(1-p^*)}}\right)$$

将 u 和 d 代入(12A-9)得

$$p^* = \left(\frac{e^{rT/n} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}\right)\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{rT/n}}\right)$$

将指数函数按级数展开后可以看到，当 n 趋于无穷大时，$p^*(1-p^*)$ 趋向于 1/4，而 $\sqrt{n}\left(p^* - \frac{1}{2}\right)$ 收敛于

$$\frac{(r + \sigma^2/2)\sqrt{T}}{2\sigma}$$

所以当 n 趋于无穷大时

$$U_1 = e^{rT} N\left(\frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{12A-10}$$

由式(12A-4)、式(12A-7)和式(12A-10)，我们有

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

和

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

这就是欧式看涨期权的布莱克-斯科尔斯-默顿公式。在第 14 章我们将进一步讨论这个公式，并且在第 14 章的附录 14A 会给出另一种推导方式。



第 13 章

维纳过程和伊藤引理

如果某一变量的值以某种不确定的方式随时间变化，我们称这个变量服从某种**随机过程**(stochastic process)。随机过程可分为**离散时间**(discrete time)和**连续时间**(continuous time)两类。一个离散时间随机过程是指标的变量值只能在某些确定的时间点上变化，而一个**连续时间随机过程**(continuous-time stochastic process)是指标的变量值可以在任何时刻上变化。随机过程也可分为**连续变量**(continuous variable)和**离散变量**(discrete variable)两类。在连续变量过程中，标的变量可以在某一范围内取任意值，而在离散变量过程中，标的变量只能取得某些离散值。

本章我们将建立关于股票价格的连续变量、连续时间的随机过程。理解这一过程是学习和理解期权和其他复杂衍生产品定价的第一步。在这里应该指出，在实际中，我们所观察到的股票价格并不服从连续变量、连续时间过程，股票价格的变动为离散形式(例如，价格为美分的倍数)，而且我们只有在看盘时才能够看到股票价格的变化。但即便如此，在大多数情况下，连续时间过程仍是一个有用的模型。

许多人认为连续时间随机过程过于复杂，应当把它们全部交给“火箭专家”来处理，事实并非如此。理解这些过程的最大障碍是符号，在这里我们将提供一种循序渐进的方式来帮助读者克服困难，同时我们也要讨论一个重要结论，即**伊藤引理**(Ito's Lemma)，这一定理是衍生产品定价的核心。

13.1 马尔科夫性质

马尔科夫过程(Markov process)是一个特殊类型的随机过程，在该过程中，只有标的变量的当前值与未来的预测有关，变量的历史以及变量从过去到现在的演变方式与未来的预测无关。

股票价格通常被假设为服从马尔科夫过程。假定 IBM 股票的当前价格为 100 美元，如果股票价格服从马尔科夫过程，那么一个星期以前、一个月以前及一年以前的股票价格不会影响我们对将来价格的预测，而唯一的相关信息就是股票的当前价格为 100 美元[⊖]。我们对将来的预测是不确定的，预测方式必须以概率分布的形式来表达。马尔科夫性质意味着股票价格在将来的概率分布不依赖于股票价格过去所遵循的特殊路径。

股票价格的马尔科夫性质与**弱型市场有效性**(the weak form of market efficiency)一致，弱型市场有效性指出，一种股票的当前价格包含过去价格的所有信息。如果弱型市场有效性不成立，股票技术分析师可以通过分析股票价格的历史数据来获得高于平均收益率的收益，而事实上，我们没有任何证据证明他们可以做到这一点。

正是由于市场的竞争造成了弱型市场有效性的成立。有许许多多的投资者紧盯股票市场，并

⊖ 在确定 IBM 股票价格所服从的随机过程特性时，其历史数据的统计特性(例如波动率)也许有用。在这里我们想说明的是，股票的未来价格与历史价格无关。

想从中盈利。投资者对盈利的追求使得在任意时刻，股票价格都包含股票的历史价格信息。我们假定，市场上人们发现了以往股票价格的某种特殊模式会使得股票价格有65%的概率上涨，这种规律一旦被观察到，众多的投资者都会购买股票，这会造成股票价格的上涨。因此股票价格会迅速上涨，从而观察的模式会失效，可盈利的交易机会也会很快消失。

13.2 连续时间随机变量

我们考虑服从马尔科夫过程的变量，假定其当前的值为10，在1年后该变量的分布为$\phi(0, 1)$，其中$\phi(\mu, v)$代表正态概率分布，期望值为m，方差为v。[⊖]我们在此要问，变量在第2年时的概率分布是什么?

变量在第2年时的变化等于两个正态随机变量的和，这里每个变量的期望值均为0，方差均为1.0。因为变量满足马尔科夫性质，这里的两个分布为相互独立。将两个相互独立的变量相加，得到的和也服从正态分布，其期望值等于独立变量期望值的和，方差等于两个独立变量方差的和[⊖]。因此，变量的变化在第2年时的期望值等于0，方差等于2.0，进而变量在第2年的变化服从$\phi(0, \sqrt{2})$，分布的标准差为$\sqrt{2}$。

接下来，我们考虑变量在6个月内变化的分布。变量1年变化的方差等于变量在前6个月的变化的方差加上变量在后6个月的变化的方差，我们假定这里的两个变量相等，由此我们得出6个月内的变化的方差等于0.5，与此等价，我们可以讲变量在6个月变化的标准差等于$\sqrt{0.5}$，因此变量在6个月时的变化的分布为$\phi(0, 0.5)$。

采用类似论点，我们可以说明变量在3个月的变化服从$\phi(0, 0.25)$。一般来讲，变量在任意时间段T变化的分布服从$\phi(0, T)$，特别是，变量在小的时间段$\sqrt{\Delta t}$变化的分布服从$\phi(0, \Delta t)$。

当我们考虑马尔科夫过程时，变量在相邻时间区间变化的方差具有可加性，但标准差都不具有可加性。我们的例子中变量每年变化的方差为1.0，因此变量变化在第2年时的方差为2.0，在第3年时的方差为3.0，变量第2年变化和第3年变化的标准差分别为$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$。严格地讲，我们不应该称标准差为每年1.0(1.0 per year)，我们应该称标准差为每根号年为1.0(1.0 per square root of years)。这里的结果说明了有时不定性与时间的平方根成正比。

13.2.1 维纳过程

这里变量所服从的过程为著名的**维纳过程**(Wiener process)。维纳过程是一种期望值为0、方差为1.0的特殊马尔科夫过程。这种过程曾在物理学中用来描述某个粒子受到大量小分子碰撞所产生的运动，有时被称为**布朗运动**(Brownian motion)。

采用严格符号，变量z服从以下两个性质时被称为服从维纳过程。

性质1：变化量Δz与小时间区间Δt之间满足

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{13-1}$$

性质2：在任何两个不相重叠的Δt的时间区间内，变化量Δz相互之间独立。

由性质1得出，Δz本身服从正态分布，并且

$$\Delta z \text{ 的期望值} = 0$$

$$\Delta z \text{ 的标准差} = \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta z \text{ 的方差} = \Delta t$$

性质2意味着变量z服从马尔科夫过程。

⊖ 方差是标准差的平方，因此我们所考虑的变量的值在一年内变化的方差等于1.0。

接下来，我们考虑一段相对较长的时间段 T 内变量 z 的变化，我们可以将变化量表达为 $z(T)-z(0)$，这一变化量可以被看成是 N 个长度为 Δt 的小时间段内变量 z 的变化的总和，其中

$$N=\frac{T}{\Delta t}$$

因此，

$$z(T)-z(0)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sqrt{\Delta t} \tag{13-2}$$

其中 $\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,N)$ 均服从 $\phi(0,1)$ 分布，由性质 2 得出，ε_i 之间相互独立。由式(13-2)得出，$z(T)-z(0)$ 服从正态分布，其中

$$z(T)-z(0)\text{ 的期望值 }=0$$
$$z(T)-z(0)\text{ 的方差 }=N\Delta t=T$$
$$z(T)-z(0)\text{ 的标准差 }=\sqrt{T}$$

这一结果与以上结论一致。

【例 13-1】 假定变量 z 服从维纳过程，其初始值为 25，时间以年为计量。在 1 年末，变量值服从正态分布，期望值为 25，标准差为 1.0；在 5 年末，变量值服从正态分布，期望值为 25，标准差为 $\sqrt{5}$，或 2.236。变量在将来某一确定时刻由标准差来定义不定性与未来时间的平方根成正比。

在普通微积分中，我们通常在微小变化接近于 0 时，将这个微小变化作为极限来处理。因此，我们采用符号 $dx=a dt$ 来代表当 $t\to 0$ 时，$\Delta x=a\Delta t$ 的极限形式。在随机微积分中，我们采用类似的符号。因此，我们采用 dz 来代表维纳过程，即 dz 代表当 $\Delta t\to 0$ 时，Δz 的极限形式。

图 13-1 说明了当 $t\to 0$ 时，变量 z 所遵循的路径的变化。注意当时间减小时，路径变得更加锯齿化(jagged)，这是因为变量 z 在时间段 Δt 的变化的标准差等于 $\sqrt{\Delta t}$，而我们知道当 Δt 很小时，$\sqrt{\Delta t}$ 远远大于 Δt。我们列出两个与 $\sqrt{\Delta t}$ 有关的非常有意思的维纳过程的性质。

- 在任意给定时间段内，变量 z 所遵循的路径的长度的预期值为无穷大。
- 在任意给定时间段内，变量 z 等于任意给定数值的次数的预期值为无穷大。

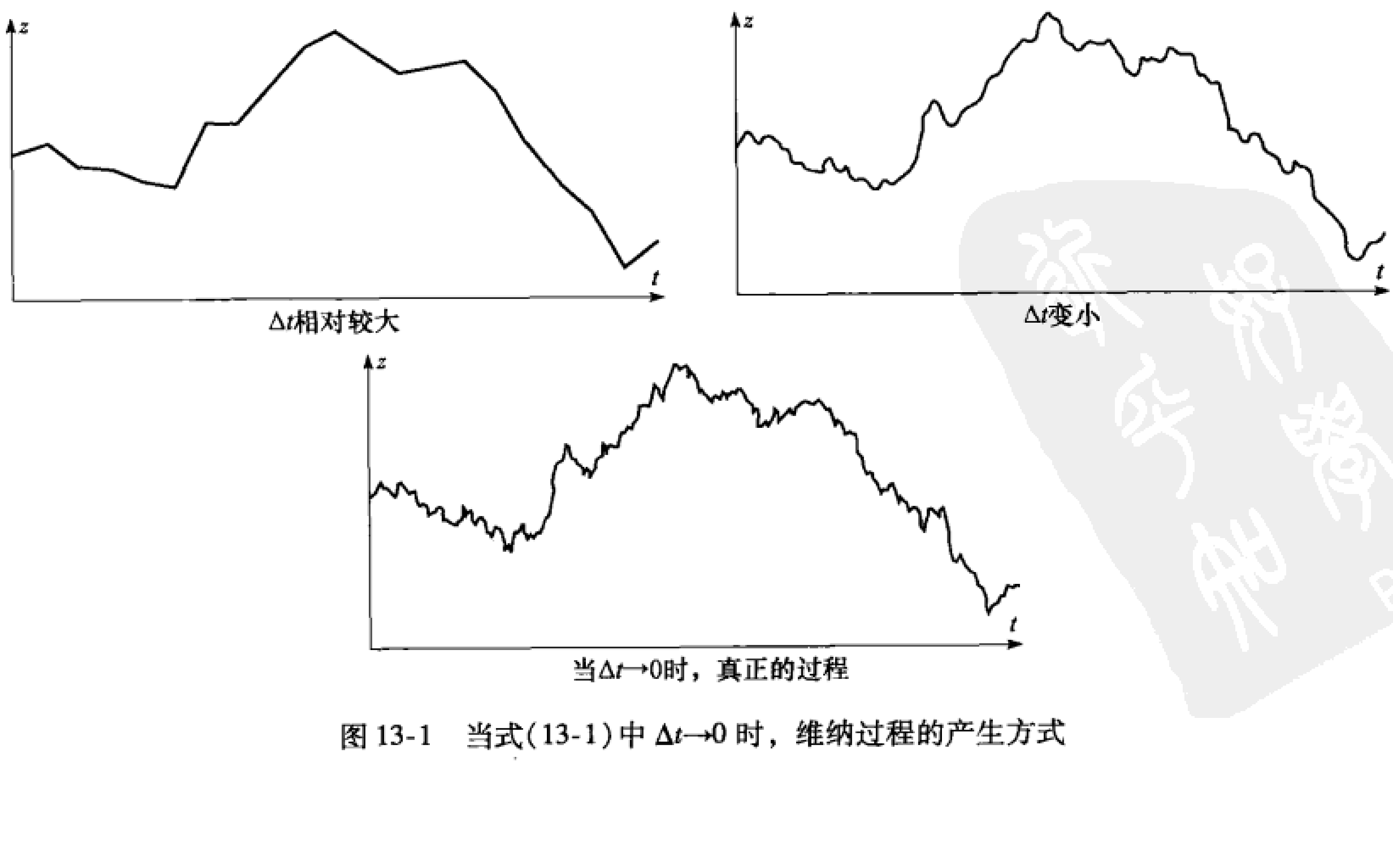


图 13-1　当式(13-1)中 $\Delta t\to 0$ 时，维纳过程的产生方式

13.2.2 广义维纳过程

在随机过程中，变量在每单位时间内变化的期望值被称为变量的**漂移率**(drift rate)，方差被称为变量的**方差率**(variance rate)。到目前为止，我们所讨论的基本维纳过程的漂移率为0，方差率为1.0。漂移率为0，意味着在将来任意时刻变量 z 的期望值等于其当前值。方差率等于1.0，意味着在将来任意时刻 T，变量 z 的方差等于 $1.0\times T$。由 dz 给出的**广义维纳过程**(generalized Wiener process) x 的定义如下

$$dx = a dt + b dz \tag{13-3}$$

其中 a 和 b 为常数。

为了理解式(13-3)，我们可以将该式的右端分成两项来看。$a dt$ 项说明变量 x 的单位时间的漂移率为 a。如果没有 $b dz$ 项，式(13-3)变为 $dx = a dt$，即 $\frac{dx}{dt}=a$。对 t 进行积分，得出

$$x = x_0 + at$$

式中 x_0 为 x 在0时刻的初始值。在一段时间 T 后，变量 x 的增量为 aT。式(13-3)中右端的 $b dz$ 项可看做附加在变量 x 路径上的噪音或扰动，其幅度为维纳过程的 b 倍。维纳过程的标准差为1.0，因此 b 倍的维纳过程在单位时间的方差率为 b^2。在短时间段 Δt 后，由式(13-1)和式(13-3)给出的 x 的变化量 Δx 满足

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

其中，如上所述，ε 服从标准正态分布。因此，Δx 服从正态分布，并且

$$\Delta x \text{ 的期望值} = a\Delta t$$

$$\Delta x \text{ 的标准差} = b\sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta x \text{ 的方差} = b^2\Delta t$$

与以上的讨论类似，在任意时间段 T 后，变量 x 的变化满足

$$x \text{ 的变化的期望值} = aT$$

$$x \text{ 的变化的标准差} = b\sqrt{T}$$

$$x \text{ 的变化的方差} = b^2 T$$

因此，式(13-3)给出的广义维纳过程的漂移率期望(即单位时间的平均漂移)为 a，方差率(即单位时间内的方差)为 b^2，其过程如图13-2所示。

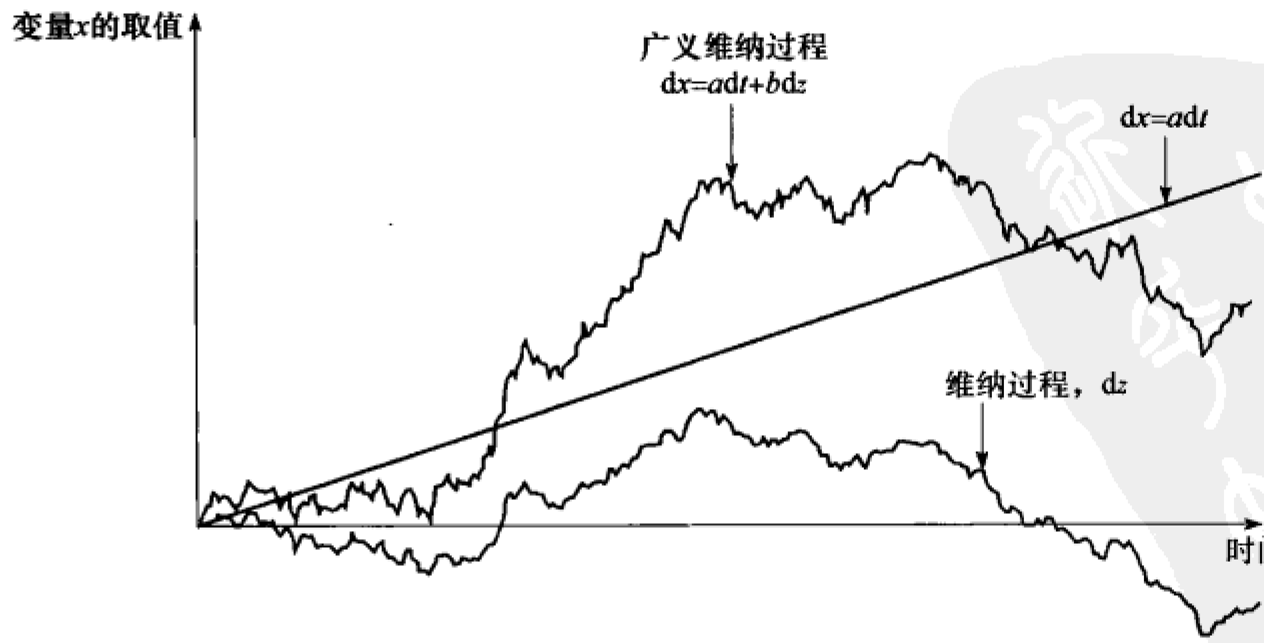


图 13-2 广义维纳过程，$a=0.3$ 和 $a=1.5$

【例 13-2】 考虑这样一种情况，某公司的现金头寸(以每千元美元计)满足广义维纳过程，漂移率为每年 20，方差率为每年 900。最初的现金头寸为 50。在 1 年后，现金头寸服从正态分布，期望值为 70，标准差为 $\sqrt{900}$，即 30。在 6 个月时，现金头寸服从正态分布，期望值为 60，标准差为 $30\sqrt{0.5}$，即 21.21。我们对于将来现金头寸所做预测的不确定性(即标准差)与我们所考察时间长度的平方根成正比，注意这里的主要现金头寸可以为负值(这种情况可被解释为公司借入资金)。

13.2.3 伊藤过程

我们可以进一步定义另一类被称为**伊藤过程**(Itô process)的随机过程。伊藤过程是一个更为广义的维纳过程，其中 a 和 b 均为变量 x 和时间 t 的函数。伊藤过程的代数表达式为

$$dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dz \tag{13-4}$$

伊藤过程中的预期漂移率和方差率均随时间而变化，在任意小的时间段$[t, t+\Delta t]$内，变量 x 变为 $x+\Delta x$，其中

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

以上关系式是一个近似式，其中假定了在时间区间 t 与 $t+\Delta t$ 内，变量 x 的漂移率和方差率都是常数，并且等于它们在时间 t 的值。

因为在式(13-4)中 x 的变化只依赖于 x 在时间 t 的值，而与其历史无关，所以这个过程具有马尔科夫性质。如果在式(13-4)中 a 与 b 依赖于 x 在时间 t 之前的值，那么这样得到的过程将不具有马尔科夫性质。

13.3 描述股票价格的过程

本节我们讨论通常对无股息股票的价格所遵循的随机过程。

假定股票价格服从广义维纳过程很具有诱惑力，也就是说，它具有不变的期望漂移率期望值和方差率。但是，这一模型却没有抓住股票价格的一个关键特性，即投资者在股票价格等于 10 美元时要求预期收益率为 14%，那么在其他条件相同时，投资者在股票价格等于 50 美元时也会要求收益率为 14%。

显然，漂移率期望值等于常数的假设不合理，该假设应修正为期望收益率(即漂移除以股票价格)期望值为常数。如果股票在 t 时刻的价格为 S，那么股票的漂移率应为 μS，其中 μ 为常数。这一假设意味着在一个短的时间段 Δt，股票 S 的增量为$\mu S\Delta t$，其中μ 为股票的收益率期望，以小数点形式表示。

如果 dz 的系数为 0，即没有不确定性，那么这个模型变为

$$\Delta S = \mu S\Delta t$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，其极限形式为

$$dS = \mu S\,dt$$

即

$$\frac{dS}{S} = \mu\,dt$$

由 0 到 T 对变量 t 进行积分，得出

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \tag{13-5}$$

其中 S_0 和 S_T 分别为股票在 0 时刻和 T 时刻的价格。式(13-5)说明，当方差为 0 时，股票价格在单位时间内的连续增值率为 μ。

当然，实际中的股票价格确实存在不确定性。一个合理的假设为：无论股票价格是多少，在

一个较短时间 Δt 后，股票价格的百分比收益的变动都一样。换句话讲，投资者在股票价格为 50 美元和 10 美元时，对于股票的不确定性有同样的观点。这意味着，在短时间段 Δt 后，股票价格变化的标准差应与股票价格成正比，因此得出模型

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

或者

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{13-6}$$

式(13-6)是最为广泛使用的描述股票价格行为的一种模型。变量 μ 为股票价格的收益率期望值，变量 σ 为股票价格的波动率，而变量 σ^2 为股票价格的方差率。式(13-6)可被视为在现实世界的股票价格过程。在风险中性世界，μ 等于无风险利率 r。

13.3.1 离散时间模型

我们这里提出的关于股票价格行为的模型有时也被称为**几何布朗运动**(geometric Brownian motion)，模型的离散形式为

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{13-7}$$

或

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{13-8}$$

变量 ΔS 为股票价格在短时间段 Δt 后的变化，ε 服从标准正态分布(期望值为 0，方差为 1.0)。参数 μ 为单位时间内股票的收益率期望值，参数 σ 为股票价格的波动率。本章我们假定以上两个参数均为常数。

式(13-7)的左端是股票在短时间 Δt 后的收益率，$\mu \Delta t$ 项是收益率的期望值，而 $\sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ 是收益率的随机部分，随机部分的方差为 $\sigma^2 \Delta t$。这与 12.7 节定义的波动率一致，即 σ 的值使得 $\sigma \sqrt{\Delta t}$ 为股票在短时间 Δt 内收益率的标准差。

式(13-7)表明 $\Delta S/S$ 服从正态分布，期望值为 $\mu \Delta t$，标准差为 $\sigma \sqrt{\Delta t}$，换句话说

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t,\ \sigma^2 \Delta t) \tag{13-9}$$

【例 13-3】 考虑某无股息股票，其波动率为每年 30%，连续复利收益率期望值为 15%。这时，$\mu = 0.15$，$\sigma = 0.30$。股票价格过程为

$$\frac{dS}{S} = 0.15dt + 0.30dz$$

如果 S 为股票在某一特定时刻的价格，ΔS 为股票价格在一个短的时间段内的增量

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.15\Delta t + 0.30\varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

其中 ε 服从标准正态分布。假定时间间隔为 1 星期，即 0.019 2 年，因此 $\Delta t = 0.0192$，

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.15 \times 0.0192 + 0.30 \times \sqrt{0.0192}\varepsilon$$

或

$$\Delta S = 0.00288S + 0.0416S\varepsilon$$

13.3.2 蒙特卡罗模拟

一个随机过程的蒙特卡罗模拟是一种对过程提取随机抽样的过程，这种方法可以帮助我们理

解式(13-6)的含义。

考虑例 13-3 的情形，假定股票的预期收益率为每年 15%，标准差(即波动率)为每年 30%，股票价格在 1 星期内的变化形式为

$$\Delta S = 0.002\,88S + 0.041\,6S\varepsilon \tag{13-10}$$

我们可以重复地从 $\phi(0, 1)$ 中抽取 ε 的样本并代入式(13-10)来模拟股票价格在 10 周内变化的路径。Excel 计算表中的表达式 RAND( ) 可用于产生 0 ~ 1 之间的随机数，正态分布的反函数是 NORMSINV。因此由标准正态分布中取样的指令是 NORMSINV(RAND( ))。表 13-1 显示了由这种方法来产生的股票价格的路径。股票价格的初始值为 20 美元。在第一段时间内，从 $\phi(0, 1)$ 中抽取的随机数为 0.52，由式(13-10)得出股票价格变化为

$$\Delta S = 0.002\,88 \times 100 + 0.041\,6 \times 100 \times 0.52 = 2.45$$

表 13-1　当 μ = 0.15，σ = 0.30 以及时间长度为 1 周时股票价格的模拟值

每个时间段开始时的股票价格	对于 ε 的随机抽样	每个时间段的股票价格变动	每个时间段开始时的股票价格	对于 ε 的随机抽样	每个时间段的股票价格变动
100.00	0.52	2.45	106.06	0.21	1.23
102.45	1.44	6.43	107.30	−1.10	−4.60
108.88	−0.86	−3.58	102.69	0.73	3.41
105.30	1.46	6.70	106.11	1.16	5.43
112.00	−0.69	−2.89	111.54	2.56	12.20
109.11	−0.74	−3.04			

因此在第二段时间开始时，股票价格为 102.45 美元。在第二段时间内，ε 的随机抽样为 0.52。由式(13-10)得出在第二段时间股票价格变化为

$$\Delta S = 0.002\,88 \times 102.45 + 0.041\,6 \times 102.45 \times 1.44 = 6.43$$

因此，在下一段时间开始时，股票价格为 108.88 美元，等等。注意，由于我们抽样的过程为马尔科夫过程，因此每一步对 ε 的抽样必须相互独立[⊖]。

表 13-1 假定股票价格精确到 0.001，我们应该认识到该表只表示了股票价格运动的一种可能方式。不同的随机抽样会产生不同的价格运动。在模拟中，我们可以采用任意小的时间步长 Δt。在 $\Delta t \to 0$ 的极限状态，可以取得对于布朗运动的完美描述。在表 13-1 中，股票的最终价格为 111.54 美元，该价格可以看做在 10 周后股票价格的随机抽样值。反复进行如表 13-1 所示的模拟，我们可以得出在这段时间后股票价格的一个完整的概率分布。在第 20 章中，我们将进一步详细描述蒙特卡罗模拟。

13.4 参数

本章讨论的描述股票价格的过程涉及两个参数：μ 和 σ。参数 μ 为投资者在很短一段时间内获取的收益率期望值(按年计)。大多数投资者在承担更大风险时会要求更高的预期收益，因此 μ 依赖于股票收益的风险[⊜]，μ 的取值应该与经济体系中的利率水平有关，利率水平越高，投资者对给定的股票的任给预期收益也会越高。

幸运的是，我们自身并不需要关心计算 μ 的细节，因为与股票有关的衍生产品的价格一般与 μ 无关。与之相反，对于确定与股票价格有关的衍生产品价格来讲，股票价格的波动率 σ 至关重要。我们在第 14 章将讨论估计 σ 的方法。典型的股票价格通常介于 0.15 ~ 0.60(即 15% ~ 60%)之间。

⊖ 在实际中，我们应对 ln S 进行抽样，而不是对 S 进行抽样，这样效率会更高，我们将在 20.6 节讨论这一做法。

⊜ 更准确地讲，μ 取决于投资者不能通过分散化来消除的那部分风险。

在一个较短时段 Δt 后，股票价格百分比变化的标准差为 $\sigma\sqrt{\Delta t}$。作为一个粗略估计，在一个较长时段 T 后，股票价格百分比变化的标准差为 $\sigma\sqrt{T}$。这意味着，作为近似估计，波动率可以被解释为股票 1 年价格变化的标准差。在第 14 章，我们将要说明，股票价格的波动率确实等于以连续复利为计量的股票价格收益率的标准差。

13.5 相关过程

到目前为止，我们考虑的是如何表示单变量的随机过程，现在将这些分析推广到两个或更多个相关变量的随机过程的情形。假设两个过程 x_1 和 x_2 分别服从以下随机过程：

$$dx_1 = a_1 dt + b_1 dz_1 \quad 和 \quad dx_2 = a_2 dt + b_2 dz_2$$

其中 z_1 和 z_2 为维纳过程。

如前面所述，这些过程的离散形式是

$$\Delta x_1 = a_1 \Delta t + b_1 \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t} \quad 和 \quad \Delta x_2 = a_2 \Delta t + b_2 \varepsilon_2 \sqrt{\Delta t}$$

其中 ε_1 和 ε_2 是标准正态分布 $\phi(0, 1)$ 的样本。

对变量 x_1 和 x_2，我们可以像在 13.3 节所讲的那样进行抽样。如果它们之间没有相关性，用来描述在一段时间 Δt 内变动的 ε_1 和 ε_2 应当是相互独立的。

如果变量 x_1 和 x_2 之间有非零的相关系数 ρ，这时用来描述在一段时间 Δt 内变动的 ε_1 和 ε_2 应当是二元正态分布的样本，其中每个变量都服从标准正态分布，而且两个变量之间的相关系数为 ρ。在这种情形下，我们称维纳过程 dz_1 与 dz_2 具有相关系数 ρ。

在 Excel 表中对互不相关的标准正态变量取样时，需要将“ = NORMINV(RAND)”应用在每个单元里。当对具有相关系数 ρ 的标准正态变量 ε_1 和 ε_2 取样时，可以令

$$\varepsilon_1 = u \quad 和 \quad \varepsilon_2 = \rho u + \sqrt{1-\rho^2}\, v$$

其中 u 和 v 是按互不相关的标准正态分布提取的样本。

应当指明的是，对于变量 x_1 和 x_2，我们在上面假定参数 a_1，a_2，b_1，b_2 可以是 x_1，x_2 和 t 的函数。所以 a_1，b_1 既可以是 x_1 和 t 的函数，也可以是 x_2 的函数，而 a_2，b_2 既可以是 x_2 和 t 的函数，也可以是 x_1 的函数。

这里的结论可以推广。当 3 个变量服从相关的随机过程时，我们需要抽取 3 个不同 ε 的样本，这些变量服从三元标准正态分布。当有 n 个相关的随机变量时，需要从相应的多元正态分布中提取 n 个不同的 ε 样本，具体做法将在第 20 章讨论。

13.6 伊藤引理

衍生产品的价格是标的股票价格和时间的函数。更一般地讲，任意一种衍生产品的价格都是这些标的衍生产品随机变量和时间的函数。任何一个认真想学习衍生产品定价的学生都应该对随机变量函数的性质有所了解。该领域中的一个重要结论由数学家 K. Ito 于 1951 年发现的，这一结论被称为**伊藤引理**(Itô's lemma)[⊖]。

假设变量 x 的值服从以下伊藤过程

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{13-11}$$

其中 dz 是一个维纳过程，a 和 b 为 x 和 t 的函数。变量 $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$ 的漂移率为 a，方差率为 b^2。伊藤引理说明 x 和 t 的函数 G 遵循以下过程

⊖ 见 K. Itô, "On Stochastic Differential Equations," *Memoirs of the American Mathematical Society*, 4(1951): 1-51。

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b\,dz \tag{13-12}$$

式中 dz 是与式(13-11)同样的维纳过程。因此，G 也遵循伊藤过程，其漂移率为

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

方差率为

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$$

关于伊藤引理的严格证明已经超出了本书的范围。在附录 13A 中，我们将说明这个引理可视为微积分中一个著名结论的延伸。

在本章前面的部分，我们得出

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{13-13}$$

这是一个关于股票价格变化的合理模型，其中 μ 和 σ 为常数。由伊藤引理，S 和 t 的函数 G 遵循以下过程：

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz \tag{13-14}$$

注意，S 和 G 都受同一个标的不确定性来源 dz 的影响。在推导布莱克-斯科尔斯-默顿公式时，这一点很重要。

应用于远期合约

为了说明伊藤引理，我们考虑关于某无股息股票上的远期合约。假定无风险利率为常数，对于所有期限利率均等于 r。由式(5-1)，我们得出

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

其中 F_0 为 0 时刻的远期价格，S_0 为即期价格，T 为远期合约的期限。

我们现在推导远期价格随时间如何变化。定义 F 为 t 时刻的远期价格，S 为 t 时刻的股票价格，其中 $t < T$。F 和 S 满足

$$F = Se^{r(T-t)} \tag{13-15}$$

假设 S 服从式(13-13)定义的随机过程，我们可以应用伊藤引理确定 F 所服从的随机过程。由式(13-15)，我们得出

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -rSe^{r(T-t)}$$

根据式(13-14)，我们得出 F 服从的随机过程为

$$dF = [e^{r(T-t)}\mu S - rSe^{r(T-t)}]dt + e^{r(T-t)}\sigma S dz$$

将 $F = Se^{r(T-t)}$ 代入方程，上式变为

$$dF = (\mu - r)F dt + \sigma F dz \tag{13-16}$$

与 S 一样，远期价格 S 也遵循几何布朗运动，其增长率期望为 $\mu - r$ 而不是 r。期货价格的增长率等于股票漂移率超出无风险利率的超额部分。

13.7 对数正态分布的性质

接下来，我们采用伊藤引理来推导当 S 服从式(13-13)时，$\ln S$ 所服从的随机过程。我们定义

$$G = \ln S$$

因为

$$\frac{\partial G}{\partial S}=\frac{1}{S},\quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2}=-\frac{1}{S^2},\quad \frac{\partial G}{\partial t}=0$$

由式(15-14)得出，G 满足

$$\mathrm{d}G=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{13-17}$$

因为 μ 和 σ 为常数，以上方程说明 G 满足一个广义维纳过程，其漂移率为常数 $\mu-\frac{\sigma^2}{2}$，波动率为常数 σ^2。因此，$\ln S$ 在 0 时刻与 T 时刻的变化服从正态分布，其期望值为 $(\mu-\sigma^2/2)$，方差为 $\sigma^2 T$。这意味着

$$\ln S_T-\ln S_0\sim\phi\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T,\sigma^2 T\right] \tag{13-18}$$

或者

$$\ln S_T\sim\phi\left[\ln S_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T,\sigma^2 T\right] \tag{13-19}$$

式中，S_T 为股票在 T 时刻的价格，S_0 为股票在 0 时刻的价格，$\phi(m,\ v)$ 代表期望值为 m、方差为 v 的正态分布。

式(13-19)说明 $\ln S_T$ 服从正态分布。如果一个变量的对数服从正态分布，该变量被称为满足对数正态分布(lognormal distribution)。本章所建立的关于股票价格的模型意味着，在给定今天股票价格的前提下，股票在 T 时刻的价格满足对数正态分布。股票价格对数的标准差为 $\sigma\sqrt{T}$，这一标准差与时间的展望期长度的平方根成正比。

小　结

随机过程描述了变量值随时间变化的概率分布在马尔科夫过程中，只有当前值与将来的预测值有关。变量的历史以及价格如何由过去演变到当前值与将来无关。

一个维纳过程 dz 是一个描述正态分布变量变化的过程。该过程的漂移率为 0，方差率为 1.0。这意味着，如果变量在 0 时刻的初始值为 x_0，那么该变量在 T 时刻服从期望值为 x_0、标准差为$\sqrt{T}$的正态分布。

广义维纳过程描述了在单位时间漂移为 a、方差为 b^2 的正态分布的变量的变化过程，其中 a 和 b 为常数。这意味着，如果变量在 0 时刻的初始值为 x_0，那么该变量在 T 时刻服从期望值为 x_0+aT，标准差为 $b\sqrt{T}$的正态分布。

变量 x 满足伊藤过程是指其漂移率和方差率均为 x 本身和时间 t 的函数。在一个较短的时间段内，x 的变化近似地服从正态分布，但在一个较长的时间段以后，x 变化的概率分布往往是非正态的。

一种直观地理解随机过程的方式是对变量的行为进行模拟，模拟的方法是将时间分成若干小的区间，然后再对变量的可能路径进行抽样，这样做以后我们可以产生变量将来时间上的概率分布。在第 20 章，我们将进一步讨论蒙特卡罗模拟方法。

伊藤引理是一种由变量本身所遵循的随机过程来计算该变量的函数所遵循的随机过程的方式。在第 14 章我们将要看到，伊藤引理在衍生产品定价领域非常重要。该引理的关键出发点在于原始变量的随机过程的维纳过程完全等价于变量的函数的随机过程中的维纳过程，即两个随机过程的不定性的来源相同。

通常假设描述股票价格的随机过程为几何布朗运动。在这一过程中，在任意小的时间段内，股票持有者收益大致服从正态分布，而且在任意两个不相邻的区间段的收益相互无关。股票价格在将来的概率分布为对数正态分布。我们在第 14 章考虑的布莱克-斯科尔斯-默顿模型就是建立在几何布朗运动的假设之上。

推荐阅读

On Efficient Markets and the Markov Property of Stock Prices

Brealey, R. A. *An Introduction to Risk and Return from Common Stock*, 2nd edn. Cambridge, MA: MIT Press, 1986.

Cootner, P. H. (ed.) *The Random Character of Stock Market Prices*. Cambridge, MA: MIT Press, 1964.

On Stochastic Processes

Cox, D. R., and H. D. Miller. *The Theory of Stochastic Processes*. London: Chapman & Hall, 1977.

Feller, W. *Introduction to Probability Theory and Its Applications*. New York: Wiley, 1968.

Karlin, S., and H. M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd edn. New York: Academic Press, 1975.

Neftci, S. *Introduction to Mathematics of Financial Derivatives*, 2nd edn. New York: Academic Press, 2000.

Shreve, S. E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. New York: Springer, 2004.

练习题

13.1 我们如果说一个地区的温度服从马尔科夫过程，其含义是什么？你认为温度确实可以服从马尔科夫过程吗？

13.2 基于股票价格的历史数据，交易准则的收益是否总是可以高于平均收益？讨论这一问题。

13.3 假定一家公司的现金头寸用百万美元来计量，并服从广义维纳过程，现金头寸的漂移率为 1.5，方差率每季度为 4.0。公司必须初始现金头寸要多高才能使得公司在 1 年后的现金流为负值的概率小于 5%。

13.4 变量 X_1 和 X_2 服从广义维纳过程，漂移率分别为 μ_1 和 μ_2，方差率分别为 σ_1^2 和 σ_2^2。在以下条件下，X_1+X_2 服从什么样的过程？

(a) X_1 和 X_2 在任意小的时间区间内的变化相互无关。

(b) X_1 和 X_2 在任意小的时间区间内的变化的相关系数为 ρ。

13.5 考虑变量 S 服从以下过程

$$dS = \mu dt + \sigma dz$$

在最初的 3 年中，$\mu=2$，$\sigma=3$；在接下来的 3 年中，$\mu=3$，$\sigma=4$。如果变量的初始值为 5，变量在第 6 年末的概率分布是什么？

13.6 假设 G 为股票价格 S 和时间的函数，σ_S 和 σ_G 分别为 S 和 G 的波动率。求证：当 S 的收益期望增加 $\lambda\sigma_S$ 时，G 的收益期望也会增加 $\lambda\sigma_S$。这里的 λ 为常数。

13.7 股票 A 和股票 B 均服从几何布朗运动，并且在任何短时段内两者的变化相互无关。由股票 A 和股票 B 所构成的证券组合的价值是否服从几何布朗运动？解释原因。

13.8 式(13-8)的股票价格过程可写为

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

其中 μ 和 σ 为常数。仔细解释以上模型与以下列举的模型之间的差别：

$$\Delta S = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta S = \mu\Delta t + \sigma S\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

为什么式(13-8)中的模型比以上 3 种模型更适合用来描述合股票价格的变化？

13.9 短期利率 r 服从以下随机过程

$$dr = a(b-r)dt + rcdz$$

其中 a，b，c 为正常数，dz 为维纳过程。描述这一过程的特性。

13.10 假定股票价格 S 服从几何布朗运动

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz$$

变量 S^n 服从什么过程？求证 S^n 也服从几何布朗运动。

13.11 假定 x 为在 T 时刻支付 1 美元的无券息债券的收益率，以连续复利为计量。假定 x 服从以下随机过程

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz$$

其中 a，x_0 和 c 为正常数，dz 为维纳过程。无券息债券价格服从什么过程？

13.12 某股票的价格是 30 美元，收益率期望是9%，波动率是20%。在 Excel 计算表中模拟在5年内价格的路径，步长取为1个月，并且从正态分布中取样。以图形来表示股票价格的路径。点击 F9，观察当随机样本，变化时路径的变化。

作业题

13.13 假定股票的预期收益率为每年 16%，波动率为每年 30%。当股票价格在某一天末的价格为50美元时，计算

(a) 股票价格在第二天的期望值。

(b) 股票价格在第二天的标准差。

(c) 第二天股票价格95%的置信区间。

13.14 假定一家公司的现金头寸用百万来计量，并服从广义维纳过程，现金头寸的漂移率为每月0.1，方差率为每月2.0。

(a) 现金头寸在1个月、6个月以及1年时的概率分布是什么？

(b) 现金头寸在6个月和1年时有负的现金头寸的概率为多少？

(c) 在将来什么时刻公司具有负的现金头寸的概率为最大？

13.15 假定 x 为永久性债券的收益率，债券每年发放1美元的利息，假定以连续复利为计量，并且券息也是连续支付，假定 x 服从以下随机过程

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz$$

其中 a, x_0 和 c 为正常数，dz 为维纳过程。债券价格服从的过程是什么？对于债券持有者而言，瞬时收益率期望(包括利息和资本收益)为多少？

13.16 假定股票价格 S 服从几何布朗运动

$$\frac{dS}{S} = \mu S dt + \sigma S dz$$

以下变量都服从什么样的过程？

(a) $y = 2S$

(b) $y = S^2$

(c) $y = e^S$

(d) $y = e^{r(T-t)}/S$

对于每种情形，将 dt 和 dz 系数来用 y 而不是用 S 表达。

13.17 假定股票的当前价格为50，其收益率期望和波动率分别为每年12%和每年30%。股票价格在2年后高于80美元的概率为多少？(提示：当 $\ln S_T > \ln 80$ 时，$S_T > 80$。)

13.18 股票A的价格是30美元，收益率期望为11%，波动率为25%。股票B的价格是40美元，收益率期望为15%，波动率为30%。描述两只股票收益率的过程具有相关系数 ρ。在 Excel 计算表中模拟两只股票在3个月内价格变化的路径，步长取1天，并且从正态分布取样。将结果画图，并点击 F9 键，观察当随机样本变化时，路径是如何变化的。考虑 ρ 等于 0.25、0.75 和 0.95 时的情形。

附录13A

伊藤引理的推导

在本附录中，我们将说明如何将伊藤引理可看做是一些简单结论的推广。考虑一个连续并且对于 x 可导的函数 G。如果 x 变化为 Δx，相应 G 变化为 ΔG，由微积分的一个著名结论出发，我们得出

$$\Delta G \approx \frac{dG}{dx}\Delta x \tag{13A-1}$$

换句话讲，ΔG 大约等于 G 对 x 的导数乘以 Δx。误差项包括高阶项 Δx^2。如果需要更精确的表达式，我们可以运用 ΔG 的泰勒展开式

$$\Delta G = \frac{dG}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2G}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3G}{dx^3}\Delta x^3 + \cdots$$

如果连续可导函数 G 有两个变量 x 和 y，那么与式(13A-1)类似的结果为

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y \tag{13A-2}$$

相应的泰勒展开式为

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\Delta y^2 + \cdots \tag{13A-3}$$

当 Δx 和 Δy 趋于 0 时，式(13A-3)变为

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy \tag{13A-4}$$

我们现在将式(13A-4)推广到伊藤过程的情形。假定变量 x 满足广义伊藤过程

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{13A-5}$$

G 是 x 和 t 的某种函数。与式(13A-3)类比，我们可以得出

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \cdots \tag{13A-6}$$

将式(13A-5)离散化，得出

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

忽略函数的变量时，以上公式可被简化为

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{13A-7}$$

该式揭示了式(13A-6)与式(13A-3)之间存在一个重要差异。当对式(13A-3)取极限而使得其被转换为(13A-4)时，由于 Δx^2 项是2阶高阶项，我们可以忽略这一项。由式(13A-7)出发，我们得出

$$\Delta x^2 = b^2\varepsilon^2\Delta t + \Delta t \text{ 的高阶项} \tag{13A-8}$$

式(13A-8)说明式(13A-6)中的 Δx^2 项包含 Δt 项，而这一项不可忽略。

标准正态分布的方差为1.0。这意味着

$$E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$$

其中 E 表示期望值。由于 $E(\varepsilon)=0$，因此 $E(\varepsilon^2)=1$，从而 $\varepsilon^2\Delta t$ 的期望值为 Δt。由标准正态分布的性质可知，$\varepsilon^2\Delta t$ 的方差为 $2\Delta t^2$。我们知道随机变量在时间 Δt 内的方差与 Δt(而不是 Δt^2)成正比。因此，当 Δt 趋于0时，我们可以将 $\varepsilon^2\Delta t$ 视为非随机项，并等于其期望值，因此式(13A-8)中的 Δx^2 在 Δt 趋于0时为非随机项，并等于 b^2dt。对式(13A-6)取极限，并应用以上结果，我们得出

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2dt \tag{13A-9}$$

以上公式就是伊藤引理。将式(13A-5)中的 dx 代入式(13A-9)，我们得出

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b\,dz$$

在网页 www. rotman. utoronto. ca/~hull/TechnicalNotes 中的 Technical Note 29 给出了有关伊藤引理推广的证明。当 G 是变量 x_1，x_2，…，x_n 的函数，而且

$$dx_i = a_i dt + b_i dz_i$$

时，我们有

$$dG = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial x_i}a_i + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}b_i b_j \rho_{ij}\right)dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}b_i dz_i \tag{13A-10}$$

当 G 是一个具有多项不确定来源的变量 x 的函数时：

$$dx = a\,dt + \sum_{i=1}^{m}b_i dz_i$$

我们有

$$dG = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}b_i b_j \rho_{ij}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sum_{i=1}^{m}b_i dz_i \tag{13A-11}$$

在这些式子中，ρ_{ij} 是 dz_i 与 dz_j 之间的相关系数(参见13.5节)。



第 14 章 布莱克-斯科尔斯-默顿模型

20 世纪 70 年代初，费希尔·布莱克(Fisher Black)，迈伦·斯科尔斯(Myron Scholes)和罗伯特·默顿(Robert Merton)在期权定价领域内取得了重大突破⊖，他们发展了被称为“布莱克-斯科尔斯”(Black-Scholes)或“布莱克-斯科尔斯-默顿”(Black-Scholes-Merton)的模型。该模型对于交易员如何对期权定价与对冲都产生了重大影响。在 1997 年，迈伦·斯科尔斯及罗伯特·默顿荣获诺贝尔经济学奖，这充分说明了这一模型的重要性。不幸的是费希尔·布莱克在 1995 年去世，否则，毫无疑问，他也会成为诺贝尔奖的得主之一。

布莱克、斯科尔斯和默顿是如何取得突破的呢？在他们之前，研究人员也做了类似的假设，并且正确地计算了欧式期权的收益期望，但是如 12.2 节所述，选取正确的贴现率很困难。布莱克和斯科尔斯利用资本资产定价模型(见第 3 章附录)确定了市场对期权所要求的回报与对股票所要求的回报之间的关系。困难之处在于，这种关系既依赖于股票价格又依赖于时间。默顿的处理方式与布莱克和斯科尔斯不同，他的方法涉及到由期权与股票组成的无风险组合，因而在一个很短的时间区间内，组合的回报率必须是无风险利率。这与我们在 12.1 节的介绍类似，但是更为复杂，因为股票的价格随时间连续变化。默顿的方法比布莱克和斯科尔斯更为一般，因为他的方法不依赖于资本资产定价模型的假设。

本章将按默顿的方法推导布莱克-斯科尔斯-默顿模型，并且解释如何从历史数据估计或由期权价格中反推出波动率。本章还将说明如何使用在第 12 章引进的风险中性定价方法，以及如何推广布莱克-斯科尔斯-默顿模型为支付股息的股票期权(包括美式期权)的定价。

14.1 股票价格的对数正态分布性质

布莱克、斯科尔斯和默顿用来描述股票价格行为的模型正是我们在第 13 章中建立的模型。该模型假设无股息股票在一短时间区间内的百分比变化是正态分布。定义

μ：股票每年的收益率期望；

σ：股票价格每年的波动率。

在 Δt 时间段股票收益的均值是 $\mu\Delta t$，股票收益的标准差为 $\sigma\sqrt{\Delta t}$。因此

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t) \tag{14-1}$$

⊖ 见 F. Black and M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81 (May/June 1973): 637-659; 及 R. C. Merton, “Theory of Rational Option Pricing,” *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(Spring 1973): 141-183。

其中 ΔS 为股票价格在 Δt 时间区间内的变化，$\phi(m, v)$ 代表期望为 m、方差为 v 的正态分布（即式(13-9)）。

在 13.7 节中我们曾证明模型意味着

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right]$$

由此可以得出

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \tag{14-2}$$

和

$$\ln S_T \sim \phi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \tag{14-3}$$

式中，S_T 是在未来 T 时刻的价格，S_0 是在 0 时刻的价格。式(14-3)说明 $\ln S_T$ 服从正态分布，所以 S_T 具有对数正态分布。$\ln S_T$ 的均值是 $\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)T$，标准差是 $\sigma\sqrt{T}$。

【例 14-1】 考虑一只初始价格为 40 美元的股票，该股票的收益率期望为每年 16%，波动率为每年 20%。由式(14-3)我们知道，股票价格 S_T 在 6 个月时的概率分布是

$$\ln S_T \sim \phi[\ln 40 + (0.16 - 0.2^2/2) \times 0.5, 0.2^2 \times 0.5]$$

$$\ln S_T \sim \phi(3.759, 0.02)$$

一个服从正态分布的变量取值落在与均值的距离小于 1.96 倍标准差范围内的概率为 95%。这时，标准差为 $\sqrt{0.02} = 0.141$，因此在 95% 的置信度下，我们有

$$3.759 - 1.96 \times 0.141 < \ln S_T < 3.759 + 1.96 \times 0.141$$

这可以写成

$$e^{3.759 - 1.96 \times 0.141} < S_T < e^{3.759 + 1.96 \times 0.141}$$

或

$$32.55 < S_T < 56.56$$

因此，在 6 个月后股票价格介于 32.55 ~ 56.56 美元范围内的概率为 95%。

具有对数正态分布的变量可以取零与无穷大之间的任何值，图 14-1 显示了对数正态分布的形状。与正态分布不同的是，它呈偏态，因此其**均值**(mean)、**中位数**(median)以及**众数**(mode)均不相等。由式(14-3)以及对数正态分布的性质，我们可以证明 S_T 的期望值 $E(S_T)$ 为

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T} \tag{14-4}$$

这与将 μ 定义成收益率期望是一致的。S_T 的方差 $\text{var}(S_T)$ 可以表示为[⊖]

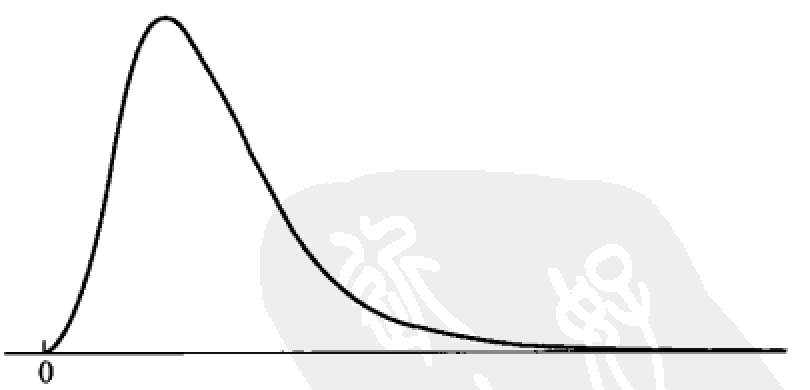


图 14-1　对数正态分布

$$\text{var}(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1) \tag{14-5}$$

【例 14-2】 考虑某股票，其当前价格是 20 美元，期望收益率是每年 20%，波动率为每年 40%。股票在 1 年后价格的期望和方差由下式给出

⊖ 式(14-4)和式(14-5)的证明包括在作者网页上的 Technical Note 2 中。对数正态分布性质更详细的讨论，见 J. Aitchison 和 J. A. C. Brown，*The Lognormal Distribution*. Cambridge University Press，1966.

$$E(S_T) = 20e^{0.2\times 1} = 24.43$$

$$\mathrm{var}(S_T) = 400e^{2\times 0.2\times 1}(e^{0.4^2\times 1} - 1) = 103.54$$

1 年后股票价格的标准差为 $\sqrt{103.54}$，即 10.18。

14.2 收益率的分布

由股票价格服从对数正态分布的性质出发，我们可以得出 0 ~ T 之间以连续复利收益率的概率分布。将 0 与 T 之间以连续复利的收益率计为 x，那么

$$S_T = S_0 e^{xT}$$

$$x = \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0} \tag{14-6}$$

由式(14-2)得出

$$x \sim \phi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right) \tag{14-7}$$

因此，连续复利收益率服从正态分布，其期望值与标准差分别为 $\mu - \sigma^2/2$ 和 $\sigma/\sqrt{T}$。当 T 增大时，x 标准差减小。为了理解这一点，我们可以考虑 $T=1$ 和 $T=20$ 两种情形，我们比较相信 20 年的年平均收益估计比 1 年的年平均收益估计更为准确。

【例 14-3】 考虑某股票，其预期收益率为每年 17%，波动率为每年 20%，在 3 年内实现的平均收益（以连续复利）服从正态分布，均值为

$$0.17 - \frac{0.2^2}{2} = 0.15$$

即每年 15%，标准差为

$$\sqrt{\frac{0.2^2}{3}} = 0.1155$$

即每年 11.55%。因为一个服从正态分布的变量有 95% 的机会会落在与其均值距离小于 1.96 倍标准方差的范围之内，因此我们有 95% 的把握肯定，在今后 3 年内实现的平均收益率将会介于 −7.6%（15% − 1.96 × 11.55%）~ +37.6%（15% + 1.96 × 11.55%）之间。

14.3 预期收益率

投资者从一只股票中所寻求的收益率期望 μ 与股票的风险有关，风险越大，预期收益也会越高。它还依赖于经济中的利率，利率越高，投资者对股票所要求的收益率期望也会越高。幸运的是，我们不需要关心决定 μ 的任何细节。事实上，当利用标的股票价格来表示期权价格时，期权价格与 μ 毫不相关。尽管如此，股票收益率期望的一个性质常常引起混淆，因此我们特别解释这个性质。

式(14-1)表示 $\mu\Delta t$ 是股票在较短时间段 Δt 内价格变化百分比的期望值，由此我们可能会很自然地假设 μ 是股票以连续复利的收益率期望。但事实并非如此。在一段长度为 T 的时间内真正实现的以连续复利的收益 x 是由式(14-6)给出的

$$x = \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}$$

而且由式(14-7)，我们知道期望值 $E(x) = \mu - \sigma^2/2$。

以连续复利计算的收益率期望值不等于 μ 的原因并不是那么一目了然，但都十分重要。假定

我们考虑很多长度为 Δt 的很短的时间区间。定义 S_i 为股票在第 i 个时间区间末的股票价格，ΔS_i 为 $S_{i+1}-S_i$。在我们对股票价格所做的假设下，在每个小区间上股票价格的平均回报率大约为 μ。换句话说，$\mu\Delta t$ 很接近于 $\Delta S_i/S_i$ 的算术平均值。然而，当表示成以区间 Δt 复利时，在所有数据所覆盖的区间上收益的期望接近于 $\mu-\sigma^2/2$，而不是 μ。[⊖]业界事例 14-1 所提供的有关共同基金的数值例子说明了原因。为了以数学的方式解释原因，我们首先由式(14-4)开始：

$$E(S_T)=S_0e^{\mu T}$$

取对数，得出

$$\ln[E(S_T)]=\ln(S_0)+\mu T$$

我们可能会认为 $E[\ln(S_T)]=\ln[E(S_T)]$，并由此得出 $E[\ln(S_T)]-\ln(S_0)=\mu T$，即 $E[\ln(S_T/S_0)]=\mu T$，这也就得出了 $E(x)=\mu$。但是，因为 ln 是非线性对数函数。事实上 $E[\ln(S_T)]>\ln[E(S_T)]$，因此 $E[\ln(S_T/S_0)]<\mu T$，从而 $E(x)<\mu$。（如上所述，$E(x)=\mu-\sigma^2/2$。）

业界事例 14-1　共同基金的收益率可能会令人误解

μ 与 $\mu-\sigma^2/2$ 的不同与共同基金所报告的收益率关系密切。假定某共同基金经理报告的在过去 5 年内的年收益率（以年复利）为 15%，20%，30%，-20% 及 25%。这些收益的算术平均值等于以上 5 个数值的和除以 5，即 14%。但是如果一个投资者将资金投入该基金，并投资 5 年，那么其收益率会小于每年 14%。100 美元的投资在 5 年后的价值为

$100\times1.15\times1.20\times1.30\times0.80\times1.25=$ 179.40 美元

而以年复利 14% 的收益率计算，相应值将为

$$100\times1.14^5=192.54 \text{ 美元}$$

在 5 年后，最终值为 179.40 美元所对应的收益率为 12.4%，这是因为

$$100\times1.124^5=179.40 \text{ 美元}$$

那么，基金经理应该报告哪一个收益率呢？基金经理常常会做出以下声明，“在过去 5 年，我平均每年的收益率为 14%。”虽然这一声明没有错，但它会令人产生误解，而以下声明就不太会使人误解：“投资者在过去 5 年将资金投入我们基金所得收益为每年 12.4%。”在有些地区，监管当局的准则要求基金经理以第 2 种形式报告收益率。

以上现象是数学家所熟悉的一个著名结论：一组数据（不全部相等）的几何平均值总是小于算术平均值。在我们的例子中，收益每年的乘数项为 1.15、1.20、1.30、0.8 和 1.25。这些数字的算术平均值为 1.140，而它们的几何平均值为 1.124。

14.4　波动率

股票的波动率 σ 是用于度量股票所提供收益的不确定性。股票通常具有介于 15% ~60% 之间的波动率。

由式(14-7)可知股票价格的波动率可以被定义为按连续复利时股票在 1 年内所提供收益率的标准差。

当 Δt 很小时，式(14-1)表明 $\sigma^2\Delta t$ 近似地等于在 Δt 时间内股票价格变化百分比的方差，这说明 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 近似地等于在 Δt 时间内股票价格变化百分比的标准差。例如，某股票价格为 50 美元，

⊖ 预期收益的意义不是很明确，它既可以是 μ，也可以是 $\mu-\sigma^2/2$。除非另外说明，本书所指的收益为 μ。

其波动率 $\sigma=0.3$，即每年 30%。对应于每周价格百分比变化的标准差近似地等于

$$30\times\sqrt{\frac{1}{52}}=4.16\%$$

在一周内股票价格有一个标准差的变化为 50×0.0416，即 2.08 美元。

由标准差来描述股票价格变化不确定性的增长速度大约为时间展望期长度的平方根（至少在近似意义下）。例如，股票价格在 4 周内的标准差大约为股票价格在一周内标准差的 2 倍。

14.4.1 由历史数据来估计波动率

为了以实证的方式估计股票价格的波动率，对股票价格的观察通常是在固定的区间内（如每天、每周或每个月）。定义

$n+1$ ——观测次数；

S_i ——第 i 个时间区间结束时变量的价格，$i=0, 1, \cdots, n$；

τ ——时间区间的长度，以年为单位。

令

$$u_i=\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right),\quad i=1,2,\cdots,n$$

u_i 的标准差 s 通常估计为

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$$

或

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2-\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2}$$

其中 $\bar{u}$ 为 u_i 的均值。[⊖]

由式(14-2)我们知道 u_i 的标准差为 $\sigma\sqrt{\tau}$。因此，变量 s 是 $\sigma\sqrt{\tau}$ 的估计值。所以 σ 本身可以被估计为 $\hat{\sigma}$，其中

$$\hat{\sigma}=\frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

可以证明以上估计式的标准误差大约为 $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$。

在计算中选择一个合适的 n 值并不很容易。一般来讲，数据越多，估计的精确度也会越高，但 σ 确实随时间变化，因此过老的历史数据对于预测将来波动率可能不太相干。一个折中的办法是采用最近90～180 天内每天的收盘价数据。另外一种约定成俗的方法是将 n 设定为波动率所用的天数。因此，如果波动率是用于计算两年期的期权，在计算中我们可以采用最近两年的日收益数据。估计波动率比较复杂的方法涉及 GARCH 模型，在第 22 章中我们将对此进行讨论。

【例 14-4】 表 14-1 给出了在 21 个连续交易日的股票价格序列。这时 $n=20$。

$$\sum_{i=1}^{n}u_i=0.09531 \quad 及 \quad \sum_{i=1}^{n}u_i^2=0.00326$$

日收益率标准差的估计值为

$$\sqrt{\frac{0.00326}{19}-\frac{0.09531^2}{20\times19}}=0.01216$$

即 1.216%。假设每年有 252 个交易日，$\tau=1/252$，以上数据给出的波动率的估计值为每年

⊖ 当利用历史数据估计波动率时，常常将 $\bar{u}$ 假设为 0。

$0.01216\sqrt{252}=0.193$，即 19.3%。波动率每年标准差为

$$\frac{0.193}{\sqrt{2\times 20}}=0.031$$

即每年 3.1%。

表 14-1　波动率计算

天数	收盘价（美元）	价格比率（S_i/S_{i-1}）	日收益 $u_i=\ln(S_i/S_{i-1})$	天数	收盘价（美元）	价格比率（S_i/S_{i-1}）	日收益 $u_i=\ln(S_i/S_{i-1})$
0	20.00			11	21.00	1.012 05	0.011 98
1	20.10	1.005 00	0.004 99	12	21.10	1.004 76	0.004 75
2	19.90	0.990 05	−0.010 00	13	20.90	0.990 52	−0.009 52
3	20.00	1.005 03	0.005 01	14	20.90	1.000 00	0.000 00
4	20.50	1.025 00	0.024 69	15	21.25	1.016 75	0.016 61
5	20.25	0.987 80	−0.012 27	16	21.40	1.007 06	0.007 03
6	20.90	1.032 10	0.031 59	17	21.40	1.000 00	0.000 00
7	20.90	1.000 00	0.000 00	18	21.25	0.992 99	−0.007 03
8	20.90	1.000 00	0.000 00	19	21.75	1.023 53	0.023 26
9	20.75	0.992 82	−0.007 20	20	22.00	1.011 49	0.011 43
10	20.75	1.000 00	0.000 00				

在以上的分析中假定股票不付股息，但这里的分析同样也适用于支付股息的股票。对应于一个包含除息日在内的时间区间，股票的收益率被定义为

$$u_i=\ln\frac{S_i+D}{S_{i-1}}$$

其中 D 为股息的数量，在其他时间区间内，股票的收益率仍被定义为

$$u_i=\ln\frac{S_i}{S_{i-1}}$$

但是，由于税收因素会对收益率在除息日附近的计算起一定的作用，所以当我们利用每天或每周的数据计算时，也许去掉包含除息日在内的时间区间里的数据是最好的做法。

14.4.2　交易日天数与日历天数

在计算与使用波动率参数时，一个很重要的问题是我们究竟是应该采用日历天数还是应该采用交易日天数来度量时间。如业界事例 14-2 所示，研究结果表明交易所开盘交易时的波动率比关闭时的波动率要高很多。因此，在由历史数据来计算波动率以及计算期权期限时，市场参与者往往会去掉交易所休市的日期。由以下公式我们可以从每交易日的波动率来计算每年的波动率

$$\text{年波动率}=\text{每交易日的波动率}\times\sqrt{\text{每年的交易日天数}}$$

这也正是在例 14-4 中利用表 14-1 的数据来计算波动率时采用的公式。对于股票，我们通常假设每年的交易日天数为 252 天。

期权期限通常也是由交易日天数而不是由日历天数来度量，结果用 T 年来表示，其中

$$T=\frac{\text{距期权到期日的天数}}{252}$$

业界事例 14-2 什么引起波动率

我们很自然地假设市场波动是由刚刚到达市场的新消息所引起的。这些新消息会使投资者改变对股票价值的观点，引起股票价格变化，从而产生市场波动。但是这种观点并未得到研究结果的验证。

应用连续几年中每天的股票数据，研究人员可以计算：

- 在中间不包含非交易日时，一个交易日结束时与下一个交易日结束时股票价格收益率的方差。
- 在周五结束时与下周一交易结束时股票价格收益率的方差。

第 2 项方差为 3 天收益率的方差。第 1 项方差对应于一天。我们也许很自然地认为第 2 项方差为第 1 项方差的三倍。Fama (1965)、French(1980) 以及 French 和 Roll(1980) 的论证证明事实并非如此。三项研究结果所估计的第 2 项方差只分别比第 1 项方差高 22%、19% 以及 10.7%。

这时，你也许会说这些结果的起因是由于在交易开盘时有更多信息，但是 Roll (1984) 的研究结果并不支持这一观点，Roll 检测了橙汁期货的价格：对于橙汁期货价格而言，最重要的决定因素是气候，而有关气候的信息对于任何时间都有同样的可能性，当 Roll 做了一个类似我们刚刚描述的有关股票的分析时，他发现第 2 项（星期五至星期一）方差只是第 1 项的 1.54 倍。

唯一合理的结论就是很大程度上波动率是由交易本身引起的(交易员一般并不认为这一结论难以接受)。

14.5 布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程的概念

布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程是每一个依赖于无股息股票的衍生产品价格必须满足的方程式。我们将在下一节推导这个方程，在这里我们考虑布莱克-斯科尔斯-默顿方法的本质。

这种方法与第 12 章中利用二叉树来描述股票价格时的无套利方法类似。在定价的过程中需要构造一个由期权与标的股票所组成的无风险交易组合，在无套利的条件下，这一交易组合的收益率必须为无风险利率 r，由此我们可以得出期权价格必须满足的微分方程。

我们之所以可以建立无风险交易组合，是因为股票价格与期权价格均受同一种不定性的影响，即股票价格的变动。在任意一段短时期内，衍生产品的价格与股票价格完全相关；在建立了一个适当的股票与期权的组合后，由股票所带来的盈亏总是可以抵消由期权所带来的盈亏。这样一来，交易组合在一个短时间内的价格变化也就是确定的。

例如，假定某时刻股票价格一个微小变动 ΔS 与由此所引起的欧式看涨期权价格变动 Δc 之间有以下关系

$$\Delta c = 0.4\Delta S$$

这意味着代表 Δc 与 ΔS 之间关系的切线斜率为 0.4，如图 14-2 所示。无风险交易组合构造如下：

- 0.4 股股票的长头寸；
- 一个看涨期权的短头寸。

假定股票价格上涨了 10 美分，期权价格将增长 4 美分。交易组合中股票的增长为 $0.4 \times 10 = 4$ 美分，这恰好等于期权短期头寸

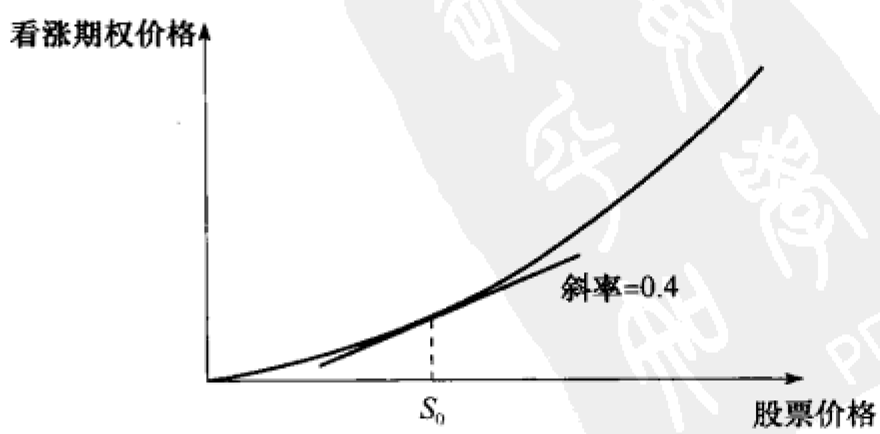


图 14-2 看涨期权与股票价格的关系

注：当前股票价格是 S_0。

4 美分的损失。

这里的分析过程与第 12 章的二叉树法有一个很重要的差别。这里所建立的头寸只是在一个非常短的时间内是无风险的(理论上讲，这种无风险只是在瞬时间成立)。为了保持无风险状态，交易组合必须频繁地进行调整或**再平衡**(rebalance)[⊖]。例如，Δc 与 ΔS 之间的关系也许会从今天的 $\Delta c = 0.4\Delta S$ 变为两周后的 $\Delta c = 0.5\Delta S$。如果这种情况发生，为了保持交易组合为无风险形态，对卖出的每个看涨期权，我们必须再买入 0.1 股股票。尽管如此，在短时间内无风险交易组合的收益率必须等于无风险利率。这是布莱克-斯科尔斯-默顿分析并推导其定价公式的关键。

假设

在推导布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程时，我们采用以下假设。

- 股票价格服从在第 13 章中所建立的过程，其中 μ 和 σ 为常数；
- 可以卖空证券，并且可以完全使用所得收入；
- 无交易费用和税收，所有证券均可无限分割；
- 在期权期限内，股票不支付股息；
- 不存在无风险套利机会；
- 证券交易为连续进行；
- 短期无风险利率 r 为常数，并对所有期限都是相同的。

我们将在后面的章节中讨论如何放松其中的一些假设。例如，σ 和 r 可以是已知的时间函数。只要股票价格在期权到期时的分布是对数正态，我们甚至可以让 r 也是随机的。

14.6 布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程的推导

本节的符号与其他地方不一样，我们考虑衍生产品在一般时间 t(不是时间 0)时的价格。如果 T 是到期日，那么期权的期限是 $T-t$。

我们假设对股票价格服从 13.3 节所建立的过程，即

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{14-8}$$

假定 f 为关于 S 的看涨期权，或其他依赖于 S 的衍生产品价格。变量 f 必须是 S 和 t 的函数。因此，由式(13-14)得出

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \tag{14-9}$$

式(14-8)和式(14-9)的离散形式为

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \tag{14-10}$$

和

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \tag{14-11}$$

式中 ΔS 与 Δf 为 S 与 f 在一个短时间区间 Δt 内的变化量。回忆在 13.6 节有关伊藤引理的讨论，f 和 S 中的维纳过程是一样的。换句话讲，式(14-10)和式(14-11)中的 $\Delta z(=\varepsilon\sqrt{\Delta t})$ 项是一样的。因此，我们可以选择适当的股票及衍生产品期权组合来消除维纳过程。

适当的股票及期权证券组合为：

-1 ——衍生产品；

$+\frac{\partial f}{\partial S}$ ——股票。

⊖ 我们在第 18 章将讨论再平衡的更多细节。

以上证券组合含有一个衍生证券的短头寸，及 $\partial f/\partial S$ 数量的股票。定义 Π 为证券组合的价值，由定义

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \tag{14-12}$$

证券组合的价格在 Δt 时间区间内的变化由下式给出：

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \tag{14-13}$$

将式(14-10)和式(14-11)代入式(14-13)，得出

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \tag{14-14}$$

因为式(14-14)的右端不含 Δz 项，证券组合在 Δt 时间内一定是无风险的。前面列举的假设意味着该证券组合必须获取与其他短期无风险证券相同的瞬时收益率。如果该组合获取的收益率比这个收益率高，套利者可以通过借入资金来买入组合而取得无风险盈利；如果比这个收益率低，套利者可以卖空组合并同时买入无风险投资证券来取得无风险盈利。因此，

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \tag{14-15}$$

式中 r 为无风险利率。将式(14-12)和式(14-14)代入式(14-15)，得出

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{14-16}$$

式(14-16)就是布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程。对应于不同的衍生产品，式(14-16)有不同的并以 S 为标的变量的解。对于某一特定衍生产品，式(14-16)的解与该式的**边界条件**(boundary conditions)有关，边界条件定义了衍生产品在 S 和 t 的边界上的取值。欧式看涨期权的关键边界条件为

$$f = \max(S-K,0) \quad \text{当 } t = T \text{ 时}$$

欧式看跌期权的关键边界条件为

$$f = \max(K-S,0) \quad \text{当 } t = T \text{ 时}$$

有一点应该强调，用于导出式(14-16)的证券组合并不永远是无风险的，它只是在一个无穷小的时间区间内为无风险。当 S 和 t 有所变化时，$\partial f/\partial S$ 也会随之产生变化。为了保证证券组合无风险，我们要经常对证券组合中的衍生产品和股票的比例做出调整。

【例 14-5】 无股息股票的远期合约是一种依赖于该股票的衍生产品，因此，其价格应满足式(14-16)。由式(5-5)得出，在 t 时刻的远期合约价值与股票价格 S 之间关系满足

$$f = S - Ke^{-r(T-t)}$$

式中 K 为支付价格。这意味着

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0$$

将上式代入式(14-16)的左端，得出

$$-rKe^{-r(T-t)} + rS$$

这正好等于 rf。因此，对于远期合约，式(14-16)确实成立。

可交易衍生产品的价格

任何满足式(14-16)的函数 $f(S,\ t)$ 均可以作为某种**可交易衍生产品**(tradable derivative)的理

论价格。如果以函数$f(S,\ t)$为价格的衍生产品确实存在，这个价格将不会造成任何套利机会。反之，如果函数$f(S,\ t)$不满足式(14-16)，那么在不给交易员制造套利机会的前提下，这一函数不会是衍生产品的价格。

为了说明这一点，我们首先考虑函数e^S，该函数不满足式(14-16)，因此也不能是股票价格上衍生产品的价格。如果一个价格等于e^S的产品确实存在，那么一定会触发套利机会。作为第二个例子，我们考虑函数

$$\frac{e^{(\sigma^2-2r)(T-t)}}{S}$$

该函数满足式(14-16)，因此，从理论上讲，这一函数是某个可交易产品的价格(该衍生产品在T时刻的收益为$1/S_T$)。关于其他可交易产品，参见练习题14.11、14.12、14.23和作业题14.28。

14.7　风险中性定价

在第12章中我们曾利用二叉树模型引入风险中性定价的方法。毫无疑问，这是衍生产品定价分析中一个最重要的工具。这个结果由布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程的一个关键的性质而来。布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程不涉及任何受投资者对风险选择影响的变量。在方程中出现的变量包括股票的当前价格、时间、股票价格波动率和无风险利率，而它们均与风险选择无关。

如果布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程涉及回报期望μ，那么它将不会与风险选择无关，这是因为μ的值确实与风险选择有关，投资者对风险的厌恶程度越高，对任何股票，相应的μ值也会越高。可喜的是在推导微分方程时，μ正好消失了。

由于布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程与风险选择无关，我们可以利用下面的巧妙方法：如果风险选择在方程中不出现，那么它不会影响方程的解。因此，在计算f时，我们可以使用任何一组风险选择，尤其可以假设所有的投资者都是风险中性的。

在每一个投资者都是风险中性的世界里，所有投资的回报率期望均为无风险利率r，其原因是对风险中性的投资者而言，不需要额外的回报而使他们承担风险。另外，在一个风险中性世界里，任何现金流的现值都可以通过对其期望值以无风险利率贴现得到，因此，在假设世界是风险中性时能够大大简化对衍生产品的分析。

考虑一个在某时刻提供收益的衍生产品，我们可以利用风险中性定价原理对其定价，过程包括以下三个方面。

- 假定标的资产的收益率期望为无风险利率(即假定$\mu=r$)。
- 计算衍生产品收益的期望。
- 用无风险利率对收益期望进行贴现。

风险中性定价(或假设所有投资者都是风险中性)仅仅是得到期权定价公式的一个人为的工具，认识到这一点非常重要。我们所得到的解不仅当投资者是风险中性时成立，而且在所有世界里也都是成立的。当我们从风险中性世界换到风险厌恶世界时，将会发生两种情况：股票价格变动的增长率期望以及对衍生产品收益所必须使用的贴现率都将变化，而这两种变化刚好相互抵消。

应用于股票远期合约

在5.7节中，我们对不支付股息股票的远期合约做了定价，并且在例14-5中验证了定价公式满足布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程。本节我们利用风险中性定价方法来推导这个定价公式。我们假设利率是常数，等于r。这比第5章中的假设更强。

考虑一个期限为 T 的远期合约长头寸，交割价格为 K。如图 1-2 所示，在合约到期时，远期合约的价值为

$$S_T - K$$

式中，S_T 是股票在时间 T 的价格。由风险中性定价方法我们知道，远期合约在时间 0 的价值是其风险中性世界里在时间 T 的期望值以无风险利率加以贴现后的现值。将远期合约在时间 0 的价值记为 f，这意味着

$$f = e^{-rT}\hat{E}(S_T - K)$$

式中 $\hat{E}$ 是风险中性世界里的期望值。由于 $\hat{E}$ 是常数，上式可以写成

$$f = e^{-rT}\hat{E}(S_T) - Ke^{-rT} \tag{14-17}$$

在风险中性世界里，股票的回报率 μ 变成了 r。因此，由式(14-4)我们有

$$\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT} \tag{14-18}$$

将式(14-18)代入式(14-17)得

$$f = S_0 - Ke^{-rT} \tag{14-19}$$

这一结果同式(5-5)是一致的。

14.8 布莱克-斯科尔斯-默顿定价公式

微分方程(14-16)最著名的解是关于看涨期权与看跌期权的定价公式，这些公式为

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{14-20}$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{14-21}$$

式中

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

函数 $N(x)$ 为标准正态分布的累积概率分布函数。换言之，这一函数等于服从标准正态分布 $\phi(0, 1)$ 的随机变量小于 x 的概率(见图 14-3)。我们对式中的其他符号应当很熟悉：c 与 p 分别为欧式看涨期权与看跌期权的价格，S_0 为股票在 0 时刻的价格，K 为执行价格，r 为连续复利的无风险利率，σ 为股票价格的波动率，T 为期权的期限。

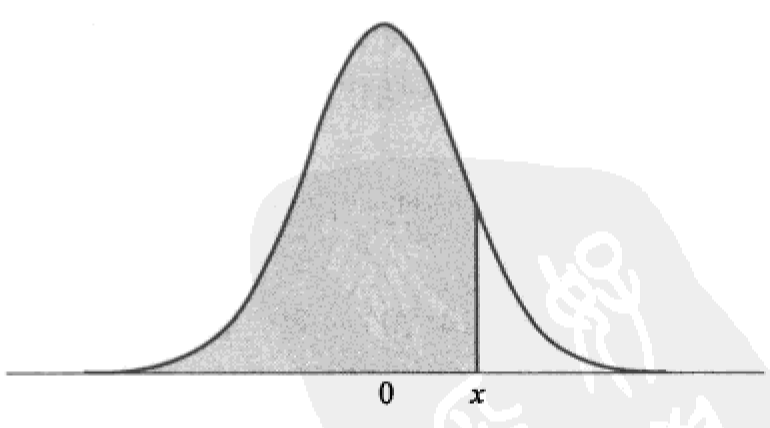


图 14-3 阴影区域代表 $N(x)$

一种推导布莱克-斯科尔斯-默顿公式的方法是解式(14-16)满足在 14.6 节提到过的边界条件。[⊖] (为了证明式(14-20)中的期权价格满足微分方程，见练习题 14.17。)另一种方法是利用风险中性定价。考虑欧式看涨期权，在风险中性世界里，当期权到期时的期望值是

⊖ 微分方程给出了看涨期权与看跌期权在时间 t 的价格。例如，满足方程的看涨期权价格是 $c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$，其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}。$$

$$\hat{E}[\max(S_T - K, 0)]$$

与前面相同，式中$\hat{E}$为风险中性世界的期望值。从风险中性定价方法我们知道，欧式看涨期权的价格等于这个期望值以无风险利率贴现后的现值，也就是说

$$c = e^{-rT}\hat{E}[\max(S_T - K, 0)] \tag{14-22}$$

附录 14A 证明了由式(14-22)可以得出式(14-20)中的结果。

为了理解式(14-20)中各项的意义，可以将它写成

$$c = e^{-rT}[S_0N(d_1)e^{rT} - KN(d_2)] \tag{14-23}$$

表达式 $N(d_2)$是在风险中性世界里期权被行使的概率，所以 $KN(d_2)$是执行价格乘以其被支付的概率。表达式 $S_0N(d_1)e^{rT}$是一个在 $S_T > K$ 时等于 S_T，在其他情形等于 0 的变量在风险中性世界的期望值。

由于提前行使无股息股票的美式看涨期权永远不会是最优的(见 10.5 节)，所以式(14-20)也是无股息股票上的美式看涨期权的价值。不幸的是，还没有无股息股票上的美式看跌期权价值的精确解析公式。在第 20 章中我们将讨论计算美式看跌期权的数值方法。

实际中，布莱克-斯科尔斯-默顿公式中采用的利率 r 等于期限为 T 的无风险投资利率。在后面的章节中我们将证明，当 r 是时间的已知函数时，在理论上公式仍然是成立的，而且只要股票价格在时间 T 服从对数正态分布，并且波动率参数取得适当，那么当 r 随机时，这个公式也是成立的。我们在前面提到过，一般来讲，时间是按期权有效期内的交易天数除以一年内的交易天数来度量的。

布莱克-斯科尔斯-默顿公式的性质

通过考虑给一些参数取极端值，我们现在证明布莱克-斯科尔斯-默顿公式具有正确的性质。

当股票价格 S_0 很大时，看涨期权几乎肯定会得到执行，这时期权与执行价格为 K 的远期合约非常相似。根据式(5-5)得出看涨期权价格应该为

$$S_0 - Ke^{-rT}$$

事实上，以上公式正好是式(14-20)所给出的期权价格：因为当 S_0 很大时，d_1 及 d_2 均很大，因此 $N(d_1)$与 $N(d_2)$均接近于 1。当股票价格很大时，欧式看跌期权的价格接近于 0，这与式(14-21)是一致的，因为在这种情形下 $N(-d_1)$与 $N(-d_2)$均接近于 0。

接着我们考虑当波动率接近于 0 的情形。因为股票价格几乎是无风险的，其价格在时间 T 将会增长到 S_0e^{rT}，看涨期权的收益为

$$\max(S_0e^{rT} - K, 0)$$

以利率 r 贴现，看涨期权在今天的价格是

$$e^{-rT}\max(S_0e^{rT} - K, 0) = \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$$

为了证明这与式(14-20)一致，首先考虑当 $S_0 > Ke^{-rT}$的情况，这意味着 $\ln(S_0/K) + rT > 0$。当 σ 趋于 0 时，d_1 和 d_2 均趋向于 $+\infty$，因此 $N(d_1)$与 $N(d_2)$均趋向于 1.0，式(14-20)变成了

$$c = S_0 - Ke^{-rT}$$

当 $S_0 < Ke^{-rT}$时，将有 $\ln(S_0/K) + rT < 0$。当 σ 趋于 0 时，d_1 和 d_2 均趋向于 $-\infty$，所以 $N(d_1)$与 $N(d_2)$均趋向于 0，该式所给的看涨期权价格为 0。类似地，我们可以证明当 σ 趋于 0 时，看跌期权的价格总是 $\max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$。

14.9 累积正态分布函数

在计算式(14-20)和式(14-21)时，我们需要计算正态分布的累积函数 $N(x)$。这一函数也可以通过 Excel 中的函数 NORMSDIST 来计算。

【例 14-6】 考虑一个 6 个月期限的期权。股票当前价格为 42 美元，执行价格为 40 美元，无风险利率为年率 10%，波动率为每年 20%，也就是说 $S_0=42$，$K=40$，$r=0.1$，$\sigma=0.2$，$T=0.5$，因此

$$d_1=\frac{\ln(42/40)+(0.1+0.2^2/2)\times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}}=0.7693$$

$$d_2=\frac{\ln(42/40)+(0.1-0.2^2/2)\times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}}=0.6278$$

以及

$$Ke^{-rT}=40e^{-0.05}=38.049$$

如果该期权为欧式看涨期权，其价格 c 为

$$c=42N(0.7693)-38.049N(0.6278)$$

如果该期权为欧式看跌期权，其价格 p 为

$$p=38.049N(-0.6278)-42N(-0.7693)$$

采用以上多项式近似或 Excel 中的 NORMSDIST 函数，

$$N(0.7693)=0.7791,N(-0.7693)=0.2209$$

$$N(0.6278)=0.7349,N(-0.6278)=0.2651$$

由此得出

$$c=4.76,\quad p=0.81$$

忽略货币的时间价值，股票价格至少上涨 2.76 美元才能使得看涨期权的投资者盈亏均衡。类似地，股票价格至少下跌 2.81 美元才能使看跌期权的投资者盈亏均衡。

14.10 权证与雇员股票期权

行使一个公司的普通看涨期权对于在市场上交易的公司股票数量没有任何影响。如果期权承约者不拥有公司的股票，那么他在行使期权时必须在市场上按通常的方式买入股票，然后按执行价格卖给期权的持有者。如在第 9 章解释的那样，权证与雇员股票期权与一般的看涨期权不同的是，在权证与雇员股票期权被行使时，公司必须首先发行更多的股票，然后再以执行价格卖给期权持有者。由于执行价格低于股票的市场价格，因此这些期权的行使会对市场上现有股票持有者的利益产生稀释效应。

这里潜在的稀释效应是否会影响我们对既存权证与雇员股票期权的定价方式呢？答案是否定的。假定市场是有效的(efficient)，那么股票价格已经反映了既存的权证与雇员股票期权的稀释效应。业界事例 14-3 解释了这一点[⊖]。

接下来，我们考虑某家公司想发行新权证（或雇员股票期权）的情形。假定发行新权证在未能增加公司价值的情况下，公司想计算发行权证的费用。我们假定这家公司总共发行了数量为 N 的股票，每股价格为 S_0，公司考虑发行 M 份新期权，每份期权可以使期权持有者以 K 的价格买入一股股票。公司股票在今天的市场价格为 NS_0，这一价值不受发行新权证的影响。假定在没有发行权证的前提下，股票价格在权证满期时刻 T 的价格为 S_T。这意味着，在时刻 T，股权和权证的价值（无论发行权证或不发行权证）总和为 NS_T。如果权证被行使，由执行价格所带来的资金流会使得股权和权证的价值总和变为 NS_T+MK，这一价值会被 $N+M$ 股股票分享，因此，在权证被行使后，股票价格变为

⊖ 分析师常常假定权证与股权价值的总和（而非股权价值的总和）为服从对数正态分布，因此，由布莱克–斯科尔斯–默顿公式表达的权证价格是由权证价格来表示的。参见网页 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes 上的 Technical Note 3。

$$\frac{NS_T + MK}{N + M}$$

期权持有人行使期权所得收益为

$$\frac{NS_T + MK}{N + M} - K$$

上式等于

$$\frac{N}{N + M}(S_T - K)$$

这里讨论的期权价格等于

$$\frac{N}{N + M}$$

乘以公司股票上普通看涨期权价格。因此，期权的总费用等于 M 乘以上式。由于我们假设发行权证对公司并没有什么补偿，一旦市场知道了发行权证的决定，公司股票将马上下跌，下跌的数量为期权的总费用。这意味着股票价格将会下降

$$\frac{N}{N + M}$$

乘以公司股票上的期限为 T、执行价格为 K 的普通看涨期权价格。

【例 14-7】 某公司共发行 100 万股股票，每股价格为 40 美元，该公司正在考虑发行 20 万份权证，每份权证给权证持有者在 5 年后可以以每股 60 美元的价格买入股票的权利，公司想知道这样做的费用。假定利率为每年 3%，波动率为每年 30%，公司不支付股息。由式(14-20)得出，5 年期的期权价格为 7.04 美元。这时，$N = 1\,000\,000$ 以及 $M = 200\,000$，因此，每份权证的价格为

$$\frac{1\,000\,000}{1\,000\,000 + 200\,000} \times 7.04 = 5.87$$

即 5.87 美元，发行权证的总费用为 $200\,000 \times 5.87 = 117$ 万美元。假定市场认为发行权证不会带来其他好处，我们预计股票价格会下降 1.17 美元，到 38.83 美元。

业界事例 14-3 认股权证、雇员股票期权和稀释效应

考虑一家公司，该公司发行了 10 万股股票，每股价格为 50 美元。公司发布了一个令市场震惊的消息，称其将发行 10 万份股票期权给其雇员，期权执行价格为 50 美元。如果市场认为公司发行的期权以削减雇员工资的形式没有给权益人带来好处，并且对那些较为上进的经理人也没有好处，股票价格会很快下跌。如果股票价格跌至 45 美元，期权给权益人带来的稀释费用为每股 5 美元，整体费用为 50 万美元。

假定公司在 3 年后表现很好，届时股票价格为每股 100 美元。假定所有的期权将在 3 年时行使，雇员期权每份收益为 50 美元。这时人们可能会认为期权行使会有进一步带来稀释效应，即 10 万股每股价格为 100 美元的股票会与 10 万股每股价格为 50 美元的股票进行合并，因此股票价格会跌至 75 美元，期权持有人的每份收益只有 25 美元。但是，以上说法是有问题的。市场认为股票期权一定会被行使，其价格反映了期权被行使的效应。因此，每份期权的收益仍为 50 美元。

这个例子反映了一个普遍现象，即当市场高效运作时，雇员股票期权和认股权证发行后，股票价格会很快体现出这些产品的稀释效应。

14.11　隐含波动率

在布莱克-斯科尔斯-默顿定价公式中，不能直接观察到的参数只有股票价格的波动率。在 14.4 节中我们已经讨论了如何由股票的历史价格来估计波动率。在实际中，交易员通常使用所谓的**隐含波动率**(implied volatility)。这一波动率是指由期权的市场价格所隐含的波动率。[1]

为了说明隐含波动率是如何计算的，假设一个不付股息股票的欧式看涨期权价格为 1.875，$S_0=21$，$K=20$，$r=0.1$ 和 $T=0.25$。隐含波动率是使得式(14-20)所给期权价格 $c=1.875$ 时对应的 σ 值。不幸的是，我们不能通过直接反解式(14-20)来将 σ 表示成期权价格与其他变量 S_0、K、r、T 和 c 的函数，但是我们可以用迭代的方式来求解所隐含的值 σ。例如，开始时我们令 $\sigma=0.20$，对应这一波动率，期权价格 c 为 1.76 美元，这一价格太低。由于期权价格为 σ 的递增函数，我们需要一个较大的 σ 值。我们再令 $\sigma=0.30$，对应的期权价格 c 为 2.10 美元，此值高于市价，这意味着 σ 一定介于 0.2 与 0.3 之间。接下来，我们令 $\sigma=0.25$，此值所对应的期权价格仍太高，所以 σ 应该在 0.20 与 0.25 之间。这样继续下去每次迭代都使 σ 所在的区间减半，因此我们可以计算出满足任意精确度的 σ 近似值[2]。在本例中，隐含波动率 $\sigma=0.235$，即每年 23.5%。与二叉树结合，利用类似的方法可以用美式期权来计算隐含波动率。

隐含波动率可以用来测量市场上对于某一股票波动率的观点。历史波动率(见 14.4 节)是**回望型**(backward looking)，而隐含波动率则为**前瞻型**(forward looking)。通常，交易员对于期权所报出的是隐含波动率，而不是期权的价格。这样做会带来许多方便，因为波动率的变化比期权价格变化更加稳定。在第 19 章中我们将说明交易员如何由市场上交易较为活跃的期权来估算其他期权的波动率。

VIX 指数

芝加哥交易所发布隐含期权指数。最流行的指数是 SPX VIX，这是根据 S&P 500 上包括很广的 30 天看涨期权和看跌期权计算的。[3]在 25.15 节中有关于指数计算方式的内容。在 VIX 上的期货交易是从 2004 年开始的，而在 VIX 上的期权交易是从 2006 年开始的。涉及 S&P 500 的期货或期权是在将来的 S&P 500 水平以及 S&P 500 波动率两方面下注，与此相反，VIX 上的期货或期权只是在波动率上下注。一份合约等于 1 000 乘以指数。

图 14-4 显示了 2004 年 1 月～2010 年 7 月间的 VIX 指数。在 2004～2007 年中期，VIX 指数通常保持在 10～20 之间，在 2007 年后半期，指数达到了 30，而到 2008 年 10 月与 11 月雷曼兄弟破产后，指数有高达 80 的纪录。在 2010 年初，指数逐渐降到了正常水平，但在 2010 年 5 月由于欧洲主权债务危机，指数又高达 45。

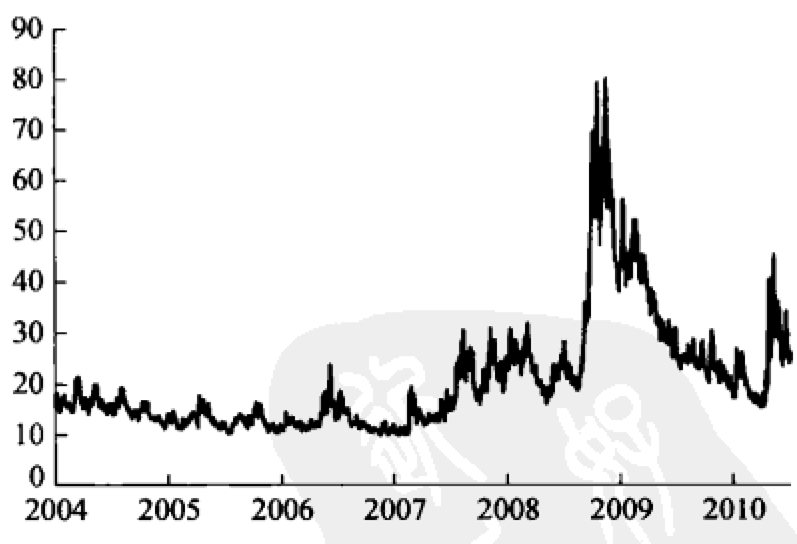


图 14-4　2004 年 1 月～2010 年 7 月 VIX 指数

【例 14-8】　假设某交易员买了一份 VIX 上 4 月份的期权合约，当时的期货价格是 18.5(相当

[1] DerivaGem 可以用来计算欧式和美式期权的隐含波动率。

[2] 这一方法只是为了说明问题，在实际中往往采用其他更有力的方法，像 Newtonr-Raphson 方法(见 4.4 节中的页下注)。DerivaGem 可以用来计算隐含波动率。

[3] 与其类似，VXN 是 NASDAQ100 指数的波动率指数，VXD 是道琼斯工业指数的波动率指数。

于 30 天 S&P 500 波动率为 18.5%），并于期货价格为 19.3（相当于 30 天 S&P 500 波动率为 19.3%）时平仓。交易员赚了 800 美元。

14.12 股息

到目前为止，我们一直假设期权的标的股票不付任何股息。本节我们对布莱克-斯科尔斯-默顿模型加以修改，以便考虑股息。我们假设在期权的有效期内，股息的数量与付出时间均可以被准确地预测到，而对于短期限的期权来说，这个假设并不是不合理（对于长期限的期权，我们通常假设已知的是股息率，而不是股息的现金数量，这时可以按我们在第 16 章中所述的方法对期权定价）。股息付出日期应当被假设成除息日，在这个日期，股票价格下跌的幅度为股息的数量。⊖

14.12.1 欧式期权

为了分析欧式期权，我们假定股票价格由以下两部分组成：对应于期权有效期内所付股息的无风险部分与有风险的部分。在任意给定时刻，无风险部分等于在期权有效期内的股息以无风险利率从除息日贴现到今天的现值。当期权到期时，这些股息已被付出，从而无风险部分不再存在。因此，当 S_0 表示为有风险的部分，σ 为有风险部分所服从过程的波动率时，布莱克-斯科尔斯-默顿公式仍然正确。⊜在运作上这意味着只要在股票价格中除去所有在期权有效期限内股息的贴现值，我们仍然可以采用布莱克-斯科尔斯-默顿模型来对期权定价。在计算股息贴现值时，我们采用的贴现日期为除息日，贴现利率等于无风险利率。像已经讲过的那样，只有除息日在期权有效期内的股息才用于计算。

【例 14-9】 考虑一欧式股票看涨期权，股票在 2 个月及 5 个月后分别有一个除息日。预计在每个除息日股息都为 0.5 美元。股票目前价格为 40 美元，执行价格为 40 美元，股票价格波动率为年率 30%，无风险利率为年率 9%，期权期限为 6 个月。股息的贴现值为

$$0.5e^{-0.09\times 2/12} + 0.5e^{-0.09\times 5/12} = 0.974\,2$$

因此，期权价格可由布莱克-斯科尔斯-默顿公式求出，在公式中输入的参数为 $S_0 = 40 - 0.974\,2 = 39.052\,8$，$K=40$，$r=0.09$，$\sigma=0.3$ 及 $T=0.5$，由此得出

$$d_1 = \frac{\ln(39.025\,8/40) + (0.09 + 0.3^2/2)\times 0.5}{0.3\times\sqrt{0.5}} = 0.202\,0$$

$$d_2 = \frac{\ln(39.025\,8/40) + (0.09 - 0.3^2/2)\times 0.5}{0.3\times\sqrt{0.5}} = -0.010\,2$$

采用 Excel 中的 NORMDIST 函数，得出

$$N(d_1) = 0.580\,0 \quad 及 \quad N(d_2) = 0.495\,9$$

由式(14-20)得出期权价格为

$$39.025\,8\times 0.580\,0 - 40e^{-0.09\times 0.5}\times 0.495\,9 = 3.67$$

即 3.67 美元。

⊖ 由于税收的原因，股票下跌的数量会比股息的现金数量小。为了考虑这种现象，我们将期权情形下的“股息”理解成由于股息而引起股票在除息日下跌的数量。因此，如果预计 1 美元的股息而股票价格通常在除息日下跌股息数量的 80%，那么为了分析期权的目的，股息应当被假设成 0.80 美元。

⊜ 从理论上讲，这与股票整体价格的波动率不完全一样。有风险部分的波动率大概等于股票整体价格波动率乘以 $S_0/(S_0-D)$，其中 D 为股息的现值。然而，只有在利用历史数据来估计波动率时，才有必要做这种调整。在计算隐含波动率时是先将股息的贴现值从股票价格中去掉，从而是风险部分的波动率。

14.12.2 美式期权

下面考虑美式期权。在第 10 章我们看到，在没有股息的情况下，永远不应该在到期日之前行使该期权。将论证推广，可以证明，对于一个支付股息的美式期权，其最优行使时间只有可能为刚好在股票除息日之前的时刻。我们假定股票预计在时间 t_1，t_2，…，t_n（其中 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$）派发股息，在每个除息日的相应股息量分别为 D_1，D_2，…，D_n。

我们首先考虑在最后一个除息日（即 t_n）前提前行使期权的可能性。如果期权在 t_n 时刻被行使，投资者的收益为

$$S(t_n) - K$$

其中 $S(t)$ 为股票在时间 t 的价格。如果期权没有被行使，股票价格下跌到 $S(t_n) - D_n$。如式(10-4)所示，期权的值将大于

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)}$$

因此，如果

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)} \geqslant S(t_n) - K$$

即

$$D_n \leqslant K[1 - e^{-r(T-t_n)}] \tag{14-24}$$

那么在 t_n 时刻行使期权不会是最优。反之，如果

$$D_n > K[1 - e^{-r(T-t_n)}] \tag{14-25}$$

那么在任何对股票价格所服从随机过程的合理假设下，当 $S(t_n)$ 足够大时，在 t_n 时刻行使期权是最优的。当最后一个除息日接近期权到期日（即当 $T-t_n$ 很小）而且股息很大时，不等式(14-25)往往会被满足。

接下来考虑 t_{n-1} 时刻，就是倒数第二个除息日。如果期权在 t_{n-1} 时被行使，投资者会收到

$$S(t_{n-1}) - K$$

如果期权在 t_{n-1} 时刻没有被行使，股票价格降至 $S(t_{n-1}) - D_{n-1}$，之后最近一个可行使期权的时刻为 t_n。如果在 t_{n-1} 不行使期权，期权价格的下限为

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n-t_{n-1})}$$

因此，如果

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n-t_{n-1})} \geqslant S(t_{n-1}) - K$$

即

$$D_{n-1} \leqslant K[1 - e^{-r(t_n-t_{n-1})}]$$

在 t_{n-1} 时行使期权不会是最优。与此类似，对于任意 $i<n$，如果

$$D_i \leqslant K[1 - e^{-r(t_{i+1}-t_i)}] \tag{14-26}$$

那么在 t_i 时行使期权不会是最优。

不等式(14-26)近似地等价于以下不等式

$$D_i \leqslant Kr(t_{i+1} - t_i)$$

假如 K 与当前股票价格十分接近，股息率小于无风险利率时以上不等式才会成立。通常情况是这样的。

由这一分析我们可以得出，在大多数情形下，美式期权可能被提前行使的时间为最后一个除息日 t_n。再有，如果不等式(14-26)对于 $i=1,2,\cdots,n-1$ 均成立，并且不等式(14-24)也成立，那么我们可以确认提前行使期权不会为最优选择。

14.12.3 布莱克近似法

布莱克建议了一种计算美式看涨期的近似方法，这种方法考虑了期权可能被提前行使的特性[⊖]。

⊖ 见 F. Black，"Fact and Fantasy in the Use of Options," *Financial Analysts Journal*, 31(July/August 1975)：36-41，61-72。

如本节前面所述，这种近似法包括计算在 T 和 t_n 到期的欧式期权价格，然后令美式期权价格等于两者的最大值。这一公式在大多数情况下效果很好[⊖]。

【例 14-10】 假定在例 14-9 中的期权为美式期权而不是欧式期权。这时，$D_1 = D_2 = 0.5$，$S_0 = 40$，$K = 40$，$r = 0.09$，$t_1 = 2/12$，$t_2 = 5/12$，因为

$$K[1 - e^{-r(t_2 - t_1)}] = 40(1 - e^{-0.09 \times 0.25}) = 0.89$$

大于 0.5，因此，期权在第一个除息日之前不应被提前行使（见不等式 14-26）。再有，因为

$$K[1 - e^{-r(T - t_2)}] = 40(1 - e^{-0.09 \times 0.0833}) = 0.30$$

以上数量大于 0.5，因此，当实值程度足够大时，期权应在第二个除息日之前的时刻被行使［见式（14-25）］。

我们现在采用布莱克近似法来计算期权价格。第一个股息的贴现值为

$$0.5e^{-0.1667 \times 0.09} = 0.4926$$

因此在最后一个除息日之前的时刻到期的期权价格可以由布莱克-斯科尔斯-默顿公式来计算，输入的参数为 $S_0 = 40 - 0.4926 = 39.5074$，$K = 40$，$r = 0.09$，$\sigma = 0.3$，$T = 0.4167$，计算出的期权价格为 3.52 美元。布莱克近似值等于这一期权价格与只能在第 6 个月时被行使的期权价格中的最大值。由例 14-9 可知，后者为 3.67 美元。因此，由布莱克近似法得出的美式期权价格为 3.67 美元。

这种美式期权可以按照 20.3 节所述的二叉树方法来计算价格。利用 DerivaGem 软件，当步数取 500 时，二叉树给出的价格是 3.72 美元（注意 DerivaGem 需要将股息按时间顺序输入，股息付出的时间在第一列内，股息数量在第二列内）。有两个原因造成了 DerivaGem 的“Binomial American”（BM）价格与布莱克近似法（BA）的差异。第一个原因是关于提前行使期权的时间，第二个原因是关于波动率的使用。提前行使的决策会使得 BM 的价格高于 BA 的价格。BA 模型假设期权持有者在今天就需要决定期权是否应在 5 个月，或在 6 个月后被行使；而在 BM 模型中，期权持有者在 5 个月时是否行使期权与那时的股票价格有关。波动率的使用会使得 BA 价格高于 BM 价格。在 BA 模型中，当我们假定期权在 5 个月后被行使时，波动率被应用到股票价格与第一个股息贴现值的差；当我们假定期权在 6 个月被行使时，波动率被应用到股票价格与前两个股息的贴现值总和的差。

小　结

本章首先考虑了第 13 章中引入的股票价格过程的性质，这里的股票价格过程意味着在给定当前价格的前提下，股票价格在将来时刻的分布为对数正态分布。这也意味着，在一段时间后股票连续复利的收益为正态分布。我们预测的时间越远，未来股票价格的不确定性也越大。股票价格对数值的标准差与我们所展望时间长度的平方根成正比。

为了以实证形式来估计股票价格波动率 σ，我们应以一固定的时间区间观测股票价格（例如，每天、每周或每月）。对于每个时间段，求出该时间段末的股票价格与该时间初的股票价格之比的自然对数，然后求出这些数字的标准差，再除以时间长度（以年计）的平方根，即可得出波动率的估计值。通常在计算波动率时，我们应该忽略那些交易所休市的天数。

通过构造由期权与股票所组成的无风险交易组合可以得出用于衍生产品定价的微分方程。由于期权与股票价格只依赖于同一项不确定性因素，所以这种无风险头寸总是可以构造

⊖ 对于只有一个除息日的情形，Roll、Geske 和 Whaley 给出一个准确公式，见网页（www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes）上的 Technical Note 4。这一公式涉及二元正态分布函数，同一网页上的 Technical Note 5 给出了计算这一分布函数的过程。

出来。但这里所建立的头寸只能在一段很短的时间内为无风险状态。在没有套利的前提下，无风险组合的收益率等于无风险利率。

股票的收益率期望并没有进入布莱克－斯科尔斯－默顿微分方程中，由此而引入了很有用的风险中性定价。这个结果说明，当对一个依赖于股票价格的衍生产品定价时，我们可以假设世界是风险中性的，也就是说我们可以假定股票的回报期望等于无风险利率，然后以无风险利率对收益的期望值进行贴现。对于欧式看涨和看跌期权的布莱克－斯科尔斯－默顿方程既可以通过求解微分方程来得到，也可以由风险中性定价来得到。

隐含波动率是指布莱克－斯科尔斯－默顿期权定价公式时计算出的期权价格等于市场价格的波动率。交易员在交易中观察隐含波动率并常常对隐含波动率，而不是对期权价格提供报价。交易员会采用由市场交易活跃的期权隐含波动率来对其他期权的波动率进行估计。

布莱克－斯科尔斯－默顿模型可以被推广到支付股息的欧式股票期权上，其过程是将布莱克－斯科尔斯－默顿公式中的股票价格由原股票价格减去在期权有效期内预期股息的贴现值来代替，而波动率为股票价格减去这些股息的现值后的波动率。

从理论上讲，在任何除息日前夕行使美式看涨期权可能是最优的选择。在实际中，常常仅需考虑最后一个出息日。布莱克提出了一种近似方法：将美式看涨期权设成两个看涨期权的最大值。第一个看涨期权的到期日与美式期权相同，第二个期权在最后一个除息日前夕到期。

推荐阅读

On the Distribution of Stock Price Changes

Blattberg, R., and N. Gonedes, "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices," *Journal of Business*, 47 (April 1974): 244–80.

Fama, E. F., "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business*, 38 (January 1965): 34–105.

Kon, S. J., "Models of Stock Returns—A Comparison," *Journal of Finance*, 39 (March 1984): 147–65.

Richardson, M., and T. Smith, "A Test for Multivariate Normality in Stock Returns," *Journal of Business*, 66 (1993): 295–321.

On the Black-Scholes Analysis

Black, F. "Fact and Fantasy in the Use of Options and Corporate Liabilities," *Financial Analysts Journal*, 31 (July/August 1975): 36–41, 61–72.

Black, F. "How We Came Up with the Option Pricing Formula," *Journal of Portfolio Management*, 15, 2 (1989): 4–8.

Black, F., and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81 (May/June 1973): 637–59.

Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973): 141–83.

On Risk-Neutral Valuation

Cox, J. C., and S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3 (1976): 145–66.

Smith, C. W., "Option Pricing: A Review," *Journal of Financial Economics*, 3 (1976): 3–54.

On the Causes of Volatility

Fama, E. F. "The Behavior of Stock Market Prices." *Journal of Business*, 38 (January 1965): 34–105.

French, K. R. "Stock Returns and the Weekend Effect." *Journal of Financial Economics, 8 (March 1980): 55–69.*

French, K. R., and R. Roll "Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders." *Journal of Financial Economics*, 17 (September 1986): 5–26.

Roll R. "Orange Juice and Weather," *American Economic Review*, 74, 5 (December 1984): 861–80.

练习题

14.1 布莱克-斯科尔斯-默顿股票期权定价模型中对于一年后股票价格概率分布的假设是什么？对于一年内连续复利收益率的假设是什么？

14.2 股票价格的波动率为年率30%，在一个交易日后价格百分比变化的标准差为多少？

14.3 解释风险中性定价原理。

14.4 计算一个3个月期的无股息股票欧式看跌期权的价格，这里期权执行价格为50美元，股票当前价格为50美元，无风险利率为年率10%，波动率为每年30%。

14.5 若在两个月后股票预计将支付股息1.5美元，练习题14.4中的结果会如何变化？

14.6 什么是隐含波动率？如何计算？

14.7 股票的当前价格为40美元，假定其收益率期望为15%，波动率为25%。在两年内的股票收益率(连续复利)的概率分布是什么？

14.8 某股票价格服从几何布朗运动，其中收益率期望为16%，波动率为35%，股票的当前价格为38美元。

(a) 一个该股票上具有执行价格为40美元，期限为6个月的欧式看涨期权被行使的概率为多少？

(b) 一个该股票上具有同样执行价格及期限的欧式看跌期权被行使的概率为多少？

14.9 采用本章中的符号，证明 S_T 的95%置信区间介于

$$S_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T-1.96\sigma\sqrt{T}} \text{ 与 } S_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T+1.96\sigma\sqrt{T}}$$

之间。

14.10 一个证券组合经理声称自己在过去10年中平均每年的收益率为20%，这种说法在什么方面会引起误解？

14.11 假定一个无股息股票的收益率期望为 μ，波动率为 σ。一个具有创新意识的金融机构刚刚宣布它将交易在时刻 T 收益为 $\ln S_T$ 的衍生产品，其中 S_T 为股票在 T 时刻的价格。

(a) 采用风险中性定价理论来将衍生产品价格表达为股票价格 S 与时间 t 的函数。

(b) 验证你得出的价格满足式(14-16)。

14.12 考虑一个在时间 T 提供收益为 S_T^n 的衍生产品，其中 S_T 为股票在 T 时刻的价格。当股票价格服从几何布朗运动时，可以证明该衍生产品在时间 $t(t\leqslant T)$ 的价格具有以下形式

$$h(t,T)S^n$$

其中 S 为股票在时间 t 的价格，h 为 t 和 T 的函数。

(a) 将以上形式的解代入布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程，推导 $h(t,T)$ 满足的常微分方程。

(b) $h(t,T)$ 所满足的边界条件是什么？

(c) 证明

$$h(t,T)=e^{[0.5\sigma^2n(n-1)+r(n-1)](T-t)}$$

其中 r 为无风险利率，σ 为股票价格的波动率。

14.13 计算以下无股息股票上欧式看涨期权的价格，其中股票价格为52美元，执行价格为50美元，无风险利率为年率12%，波动率为年率30%，期限为3个月。

14.14 计算以下无股息股票上欧式看跌期权的价格，其中股票价格为69美元，执行价格为70美元，无风险利率为年率5%，波动率为年率35%，期限为6个月。

14.15 考虑关于一个股票上的美式看涨期权，股票价格为70美元，期限为8个月，无风险利率为年率10%，执行价格为65美元，波动率为32%。在3个月及6个月时预计各有1美元的股息，证明在两个除息日行使期权永远不会是最佳选择。采用 DerivaGem 来计算期权的价格。

14.16 一个无股息股票上看涨期权的市场价

格为 2.5 美元，股票价格为 15 美元，执行价格为 13 美元，期限为 3 个月，无风险利率为年率 5%，隐含波动率为多少？

14.17 采用本章中的符号

(a) $N'(x)$ 等于什么？

(b) 证明 $SN'(d_1)=Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$，其中 S 为股票在时间 t 的价格，以及

$$d_1=\frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2=\frac{\ln(S/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

(c) 计算 $\partial d_1/\partial S$ 和 $\partial d_2/\partial S$。

(d) 证明当 $c=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ 时，以下方程成立

$$\frac{\partial c}{\partial t}=-rKe^{-r(T-t)}N(d_2)-SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

其中 c 为无股息股票上欧式看涨期权的价格。

(e) 证明 $\partial c/\partial S=N(d_1)$。

(f) 证明 c 满足布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程。

(g) 证明 c 满足欧式看涨期权的边界条件，即 $t\to T$ 时，$c=\max(S-K,0)$。

14.18 证明由布莱克-斯科尔斯-默顿给出的期权公式满足看跌-看涨期权平价关系式。

14.19 股票的当前价格为 50 美元，无风险利率为 5%，利用 DerivaGem 将下表中的欧式期权价格表转换为隐含波动率表，在计算中假定股票无股息。期权价格与布莱克-斯科尔斯-默顿的假设一致吗？

执行价格（美元）	期限（以月为计） 3	6	12
45	7.0	8.3	10.5
50	3.7	5.2	7.5
55	1.6	2.9	5.1

14.20 仔细解释为什么即使股票预期只发放一次股息时，布莱克近似法也许是对支付期权股票上美式期权的一个近似。由布莱克近似法得出的估计值会高估还是会低估期权价格？解释你的答案。

14.21 考虑关于某股票的美式看涨期权，股票价格为 50 美元，期权期限率为 15 个月，无风险利率为每年 8%，执行价格为 55 美元，波动率为 25%。股票在 3 个月与 6 个月时预计各有 1.5 美元的股息。证明在两个除息日行使期权永远不会是最佳选择，并计算期权价格。

14.22 采用本章中的符号，证明在风险中性世界里，一个欧式期权将被执行的概率为 $N(d_2)$。在 T 时刻，如果股票价格大于 K，收益为 100 美元的衍生产品价格是多少？

14.23 证明 S^{-2r/σ^2} 可以是某种可交易证券的价格。

14.24 某公司发行了雇员股票期权，当对期权定价时，是否应考虑稀释效应？解释你的答案。

14.25 某公司的股票价格为 50 美元，市场上共有 1 000 万股。公司计划向其雇员发行 300 万 5 年期的平价雇员股票看涨期权，在期权行使时，公司需要发行更多的股票，股票价格的波动率为 25%，5 年的无风险利率为每年 5%，公司不发放股息。估算公司发行雇员股票期权的费用。

作业题

14.26 某股票的当前价格为 50 美元。假定股票的预期收益率为年率 18%，波动率为 30%，在两年后股票价格的概率分布是什么？计算分布的期望值与标准差，并确定 95% 的置信区间。

14.27 假定在连续 15 个周末所观察的股票价格（以美元计）为：30.2，32.0，31.1，30.1，30.2，30.3，30.6，33.0，32.9，33.0，33.5，33.5，33.7，33.5，33.2

估计股票价格的波动率，你所估计结果的标准差为多少？

14.28 某金融机构计划提供在时刻 T 收益为 S_T^2 的衍生产品。假定股票不提供任何股息。(a)利用风险中性定价原理推导此衍生产品价格在0时刻与其他变量的关系(提示，S_T^2 的期望可由14.1节中 S_T 所示的期望值及方差给出)。(b)验证你的结果满足微分方程(14-16)。

14.29 考虑一个无股息股票上的期权，股票价格为30美元，执行价格为29美元，无风险利率为年率5%，波动率为年率25%，期权限期为4个月。

(a) 如果期权是欧式看涨期权，其价格为多少?

(b) 如果期权是美式看涨期权，其价格为多少?

(c) 如果期权是欧式看跌期权，其价格为多少?

(d) 验证看跌-看涨期权平价关系式。

14.30 假定作业题14.29中的股票在1.5个月时将会变成除息日，所付股息预期为50美分。

(a) 如果期权是欧式看涨期权，其价格为多少?

(b) 如果期权是美式看涨期权，其价格为多少?

(c) 如果期权为美式看涨期权，会不会在某种情形下提前行使期权成为最优?

14.31 考虑一个美式看涨期权，股票的当前价格为18美元，期权执行价格为20美元，期限为6个月，波动率为30%，无风险利率为年率10%。在今后2个月及5个月，股票预计会发放两次相同数量的股息，股息量为40美分。采用布莱克近似法及DerivaGem软件来对这一期权定价。使美式期权价格与相应的欧式期权价格相同的股息数量的最大值是多少?

附录14A

布莱克-斯科尔斯-默顿公式的证明

在证明布莱克-斯科尔斯-默顿公式之前，我们先证明一个重要关系式，我们将在今后的章节中也会用到这一结论。

重要关系式

如果 V 服从对数正态分布，$\ln V$ 的方差为 w，那么

$$E[\max(V-K,0)] = E(V)N(d_1) - KN(d_2) \tag{14A-1}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[E(V)/K] + w^2/2}{w}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E(V)/K] - w^2/2}{w}$$

这里，E 代表期望值。

关系式的证明

定义 $g(V)$ 为 V 的概率密度函数，因此

$$E[\max(V-K,0)] = \int_K^{\infty}(V-K)g(V)\mathrm{d}V \tag{14A-2}$$

$\ln V$ 服从正态分布，标准差为 w，由正态分布的性质得出，$\ln V$ 的均值为 m，其中

$$m = \ln[E(V)] - w^2/2 \tag{14A-3}$$

定义一个新的变量

$$Q = \frac{\ln V - m}{w} \tag{14A-4}$$

Q 服从正态分布，均值为 0，方差为 1.0。将 Q 的密度函数记为 $h(Q)$，因此

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Q^2/2}$$

利用式(14A-4)来将式(14A-2)关于 V 的积分转换为关于 Q 的积分，我们得出

$$E[\max(V-K,0)] = \int_{(\ln K-m)/w}^{\infty} (e^{Qw+m} - K)h(Q)\mathrm{d}Q$$

或者

$$E[\max(V-K,0)] = \int_{(\ln K-m)/w}^{\infty} e^{Qw+m}h(Q)\mathrm{d}Q - K\int_{(\ln K-m)/w}^{\infty} h(Q)\mathrm{d}Q \tag{14A-5}$$

我们现在有

$$\begin{aligned} e^{Qw+m}h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-Q^2+2Qw+2m)/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{[-(Q-w)^2+2m+w^2]/2} \\ &= \frac{e^{m+w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{[-(Q-w)^2]/2} \\ &= e^{m+w^2/2}h(Q-w) \end{aligned}$$

这意味着，式(14A-5)变为

$$E[\max(V-K,0)] = e^{m+w^2/2}\int_{(\ln K-m)/w}^{\infty} h(Q-w)\mathrm{d}Q - K\int_{(\ln K-m)/w}^{\infty} h(Q)\mathrm{d}Q \tag{14A-6}$$

定义 $N(x)$ 为均值为 0，方差为 1 的标准正态分布变量小于 x 的概率，式(14A-6)的第一项积分变为

$$1 - N[(\ln K - m)/w - w]$$

或

$$N[(-\ln K + m)/w + w]$$

将(14A-3)中的 m 代入以上表达式，得出

$$N\left(\frac{\ln[E(V)/K] + w^2/2}{w}\right) = N(d_1)$$

类似地，式(14A-6)中的第二项积分等于 $N(d_2)$。因此，式(14A-6)变为

$$E[\max(V-K,0)] = e^{m+w^2/2}N(d_1) - KN(d_2)$$

代入式(14A-6)定义的 m 项，我们可以得出结论。

布莱克-斯科尔斯-默顿模型的结果

我们现在考虑一个在时刻 T 到期的欧式看涨期权，标的股票不支付股息，期权的执行价格为 K，无风险利率为 r，股票的当前价格为 S_0，股票价格的波动率为 σ。由式(14-22)得出，看涨期权价格 c 满足

$$c = e^{-rT}\hat{E}[\max(S_T - K,0)] \tag{14A-7}$$

式中，S_T 为股票在 T 时刻的价格，$\hat{E}$ 代表风险中性世界里的期望值。在布莱克-斯科尔斯-默顿对

随机过程的假设下，S_T 服从对数正态分布。由式(14-3)和式(14-4)又得出，$\hat{E}(S_T)=S_0e^{rT}$，$\ln S_T$ 的标准差为 $\sigma\sqrt{T}$。

由以上证明的重要结论，我们可以得出式(14A-7)变为

$$c=e^{-rT}[S_0e^{rT}N(d_1)-KN(d_2)]$$

或

$$c=S_0N(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2)$$

其中

$$d_1=\frac{\ln[\hat{E}(S_T)/K]+\sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}=\frac{\ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2=\frac{\ln[\hat{E}(S_T)/K]-\sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}=\frac{\ln(S_0/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

这就是布莱克-斯科尔斯-默顿模型的结果。

PDG



第 15 章

雇员股票期权

雇员股票期权(employee stock option)是公司授予其雇员在本公司股票上的看涨期权。这些期权给予了雇员一份公司的财富。如果公司效益很好使其股票价格超过执行价格，雇员可以通过行使期权，然后将所得股票按市场价格卖出而获益。

在最近20年里，雇员期权变得非常流行。很多公司，尤其是高科技公司，认为吸引和挽留最优秀人才的唯一办法是给予他们很诱人的股票期权方案。一些公司只对其高级管理人员授予期权，而另一些公司则授予各层次的工作人员。微软是最早使用雇员期权的公司之一，微软对其所有雇员都授予了期权；当公司的股票价格上涨时，据估计至少有1万人变成了百万富翁。在2003年，微软宣布停止使用期权，而直接将微软股票奖励给雇员。但世界各地仍有一些其他公司继续热衷于使用雇员股票期权。

股票期权很受新公司的欢迎，这些公司往往没有足够的资源去付给关键雇员像他们能够在一些老牌企业里所挣的报酬，而解决这些问题的办法是利用股票期权来补充雇员的工资。如果公司发展很好，那么在公司**首次公开募股**(IPO)时，这些期权很可能会变得非常有价值。一些新成立的公司甚至给仅仅在暑假期间为其工作几个月的学生授予期权。在某些情况下，这使得一些学生凭空得来一大笔钱。

本章解释股票期权方案是如何运行的，以及为何它们的流行程度受会计处理方式的影响。我们将讨论雇员股票期权是否会使股权人的利益与操作公司的高级管理人员一致。还将描述这些期权是如何定价的，并且回顾一些相关的丑闻。

15.1 合约的设计

雇员股票期权常常延续10~15年之久，执行价格一般设成股票在授予日的价格，因此在最初时期权是平价的。雇员股票期权方案常常含有以下特点。

- 有一段等待时间(vesting period)，在此期间期权是不能被行使的。这段等待时间可以延续长达4年。
- 在等待时间内，当雇员离开公司(志愿或非志愿)时，期权将会作废。
- 在等待时间之后，当雇员离开公司(志愿或非志愿的)时，虚值期权将会作废，而且必须马上行使**已经生效**(vested)的实值期权。
- 雇员不允许出售这些期权。
- 当雇员行使期权时，公司将会发行新股票，并将其按执行价格卖给雇员。

提前行使决策

刚才提到的雇员股票期权的第四个特点有很重要的意义。如果为了某种原因雇员想把已经生效的期权受益变成现金，他们必须行使期权，然后将标的股票卖掉。由于他们不能将期权卖给别

人，这常常会使雇员期权的行使与其类似的在交易所交易或场外交易的看涨期权要早。

考虑一个无股息股票上的看涨期权，在10.5节中我们曾证明如果这是一个普通的看涨期权，那么它永远不应该被提前行使。在期权到期之前，期权持有者总是可以将期权卖掉而获得比行使期权更好的结果。但是由于不能卖掉雇员股票期权，因此第10.5节里的结论在这里是不适用的。雇员要是想将期权的值变化为现金的话，唯一的做法是行使期权，然后再将股票卖掉。因此与交易所或场外市场相比，雇员股票期权被提前行使的现象并不罕见。

雇员是否应该在到期日之前行使期权并且是保留股票而不将其卖掉呢？假设期权的执行价格在有效期内是常数，而且期权可以在任何时刻被行使。为了回答这个问题，我们考虑两种期权：一种是雇员股票期权，另一种是除此之外与其等同但可以在市场上出售的普通期权。我们将第一种期权记为期权A，第二种期权记为期权B。如果股票无股息，那么从10.5节我们知道，期权B永远不应该被提前行使，因此，提前行使期权A并保留股票不会是最优的做法。如果雇员想拥有公司的一些股份，那么更好的做法是保留期权。如10.5节所述，这样做将会推迟支付执行价格的时间，并保留期权的保险价值。只有当行使期权B为最优时，在到期日之前行使期权A并保留股票才会是理性的[㊀]。如在第14.12节讨论的那样，只有当相对较多的股息将被支付的情况下，行使期权B才会是最优的。

实际中，雇员提前行使期权的行为在各公司之间变化很大。一些公司具有不提前行使期权的文化，而在另一些公司往往会在等待时间刚结束就马上行使期权，即使期权仅仅稍微是实值。

15.2　期权会促进股权人与管理人员的利益一致吗

使得投资者对资本市场有信心的一个重要因素是股权人与管理人员的利益的一致性。这意味着在制定政策时，管理人员会从股权人的利益出发。管理人员是股权人的代理人，如第8章所述，经济学家将由于管理人与股权人的利益不一致时所受的损失叫做**代理费用**(agency costs)。

期权有助于使管理人员的利益与股权人一致吗？这个问题的答案并非直截了当。毫无疑问，对新企业来讲，期权达到一定的目的，这些期权激励公司的主要股权人，往往也是公司的高管，为公司做出积极贡献。如果公司很成功而首次公开募股，那么雇员将会获得很多收益。但是如果公司不成功，这些期权将会一文不值。

然而，对已经公开交易公司所授予其高管的期权有很多争议。据估计，雇员股票期权在美国大约占高层管理人员报酬的50%。雇员股票期权有时也被称为高管的**绩效工资**(pay-for-performance)。如果公司的股票价格上涨，于是股权人获益，而高管也得到报酬，但这忽略了期权收益的不对称性。如果公司情况糟糕，那么股权人遭受损失，但对高管而言，唯一的影响是不多赚钱而已。与股权人不同的是，他们不会遭受损失[㊁]。绩效工资的一种较好的做法是简单地将股票授予管理人，这时管理人的获益和损失将与其他股权人一致。

对高层管理人员，期权会产生什么样的诱惑呢？假设一个高管计划在3个月后行使很大数量的期权并将股票卖掉，那么对他来讲，将选择公布好消息的时间，甚至将一个季度的收入记到另一季度，以便使股票价格在期权行使之前上涨。这种做法是具有一定诱惑力的。另一种可能性是如果在3个月后将会授予高管平值期权，那么高管也许会采取措施使股票价格在授予股票期权之前下跌。当然，我们这里所讲的行为是不允许的，而且常常是非法的，但在本章后面所讨论的**倒填日期**(backdating)丑闻表明，一些高管对有关股票期权的一些处理方式是欠妥的。

即使没有上面所述的不当行为，雇员股票期权往往会产生使高管只谋短期利益，而牺牲长期发展的效果，由于期权收益的不对称性，在某些情况下甚至会去冒一些不必要的风险（这些风险

㊀ 唯一的例外可能是当高管为了投票权而拥有股票。

㊁ 当期权变成虚值时，公司有时会将其以新的平值期权来代替。这种被称为**重新定价**(repricing)的做法导致了高管的获利与损失和股权人的联系更加松散。

无益于股权人)。大型基金的经理们担心的是由于股票期权占高管报酬如此大的部分，这会成为他们分心的重大来源。高层管理人员也许会花太多的时间去考虑他们报酬的各个方面，而不去花足够精力来经营自己的公司。

一个经理掌握内部消息，并且可以影响结果与公布时间。这种能力会产生让他们做出不利于股权人利益决策的影响。一种对减轻这种问题比较极端的建议是使高管在买入或卖出其公司股票之前，比如一个星期，公布其意向[㊀]。一旦公布了交易意向，高管就必须执行。这会使市场对高管所做交易的原因做出自己的结论。因此，在高管买入之前股票价格可能会上涨，而在卖出之前价格会下跌。

15.3　会计问题

与其他形式的报酬一样，雇员股票期权对公司来讲是一种费用，而对雇员来讲是获益。尽管对许多人来讲这一点是显然的，但这却很有争议。许多高管似乎认为除非期权是实值，否则是没有价值的。因此，他们认为对公司而言，平值期权并不是一种费用。事实上，如果期权对雇员是有价值的，那么对公司的股权人与公司而言，这肯定是一种费用，因为不存在免费的午餐。期权对公司的费用来自于公司已经同意当其股票发挥很好时，公司将以低于可以在市场上收取的价格来卖给雇员。

1995 年前，当公司发行股票期权时所记入**利润表**(income statement)中的费用为期权的内在价值。大多数期权在发行时都是平值的，所以这项费用是零。1995 年发行了会计准则 FAS 123。许多人都认为新准则会要求公司对期权按其公平价值记作费用。但是，经过激烈的游说，1995 年版的 FAS 123 只是鼓励发行期权的公司按公平价值将期权在利润表中作为费用，但公司并不一定非要这样做。如果公平价值没有被记在利润表中，那么必须在公司的账目上以脚注的形式加以说明。

现在会计准则已经改变，它要求公司按股票期权的公平价值将其列为费用记在利润表中。2004 年 2 月，国际会计准则理事会(International Accounting Standard Board)发表了 IAS 2，要求公司从 2005 年开始将股票期权作为费用。在 2004 年 12 月，FAS 123 做了修订，要求美国从 2005 年开始将雇员股票期权作为费用。

新会计准则的效果是在期权授予日对其定价，而且在期权被卖出年份列为当年度的费用。此后无须再做定价。可以讲，在每个财务年度末(或每个季度)都应当对期权重新定价，直到期权被行使或到有效期末[㊁]。这种处理方式将雇员股票期权与公司所做的其他衍生产品交易一视同仁。如果期权在某一年比上一年更值钱，那么就应当在年终计入更多的费用；但是如果其价值下降，那么之前作为费用的一部分将被收回，这对公司收入具有很好的效应。这种处理方式有很多优点，对公司账目的累计效果反映了期权的真正费用(当期权不被行使时为 0，被行使时是期权的收益)。尽管每年的记账依赖于所用的期权定价模型，但在期权整个有效期内的累计账目却与此无关[㊂]。可以讲，这样做会大大减少公司进行如本章所述的倒填日期的动机。常常有人指出，这样的会计处理方式的不利之处是会在利润表中引入波动性[㊃]。

非传统期权方案

很容易理解 2005 年之前为什么雇员期权在授予日往往是平值的，而且在期权有效期内其执

㊀ 这也适用于对期权的行使。因为如果高管要想行使期权并将所得股票卖掉，那么他将同样需要付出意向通知。

㊁ 见 J. Hull and A. White，"Accounting for Employee Stock Options：A Practical Approach to Handling the Valuation Issues，" *Journal of Derivatives Accounting*，1，1(2004)：3 – 9.

㊂ 有趣的是，如果期权是按现金支付而不是由公司发行新的股票，那么期权是按这里所述的会计方式处理的。然而，按现金结算或向雇员出售新股票是没有经济差别的。

㊃ 事实上，如果股票期权被重新定价的话，利润表的波动性很可能会降低。当公司生意好时，对管理人期权重新定价时会降低收入，而公司生意不好时，收入将会增加。

行价格保持不变。任何与这种标准方式不同的期权都很有可能需要公司将其作为费用。现在会计准则已经改变，所有的期权都需要按公平价格来作为费用。因此，许多公司都在考虑使用不同于标准形式的期权。

一种反对标准方式期权的论点是当股票市场很好时，即使其公司股票的表现还不如市场，雇员的收益也会很大。克服这个问题的一种做法是将期权的执行价格与 S&P 500 指数联系起来。假如在期权授予日股票价格是 30 美元，而 S&P 500 指数为 1 500，最初的执行价格定位 30 美元。如果 S&P 500 增长 10% 到 1 650，那么股票期权的执行价格也上涨 10% 到 33 美元。如果 S&P 500 下降 15% 到 1 275，那么股票期权的执行价格也将下降 15% 到 25. 50 美元。这样做的效果是，只有当公司股票的表现好于 S&P 500 指数的表现时，期权才会成为实值。与其使用 S&P 500 作为参考指数，公司也可以使用同类企业的股票构造的指数。

标准期权的另一种变形是将执行价格以某种预定的方式上涨，因此只有当股票价格至少提供某种收益时，期权才会成为实值。在有些情况下，盈利目标被预先指定，而只有当盈利目标被满足时期权才会生效[⊖]。

15. 4 定价

在雇员股票期权定价方面，会计准则给了公司很大的选择余地。本节我们将叙述其中的几种方法。

15. 4. 1 快捷而粗略的方法

一种常常被使用的方法是基于所谓的**预期寿命**(expected life)，这是指雇员行使期权或期权作废的平均时间。预期寿命可以大致地从记录雇员提前行使期权的历史数据来估计，并且反映等待期、雇员离开公司的影响以及 15. 1 节中所述的雇员股票期权比普通期权更倾向于被提前行使的影响。这个方法是利用布莱克-斯科尔斯-默顿模型，并将期权的有效期 T 设成预期寿命。波动率一般是按 14. 4 节中所述的方法由几年历史数据来估计的。

应当强调的是，以这种方式应用布莱克-斯科尔斯-默顿模型是没有什么理论依据的。没有什么理由认为期限为 T 的欧式期权大致等于我们所关心的预期寿命为 T 的美式期权价格。但是这种模型所给出的价格并不是完全不合理。当将期权作为费用时，公司会常常提到在布莱克-斯科尔斯-默顿计算中所用的预期寿命及波动率。

【例 15-1】 一家公司在 2011 年 11 月 1 日授予其高管 100 万份期权。当时的股票价格是 30 美元，并且期权的执行价格也是 30 美元。期权有效期为 10 年，等待时间为 3 年。公司在过去的 10 年内一直在发行类似的平值期权，而这些期权被行使或作废的平均时间是 4. 5 年，因此公司决定使用 4. 5 年的预期寿命。利用几年的历史数据，公司估计出的股票价格长期波动率为 25%。在今后 4. 5 年内所付股息的现值估计为 4 美元，4. 5 年期的无风险零息利率为 5%。因此，由布莱克-斯科尔斯-默顿模型对期权定价时(按 14. 12 节所述的方式对股息进行调整)$S_0 = 30 - 4 = 26$，$K = 30, r = 5\%$，$\sigma = 25\%$ 以及 $T = 4.5$ 年。布莱克-斯科尔斯-默顿公式给出了一个期权的价值为 6. 31 美元。因此，在利润表上将 $1\,000\,000 \times 6.31 = 6\,310\,000$ 美元列为费用。

15. 4. 2 二叉树方法

对雇员股票期权定价的另一种比较复杂的方法是像在第 12 章中那样建立二叉树，并且在倒

⊖ 对这种期权的定价是非常困难的，因为期权既依赖于公司会计数目，又依赖于股票价格，在定价时一般假设目标会达到。

退计算时做以下调整：①期权是否已经生效；②雇员离开公司的概率；③雇员选择行使期权的概率。期权的条款决定了在树上所选节点上期权是否已经生效，人事变更方面的历史数据可以用来估计期权被提前行使或由于雇员离开公司而作废的概率。雇员选择在树上不同的支点行使期权的概率是较难数量化的。显然，当股票价格与执行价格的比率增加并与距离到期日越近时，这个概率也会增加。如果有足够多的历史数据可以使用，那么作为这两个变量函数的行使期权概率可以被估计出来，至少在近似意义上是可以的。

【例 15-2】 假设一家公司所授予的股票期权延续 8 年，在 3 年后有效。股票价格与执行价格均为 40 美元，股票价格的波动率是 30%，无风险利率是 5%，而且公司不付股息。图 15-1 展示了如何使用一个 4 步二叉树来对期权定价(这只是为了演示，在实际中需要更多的步骤)。在这种情况下，$\sigma=0.3$，$\Delta t=2$，$r=0.05\%$。于是，使用第 12 章中的记号，$a=e^{0.05\times2}=1.105\,2$，$u=e^{0.3\times\sqrt{2}}=1.528\,5$，$d=1/u=0.654\,3$，以及 $p=(a-d)/(u-d)=0.515\,8$。价格向上运动的概率为 0.515 8，而向下运动的概率是 0.484 2。期权有可能被提前行使的三个节点是 D、G 和 H(在节点 B 期权尚未生效，在其他节点不是实值)。我们假设期权持有人在节点 D、G 和 H 上选择行使期权的概率(在此前没有被行使的条件下)分别为 40%、80% 和 30%。我们假定在每一步上雇员离开公司的概率是 5%(相当于每年雇员变更的速度大约为 2.5%)。为了方便计算，我们假定雇员离开公司的时间总是在时间段开始。如果在期权生效前或虚值时雇员离开公司，那么期权将会作废。在其他情况下，必须立即行使期权。

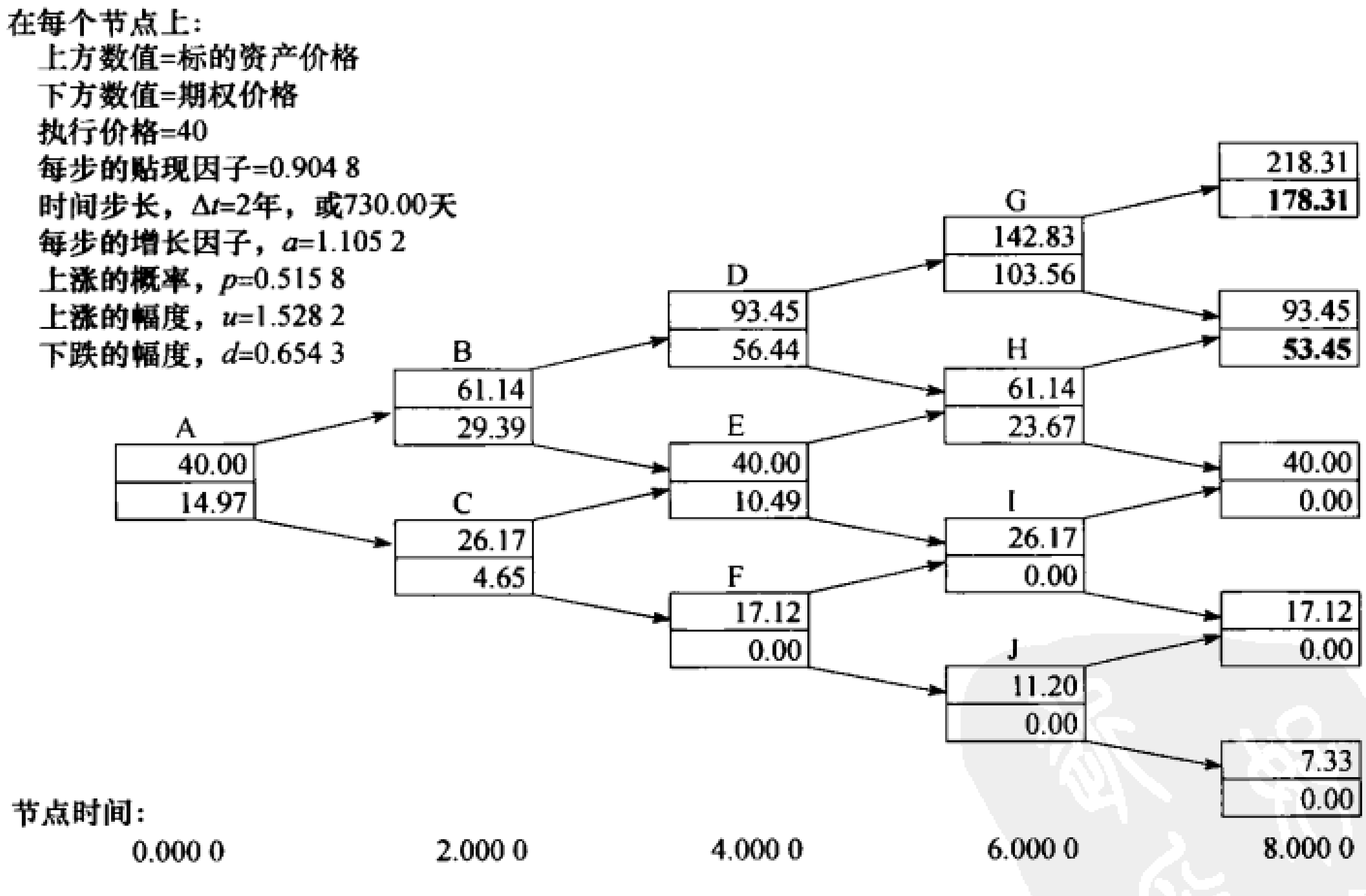


图 15-1 例 15-2 中雇员期权的定价

在最后节点上，期权的价值等于内涵价值。考虑对应于第 6 年的节点。节点 I 和 J 上很简单，由于它们之后的节点上期权没有价值，因此在这两个节点上期权的价值为零。在节点 H 上有 30% 的概率雇员将会选择行使期权。在雇员选择不行使期权的情况下，有 5% 的概率雇员将会由于离开公司而必须立即行使期权。因此，选择行使期权的总概率为 $0.3+0.7\times0.05=0.335$。如果期权被行使，它的价值是 $61.14-40=21.14$。如果不被行使，它的价值是

$$e^{-0.05\times2}(0.515\,8\times53.45+0.484\,2\times0)=24.95$$

在节点 H 上期权的值为

$$0.335 \times 21.14 + 0.665 \times 24.95 = 23.67$$

与此类似，在节点 G 上期权的值为

$$0.81 \times 102.83 + 0.19 \times 106.64 = 103.56$$

我们接下来考虑对应于第四年的节点。在节点 F 上期权的价值显然是 0。在节点 E 上，有 5% 的概率由于雇员离开公司而放弃期权，95% 的概率会保留期权。在后一种情况下，期权的价值是

$$e^{-0.05\times2}(0.5158 \times 23.67 + 0.4842 \times 0) = 11.05$$

因此在这个节点上，期权的价值是 $0.95 \times 11.05 = 10.49$。在节点 D，行使期权的概率是 0.43，保留期权的概率为 0.57，期权的价值是 56.44。

下面考虑对应于第二年的节点。期权还没生效，而作废的概率是 5%，再保留两年的概率是 95%，这就导致了图 15-1 中的价格。期权在最初时价格是 14.97（这可以与利用同二叉树所给出的普通期权价格 17.98 进行比较）。

15.4.3 行使倍数方法

Hull 和 White 建立了一种简单的模型，其中一旦期权生效并且股票价格与执行价格的比率高出某一水平时，雇员将立即行使期权[1]。他们将导致期权被行使的股票价格与执行价格的比率称为**行使倍数**（exercise multiple）。期权的价格可由二叉树或三叉树来计算。如 26.6 节所述，在构造二叉树或三叉树时，保证引起期权被行使的股票价格位于树的节点上是很重要的。例如，当执行价格是 30 美元，并且假设当股票价格与执行价格的比率达到 1.5 倍时，雇员将行使期权。在构造树时，应当使树上有的节点正好在股票价格为 45 美元的水平上。树形的计算与例 15-2 相似，并且将雇员离开公司的可能性考虑在内[2]。为了估计行使倍数，我们需要从历史数据计算在行使期权时股票与执行价格的平均倍数（在到期日行使与雇员由于终止工作而行使期权不包括在这个计算内）。这也许比预期寿命容易估计，因为后者在很大程度上依赖于股票价格所沿的特殊轨迹。

15.4.4 基于市场的处理方法

对雇员股票期权定价的一种方法是看市场能为期权支付多少价格。思科公司在 2006 年试用了这种方法，它提出了向机构性投资者出售具有同样条款的期权。这种方法遭到了证券交易委员会（SEC）的拒绝，理由是参加对期权竞争的投资者不够广泛。

内华达州立银行（Zions Bancorp）提出了另一种方式，它建议在市场上变卖与雇员期权实际实现收益相同的证券。例如，某一个雇员股票期权的执行价格为 40 美元，并且结果是正好有 1% 的雇员在 5 年后当股票价格为 60 美元时行使了期权，2% 的雇员在 6 年后当股票价格为 65 美元时行使了期权，等等。这样，投资者所持有证券的 1% 在 5 年后具有 20 美元的收益，2% 在 6 年后具有 25 美元的收益，等等。

内华达州立银行利用自己所授予雇员的期权对这一想法做了检验，并采用了一种**荷兰式拍卖**（Dutch auction）形式向投资者拍卖的过程[3]。在这种拍卖过程中，个人或公司递交筹码，表明打算支付的价格以及准备购买的期权数目。成交价格是使得按此或按更高价格购买期权的累计总数超

---

[1] 见 J. Hull and A. White, "How to value employee stock options," *Financial Analysts Journal*, 60, 1 (January/February, 2004): 3-9。

[2] 实现这种方法的软件可以在网页 www.rotman.utoronto.ca/~hull 上下载。

[3] 荷兰式拍卖是一种公开的减价拍卖形式，在这种拍卖过程中，被拍卖的物品价格每隔一定的时间会下降一定数量。——译者注

过要卖期权总数的最高价格。准备按高于成交价格购买期权的买主的买单首先得到满足，而准备按成交价格购买期权的买主得到剩余的部分。内华达州立银行在 2007 年 10 月宣布其所建议的市场方法已经得到了证券交易委员会的认同。

15.4.5 稀释效应

当雇员行使期权时，公司需要发行新股，并按低于目前市场上的价格将其卖给雇员，这将会导致对公司现有股票在某种程度上的稀释效应。很自然人们会认为稀释效应是发生在期权被行使的时刻，但事实上并非如此。如 14.10 节所述，当市场上第一次得到有关授予股票期权的消息时，股票价格就已经被稀释：市场上已经预料到行使期权的这种可能性，并立即体现在股票的价格上。在业界事例 14-3 中的例子强调了这一点。

当期权被公布时，股票价格反映了可能的**稀释**(dilution)效应。只要在对期权定价时使用这个价格，那么就没有必要去为了稀释效应而调整期权价格。在许多情况下，市场会预料公司将不断授予雇员股票期权，所以股票的市场价格在期权公布之前就已经预料到了这种稀释作用。

如果一家公司正在考虑发行使市场感到意外的期权，那么期权的费用可以由例 14-7 中所述的方法来计算。这项费用可以与较低的正常雇员报酬以及较少的雇员跳槽等好处相比较。

15.5 倒填日期丑闻

如果在讨论雇员股票期权时不提及倒填日期丑闻，那么这样的讨论是不完整的。倒填日期是将文件的发行日期写成早于现在日期的行为。

假设一家公司决定在 4 月 30 日当股票价格为 50 美元时向其雇员授予平值期权。如果在 4 月 3 日股票价格是 42 美元，这时企图将期权当成好像是在 4 月 3 日被授予的，并且使用 42 美元的执行价格。这样的做法很诱人，只要公司在 4 月 30 日决定向雇员授予期权时将期权报告成 8 美元实值，这样做是合法的。但是如果公司将期权报告成为 4 月 3 日的平值期权，那么这种做法是非法的。在 4 月 3 日执行价格为 42 美元的期权价值比其在 4 月 30 日的价格要小得多。当公司将期权报告在 4 月 3 日被授予时，股权人被蒙骗了授予期权的真正费用。

倒填日期到底有多么普遍？为了回答这个问题，研究人员调查了是否在公司公布的期权授予日期，其股票价格在平均意义下比较低。Yermack 的早期研究表明，股票价格在公司报告的授予日后倾向于上涨[1]。Lie 推广了 Yermack 的结果，并且证明了在公司报告期权授予日前股票价格会倾向于下跌[2]，而且他还证明了授予日前后股票价格变化的规律随时间而更加明显。他们的结果总结在图 15-2 中。该图显示了在 1993 ~ 1994 年，1995 ~ 1998 年与 1999 ~ 2002 年间在期权授予日前后股票价格的异常收益率(异常收益率是指对市场组合以及股票 Beta 进行调整后的收益)。标准的统计分析表明，像在图 15-2 中所示的规律依靠碰巧观察到几乎是不可能的，这使得学术界与监管部门在 2002 年断定倒填日期已经变得非常普遍。2002 年 8 月，证券交易委员会要求公共企业将授予的期权在两天内进行报告。Heron 和 Lie 证明了这项要求大大地降低了在授予日前后的异常收益率，尤其是对遵循这项要求的企业更是如此[3]。也许可以说图 15-2 中的规律是因为管理人员仅仅是在坏消息后或好消息前选择授予期权，但是 Heron 和 Lie 的研究结果提供了有力证据，情况并不是这样的。

---

[1] 见 D. Yermack, "Good timing: CEO stock option awards and company news announcements," *Journal of Finance*, 52 (1997), 449 - 476。

[2] 见 E. Lie, "On the timing of CEO stock option awards," *Management Science*, 51: 5(May 2005), 802-12。

[3] 见 R. Heron and E. Lie, "Does backdating explain the stock price pattern around executive stock option grants," *Journal of Financial Economics*, 83, 2(February 2007), 271-95。

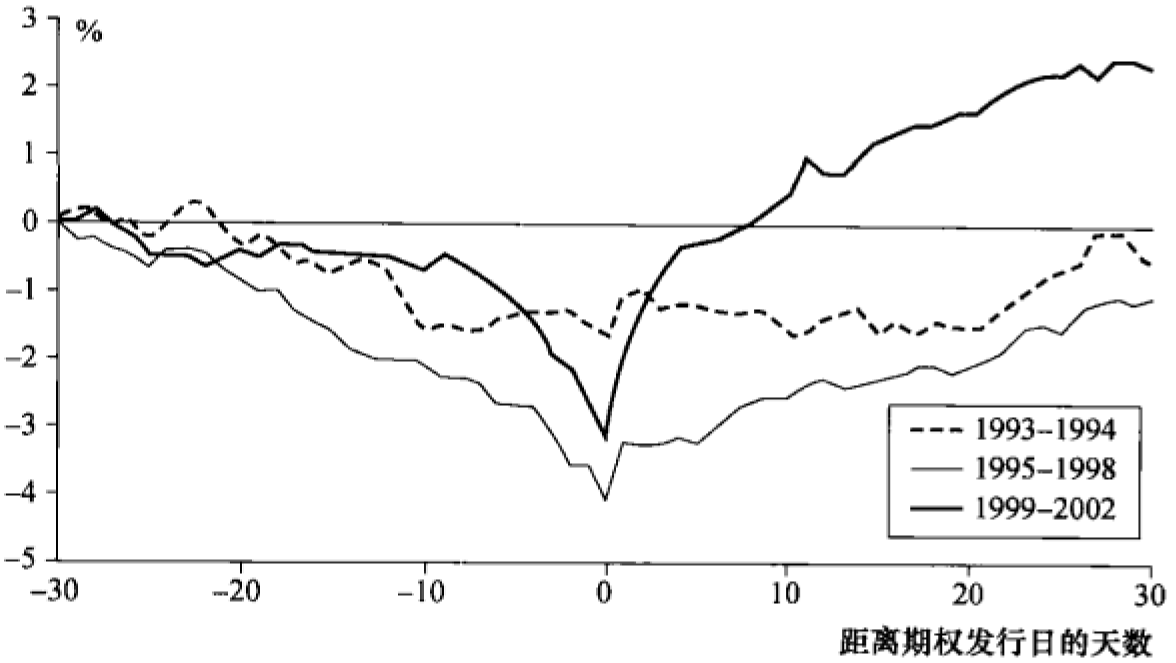


图 15-2 Erik Lie 关于倒填日期行为的证据

对非法倒填期权授予日期的美国公司数量有各种估计。几十家甚至几百家公司好像都采取了这种做法。许多公司似乎都采纳了一种可以接受不超过一个月的倒填日期的态度。由于倒填日期行为被曝光而导致了一些公司总裁的辞职。2007 年 8 月，博科通信系统公司（Brocade Communications Systems，Inc.）的 Gregory Reyes 是第一个被审判并被判有倒填股票期权日罪的公司总裁。据说，Reyes 先生曾向一位人事部门职员讲过："只要你不被抓住，那么就不是非法的。"2010 年 6 月，他被判处 18 个月的狱刑，并被罚了 1 500 万美元。

涉及倒填日期的公司不得不重新报告财务报表，而且成为了声称由于公司倒填期权日期而遭受经济损失的股权人集体控告的被告。例如，迈克菲公司（McAfee）在 2007 年 12 月宣布将重新报告 1995 ~ 2005 年之间的盈利，最后下调营业额高达 1.374 亿美元。2006 年，公司拿出 1 380 万美元来应付官司。

小　结

过去 20 年里，高管报酬迅猛增长，而且大部分的增长来自于行使被授予高管的股票期权，直到 2005 年，授予平值股票期权是很受欢迎的补偿方式。这些期权对利润表毫无影响，但对雇员却很有价值。现在的会计准则要求将期权作为费用。

对雇员股票期权的定价有许多不同的方法。一种普遍的做法是利用布莱克-斯科尔斯-默顿模型，将期权的有效期设成等于行使期权或期权作废的预期时间。另一种做法是假设当股票价格与执行价格的比率达到一定的水平时就立即行使期权。第三种方法是试图估计期权行使概率、股票价格与执行价格的比率，以及期权到期时间之间的关系。这种做法可以与二叉树结合起来。

学术界的研究表明，毫无疑问许多公司参与了由倒填股票期权授予日期来减少执行价格，并且仍然将期权当成平值期权的非法活动，对这种非法行为的第一次审判是在 2007 年。

推荐阅读

Carpenter, J., "The Exercise and Valuation of Executive Stock Options," *Journal of Financial Economics*, 48, 2 (May): 127–58.

Core, J. E., and W. R. Guay, "Stock Option Plans for Non-Executive Employees," *Journal of Financial Economics*, 61, 2 (2001): 253–87.

Heron, R., and E. Lie, "Does Backdating Explain the Stock Price Pattern around Executive Stock Option Grants," *Journal of Financial Economics*, 83, 2 (February 2007): 271–95.

Huddart, S., and M. Lang, "Employee Stock Option Exercises: An Empirical Analysis," *Journal of Accounting and Economics*, 21, 1 (February): 5–43.

Hull, J., and A. White, "How to Value Employee Stock Options," *Financial Analysts Journal*, 60, 1 (January/February 2004): 3–9.

Lie, E., "On the Timing of CEO Stock Option Awards," *Management Science*, 51, 5 (May 2005): 802–12.

Rubinstein, M., "On the Accounting Valuation of Employee Stock Options," *Journal of Derivatives*, 3, 1 (Fall 1996): 8–24.

Yermack, D., "Good Timing: CEO Stock Option Awards and Company News Announcements," *Journal of Finance*, 52 (1997): 449–76.

练习题

15.1 为什么2005年之前公司授予平值期权的做法很受欢迎？2005年有何变化？

15.2 典型的雇员期权与交易所或场外市场交易的美式期权之间有哪些主要区别？

15.3 解释为什么在无股息的股票上雇员期权常常在有效期之前被行使，而关于这种股票的交易所交易的看涨期权却永远不会被提前行使。

15.4 "股票期权很好，因为它提供了使高管为股权人的最佳利益做努力的动机"。讨论这种观点。

15.5 "向高管授予股票期权就好像是允许足球队员对球赛结果下赌注一样"。讨论这种观点。

15.6 为什么2002年之前美国的一些公司倒填期权授予日期？2002年后有何变化？

15.7 如果股票期权在每个季度末被重新定价，这对减少倒填日期有哪种帮助？

15.8 解释如何进行分析来产生图15-2中的图形。

15.9 在5月31日，一家公司的股票价格是70美元，现有100万股。一个高管行使了10万份执行价格为50美元的股票期权。这对股票价格有何影响？

15.10 某公司财务报表的一项说明讲道："我们的高管股票期权延续10年，在4年后生效。我们对今年所授期权的定价是使用布莱克-斯科尔斯-默顿模型，预期寿命为5年，波动率为20%。"这说明了什么？讨论公司使用的模型方法。

15.11 在一个1万份雇员期权的荷兰式拍卖中，所下的注码如下：

(a) 下注为3 000份期权，价格为30美元；

(b) 下注为2 500份期权，价格为33美元；

(c) 下注为5 000份期权，价格为29美元；

(d) 下注为1 000份期权，价格为40美元；

(e) 下注为8 000份期权，价格为22美元；

(f) 下注为6 000份期权，价格为35美元。

拍卖的结果是什么？他们各买到多少？

15.12 一家公司向其高管授予了50万份期权。股票价格与执行价格均为40美元，期权延续10年，4年后生效。公司决定使用5年的预期寿命，每年30%的波动率来对期权定价。公司不付股息，而无风险利率是4%。公司在其利润表中所报的费用是多少？

15.13 一家公司的CFO说："对股票期权的会计处理方式很荒唐。当股票价格是30美元时，我们给公司雇员授予了1 000万份平值期权。我们估计在授予日每份期权的价值为5美元。年终股票价格已经下降到4美元，但我们仍需要在利润表中记上5 000万美元的费用。"请讨论。

作业题

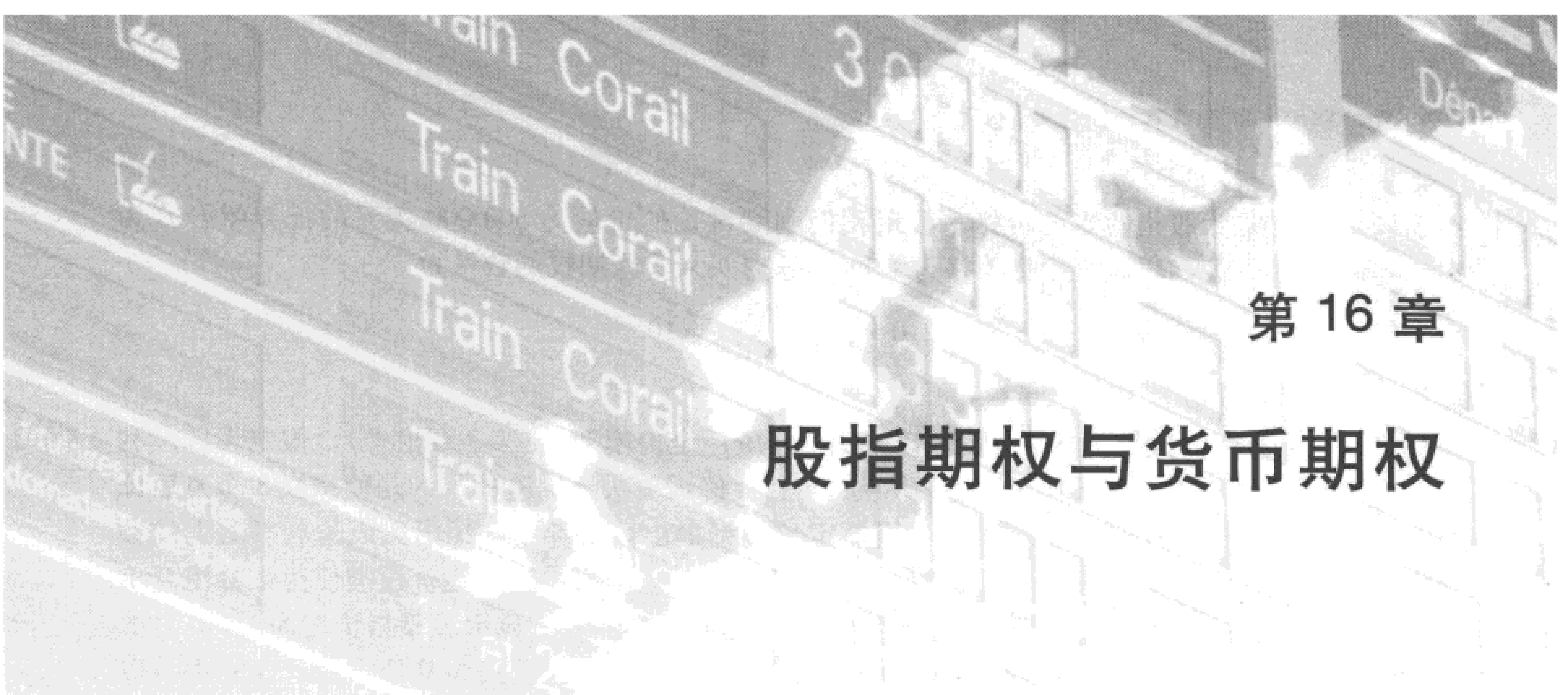
15.14 在例 15-2 中，雇员股票期权的(风险中性)预期寿命是多长？在布莱克-斯科尔斯-默顿公式中使用预期寿命时期权的价格是多少？

15.15 一家公司向其雇员授予了 200 万份期权。股票价格与执行价格均为 60 美元，期权延续 8 年，在两年后生效。公司决定使用的预期寿命为 6 年，波动率为每年 22%，股票每年支付 1 美元的股息，在每年的中期付出。无风险利率是 5%。在利润表上，公司所报的期权费用是多少？

15.16 一家公司向其雇员授予了 100 万份期权。股票价格与执行价格均为 20 美元，期权期限 10 年，在 3 年后生效。股票的波动率是 30%，公司不付股息。利用 4 步二叉树来对期权定价。假定在二叉树上每一步的末尾，有 4% 的概率雇员会离开公司。假设在每个节点上，在节点之前没有提前行使期权的条件下，并当期权已经生效和期权为实值时，雇员自愿提前行使期权的概率为

$$1 - \exp[-a(S/K-1)/T]$$

式中 S 为股票价格，K 为执行价格，T 为期限，以及 $a=2$。



第 16 章

股指期权与货币期权

在第 9 章我们引入了股指期权与货币期权。本章将详细讨论这些产品。我们将介绍产品的运作过程并讨论这些产品的一些应用。在本章的后半部分，我们将在第 14 章中提出的定价方法推广到连续股息的情形，然后证明股指与货币都类似于支付连续股息的股票价格。因此，对支付连续股息的股票期权定价结论也适用于对股指及货币的期权产品。

16.1 股指期权

有若干家交易所交易股指期权。这些股指中有的反映市场整体走向，有的是基于某个特殊行业的行情(例如，计算机、石油及天然气、交通及电信等行业)。芝加哥期权交易所交易的期权包括 S&P 100 指数上的美式与欧式期权(OEX 及 XEO)、S&P 500 指数上的欧式期权(SPX)、道琼斯工业平均指数上的欧式期权(DJX)以及纳斯达克 100 指数上的欧式期权(NDX)。在第 9 章我们曾提到过芝加哥期权交易所交易个体股票上的 LEAPS 与灵活期权，该交易所也提供关于股指上的期权交易。

每份股指期权合约的标的资产为指数值的 100 倍(注意，道琼斯指数期权为道琼斯通常报价的 0.01 倍)。股指期权是以现金形式结算。这意味着，在期权被行使时，看涨期权持有者收入的现金额为$(S-K)\times 100$，同时期权承约者需支付现金，这里的 S 为期权行使日休市时的指数值，K 为执行价格。看跌期权持有者在行使时收入现金额为$(K-S)\times 100$，期权承约人需支付这笔现金。

16.1.1 证券组合保险

证券组合管理人可以利用期权来控制价格下滑的风险。假定股指的当前价格为 S，某管理人经营一个完全分散化的证券组合，该证券组合的 β 系数为 1。β 系数为 1 的交易组合收益反映了股指收益。假定交易组合收益率等于股指的收益率，那么交易组合价格的百分比变化大约等于股指价格百分比的变化。这里期权合约的标的资产为 S&P 500 指数的 100 倍。如果对于证券组合中每 $100S$ 美元资产，管理人买入一份执行价格为 K 的看跌期权，这样，管理人就可以使证券组合价值在股指价格低于 K 时得到保护。假定证券组合的价值为 500 000 美元，而股指的取值为 1 000，此时，组合的价值等于 500 乘以指数值，所以证券组合管理人买入 5 份 3 个月期限执行价格为 900 的看跌期权则可以保证在今后 3 个月，证券组合价值不会低于 450 000 美元。

为了说明运作过程，我们假定在 3 个月时股指下跌到 880。证券组合价值大约为 440 000 美元。期权收益为 $5\times(900-880)\times 100=10\,000$ 美元，该收益保证了证券组合的总价值为 450 000 美元。

16.1.2 证券组合 β 不为 1.0 时的情形

如果证券组合的 β 不等于 1.0，对于证券组合中每 $100S_0$ 的价值，我们必须买入 β 数量的看

跌期权，这里 S_0 为股指的当前价格。假定我们刚刚讨论的价值为 500 000 美元的证券组合 β 为 2.0 而不是 1.0，我们仍假定股指价格为 1 000，这时买入看跌期权的数量为

$$2.0\times\frac{500\ 000}{1\ 000\times 100}=10$$

而不是前面计算的数量 5。

为了找出合适的执行价格，我们可以采用资本资产定价模型(见第 3 章附录)。假定无风险利率为 12%，证券组合与股指的收益率平均为 4%，我们需要买入保险的目的是使得在 3 个月后证券组合价值不低于 450 000 美元。由资本资产定价模型得出，证券组合超出无风险利率之上的额外收益等于 β 乘以股指组合超出无风险利率之上的额外收益。资本资产定价模型使得证券组合价值在 3 个月后的期望值可以由 3 个月后的股指价格来描述。表 16-1 显示了股指价格为 1 040 时的情形，这时，证券组合价值在 3 个月时期望值为 530 000 美元。当股指为其他值时，我们也可以进行类似的计算。表 16-2 显示了计算结果。买入期权的执行价格应等于证券组合被保护的目标价值所对应的股指价格。此时，证券组合的保护价值为 450 000 美元，因此买入的 10 份看跌期权的执行价格为 960 美元。[⊖]

表 16-1　在 3 个月后股指为 1 040 时，证券组合的期望值，$\beta=2.0$

3 个月后股指价格	1 040
由股指价格变化所得收益	40/1 000 = 4%(每 3 个月)
股指股息	0.25 × 4% = 1%(每 3 个月)
股指的整体收益	4% + 1% = 5%(每 3 个月)
无风险利率	0.25 × 12% = 3%(每 3 个月)
股指超出无风险利率的额外收益	5% − 3% = 2%(每 3 个月)
证券组合超出无风险利率的额外收益	2 × 2% = 4%(每 3 个月)
证券组合的预期收益	3% + 4% = 7%(每 3 个月)
证券组合股息	0.25 × 4% = 1%(每 3 个月)
证券组合预期增值	7% − 1% = 6%(每 3 个月)
证券组合期望值	500 000 × 1.06 = 530 000(美元)

注：这里证券组合 $\beta=2.0$。

表 16-2　证券组合价值在其 β 等于 2.0 时与股指价值的关系

3 个月后股指价格	3 个月后证券组合价值(以美元为计量)	3 个月后股指价格	3 个月后证券组合价值(以美元为计量)
1 080	570 000	960	450 000
1 040	530 000	920	410 000
1 000	490 000	880	370 000

为了说明保险策略，假定股指在 3 个月后下跌到 880，如表 16-2 所示，证券组合价值大约为 370 000美元，看跌期权的收益为(960 − 880) × 10 × 100 = 80 000 美元，这一数量刚好为证券组合管理人将交易组合价值 370 000 美元提高到 450 000 美元所需要的资金数量。

以上例子从两个说明了当 β 增大时，对冲的成本也会增大的两个理由：所需的看跌期权数量增加，同时期权的执行价格也会增大。

⊖ 在今后 3 个月，股息收益所得大约为 500 000 美元的 1%，即 5 000 美元。如果设定证券组合被保护价值 450 000 美元中包括股息收益，我们选择的执行价格应对应于 445 000 美元而不是 450 000 美元，执行价格应该选为 955 美元。

16.2　货币期权

货币期权主要在场外市场交易，该市场的优点在于交易者可以进行大额交易，并且市场中产品的执行价格、到期日和其他特性可以被特殊设计，以满足公司资金部的特殊需要。虽然美国 NASDAQ OMX 也进行美式货币期权和欧式货币期权交易，但交易所交易市场的规模远小于场外市场。

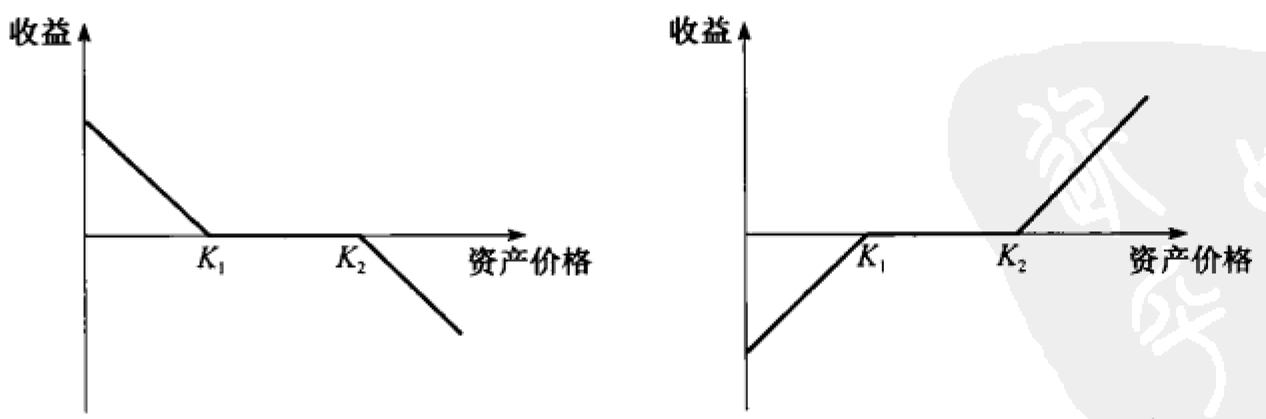
一个欧式看涨期权的实例如下：期权持有人有权以汇率 1.2（即 1 欧元兑换 1.2 美元）的价格买入 100 万欧元。在期权到期时，假定实际汇率为 1.25，期权收益为 1 000 000 × (1.25 − 1.20) = 50 000 美元。类似地，一个欧式看跌期权可以给期权持有者以汇率 0.9（即 1 澳元兑换 0.9 美元）的价格卖出 1 000 万澳元。在期权到期时，假定实际汇率为 0.87，期权收益为 10 000 000 × (0.90 − 0.87) = 300 000 美元。

对于一家希望对冲其外汇头寸的公司而言，外汇期权是一种十分诱人的外汇远期替代产品。在未来某一确定时刻会收到英镑的公司可以买入在同一时间到期的英镑看跌期权来对冲其风险，这种对冲策略将保证英镑的价值不低于执行价格，同时允许公司从有利的汇率变动中获利。类似地，在未来某确定时刻将支付英镑的公司可以买入在同一时刻到期的英镑看涨期权来对冲其风险，期权会保证英镑的价值不高于某一水平，同时允许公司从有利的汇率变动中获利。远期合约锁定了将来某笔外汇交易中的汇率，而期权则提供了一种保险。这种保险并不是没有代价的，进入远期合约无须付费，但获得期权需要首先支付一定的费用。

范围远期合约

范围远期合约（range-forward contract）是标准远期合约的变形，这一合约可用于对冲外汇风险。考虑某家美国公司，该公司得知在 3 个月后将接受 100 万英镑。假定 3 个月期的远期汇率为每英镑 1.52 美元。这家公司可以进入远期合约短头寸来锁定汇率，在远期合约中这家公司在 3 个月时将卖出 100 万英镑。这样做公司能够确定在 3 个月后付出 100 万英镑的同时收入 152 万美元。

另一种做法是买入执行价格为 K_1 的看跌期权，同时卖出执行价格为 K_2 的看涨期权，其中 $K_1 < 1.52 < K_2$。这种策略被称为范围远期合约的短头寸，该交易策略的收益在图 16-1a 中有所展示，该交易策略的两个期权都是针对于 100 万英镑。在 3 个月时，如果汇率低于 K_1，这时看跌期权将被行使，因此公司能够以 K_1 的价格卖出 100 万英镑；当汇率介于 K_1 与 K_2 之间时，两个期权均不会被行使，公司以市场汇率价格卖出英镑；如果汇率高于 K_2，这时看涨期权将被行使，造成公司以汇率 K_2 卖出 100 万英镑。图 16-2 显示了 100 万英镑外汇交易所对应的汇率。



a）范围远期的短头寸的收益　　b）范围远期的长头寸的收益

图 16-1　两种情况下的收益

如果该公司知道 3 个月时将支出而不是收入 100 万英镑，公司可以卖出执行价格为 K_1 的看跌期权并同时买入一个执行价格为 K_2 的看涨期权。这种策略被称为范围远期合约的长头寸，该交易策略的收益显示在图 16-1b 中。如在 3 个月时汇率低于 K_1，看跌期权将被行使，公司以汇率 K_1

买入100万英镑；如果汇率介于K_1与K_2之间，两个期权均不会行使，公司能够以市场汇率价格买入100万英镑；如果汇率高于K_2，看涨期权将被行使，公司能够以K_2的汇率买入100万英镑。买入100万英镑所付汇率与前面收入100英镑的汇率相同（见图16-2）。

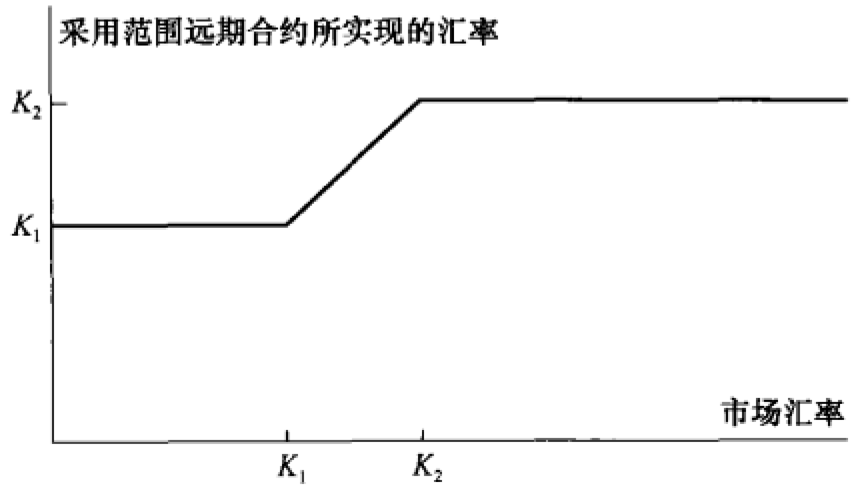


图16-2 两种不同策略

在实践中，构造范围远期时往往会使看跌期权价格等于看涨期权价格，从而范围远期合约的成本为0，这与设立常规远期合约的成本为0相类似。假定美国与英国的利率均为5%，外汇现市汇率为1.52（这与远期汇率相同）。进一步假设汇率波动率为14%。我们可以利用DerivaGem来证明执行价格为1.50（即卖出1英镑的价格为1.50美元）的看跌期权等于执行价格为1.541 3（即1.541 3美元买入1英镑）看涨期权的价格（两个期权价格均为0.032 50）。因此，令$K_1=1.50$，$K_2=1.541\ 3$，因此实例中的远期合约成本为0。

当一个范围远期合约中看涨与看跌期权的执行价格越来越近时，范围远期合约会成为一个常规远期合约。一个范围远期合约的短头寸会变为远期合约的短头寸，而一个范围远期合约的长头寸会变成远期合约的长头寸。

16.3 支付连续股息的股票期权

本节我们会建立一个简单规则，它可以将无股息股票上欧式期权公式的结果扩展到支付已知连续股息的股票期权及货币期权，然后将说明如何利用这些结果来推导关于股指及货币期权的定价公式。

股息会使股票在除息日的价格下跌，而下跌幅度刚好等于股息量。连续股息收益率q会使股票价格增长幅度比没有支付股息的股票价格增长幅度减少q。如果支付连续股息的股票由今天的价格S_0增长到T时刻的价格S_T，那么在没有股息的情况下，股票价格会从今天的价格S_0增长到T时刻的价格S_Te^{qT}。换句话讲，股票价格会从今天的价格S_0e^{-qT}增长到T时刻的价格S_T。

这一分析说明，在以下两种情形下股票价格在时间T会产生相同的概率分布：

- 股票起始价格为S_0，该股票支付连续股息收益率q。
- 股票起始价格为S_0e^{-qT}，该股票无任何股息。

这样我们可以得出一个简单规则：当对期限为T而且支付股息收益率为q的股票欧式期权定价时，我们可以将今天的股票价格由S_0降至S_0e^{-qT}，然后将期权按无股息股票期权来处理。[⊖]

16.3.1 期权价格的下限

作为以上规则的第一个应用，我们考虑一个连续股息收益率为q的股票的欧式看涨期权的下限。当式(10-4)中的S_0用S_0e^{-qT}来代替时，我们得出一个欧式看涨期权价格c的下限

$$c \geqslant \max(S_0e^{-qT}-Ke^{-rT},0) \tag{16-1}$$

我们也可以通过考虑以下两个证券组合来直接证明这一点：

组合A：一个欧式看涨期权加上数量为Ke^{-rT}的现金。

组合B：e^{-qT}股股票，其中股息被再投资于股票中。

⊖ 这一规则可类似于14.12节讨论的对支付现金股息的股票欧式期权定价的方法（那里曾指出可以将股息的贴现值从股票的当前价格中扣除）；在这里，可以采用股息率对股票进行贴现。

为了取得欧式看跌期权的下限，我们可以类似地将式(10-5)中的 S_0 用 S_0e^{-qT}代替而得出

$$p \geqslant \max(Ke^{-rT} - S_0e^{-qT}, 0) \tag{16-2}$$

这一结果也可以通过考虑以下两个证券组合直接得出：

组合 C：一个欧式看跌期权加上 e^{-qT}股股票，其中股息又被投资于股票之中。

组合 D：数量为 Ke^{-rT}的现金。

16.3.2 看跌-看涨期权平价关系式

将式(10-6)中的 S_0 由 S_0e^{-qT}代替，我们可以得出一个连续股息收益率为 q 的股票期权看跌-看涨期权平价关系式

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0e^{-qT} \tag{16-3}$$

这一结果也可以通过考虑以下两个证券组合直接得到证明：

组合 A：一个欧式看涨期权加上数量为 Ke^{-rT}的现金。

组合 C：一个欧式看跌期权加上 e^{-qT}股股票，其中股息又被投资于该股票中。

以上两个交易组合在时间 T 的价值均为 $\max(S_T, K)$，因此它们当前的价格必须相同，由此我们可得出由式(16-3)所表达的看跌-看涨期权平价关系式。对于美式期权，看跌-看涨关系式如下(见练习题 16.12)：

$$S_0e^{-qT} - K \leqslant C - P \leqslant S_0 - Ke^{-rT}$$

16.3.3 定价公式

将式(14-20)及式(14-21)中的 S_0 由 S_0e^{-qT}代替，我们可以得出连续股息收益率为 q 的股票看涨期权 c 及看跌期权 p 的价格

$$c = S_0e^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{16-4}$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0e^{-qT}N(-d_1) \tag{16-5}$$

因为

$$\ln\frac{S_0e^{-qT}}{K} = \ln\frac{S_0}{K} - qT$$

d_1，d_2 分别由以下公式给出

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

这些结果最初由默顿给出。[㊀]如在第 14 章讨论的那样，为了定价的目的，这里的股息可以被定义为在除息日股票由于宣布支付票息而引起股票价格下降的数量。如果在期权有效期内股息为已知，但并不为常数，式(16-4)及式(16-5)仍然成立，这时公式中的 q 等于期权期限内股息的平均收益率。

16.3.4 微分方程和风险中性定价

为了更正式地证明式(16-4)和式(16-5)，我们可以通过求解期权必须满足的微分方程，或者利用风险中性定价公式。

当我们将 14.6 节中的分析包括股息收益率 q 时，微分式(14-6)变为[㊁]

㊀ 见 R. C. Merton, "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973): 141-183。

㊁ 作者网页(www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes)上的技术报告(Technical Note 6)有关于这一方程的证明。

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(r-q)S\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf \tag{16-6}$$

与式(14-16)相似，以上式中不含任何关于风险偏好的变量，因此，我们可以采用在14.7节中所描述的风险中性定价方法。

在风险中性世界里，股票的整体收益率一定等于 r。因为股息收益率为 q，股票的预期增长率等于$r-q$。因此，股票价格服从以下风险中性随机过程

$$dS=(r-q)Sdt+\sigma Sdz \tag{16-7}$$

为了给出一个股息收益率为 q 的股票的期权等价公式，我们可以将股票的增长率期望设成$r-q$，然后以贴现率 r 对收益期望贴现。当股票的增长率期望为 $r-q$ 时，股票在 T 时刻价值的期望值为 $S_0e^{(r-q)T}$。利用与附录14A中类似的分析，我们可以得出看涨期权收益在风险中性世界里的期望值为

$$e^{(r-q)T}S_0N(d_1)-KN(d_2)$$

其中 d_1 和 d_2 由上面给出，以利率 r 进行贴现后我们可以得到式(16-4)。

16.4 欧式股指期权的定价

在第5章对股指期货定价时，我们假设股指可以看做是支付已知票息收益率的股票。在对股指期权定价时，我们可以采用类似的假设。这意味着式(16-1)与式(16-2)是关于欧式股指期权的下限，式(16-3)是关于欧式股指期权的看跌-看涨期权平价关系式；式(16-4)和式(16-5)可用来对欧式股指期权定价；二叉树可用来对美式期权定价。对应所有的情形，S_0 等于当前股指价格，σ 为股指的波动率，q 为期权有效期内年股息平均收益率(见例16-1)。

【例16-1】 考虑一个S&P 500指数上的欧式看涨期权，期权期限为2个月，股指的当前值为930，执行价格为900美元，无风险利率为每年8%，波动率为每年20%。在第一个月与第二个月内，股指将预计分别提供0.2%和0.3%的股息。这时 $S_0=930$，$K=900$，$r=0.08$，$\sigma=0.2$，$T=2/12$，在期权期限内的全部股息率为0.2%+0.3%=0.5%，所对应的年股息率为6×0.5%=3%，因此 $q=0.03$。

$$d_1=\frac{\ln(930/900)+(0.08-0.03+0.2^2/2)\times 2/12}{0.2\sqrt{2/12}}=0.5444$$

$$d_2=\frac{\ln(930/900)+(0.08-0.03-0.2^2/2)\times 2/12}{0.2\sqrt{2/12}}=0.4628$$

$$N(d_1)=0.7069\quad N(d_2)=0.6782$$

因此，由式(16-4)给出的期权价格 c 为

$$c=930\times 0.7069e^{-0.03\times 2/12}-900\times 0.6782e^{-0.08\times 2/12}=51.83$$

即一份合约的价值为5 183美元。

在计算 q 时，我们应该只考虑除息日在期权有效期内的股息。在美国，股票除息日往往在2月份、5月份、8月份和11月份的第一周，因此在任意给定时刻，q 往往与期权的期限有关。对于其他国家的股票指数，情况更是如此。例如，日本所有的公司往往都采用同一个除息日。

如果我们假设股指中所含股息的绝对数量已知(而不是连续收益率为已知)，仍然可以采用标准布莱克-斯科尔斯-默顿公式，这时只需在初始股票价格中除去股息的贴现值。在第14章里对

提供已知股息的股票期权定价时，我们曾推荐了这一方法，但这一方法可能很难适用于包含大数量股票的股指，因为在计算过程中我们需要股指所含股票的所有股息信息。

有时人们会认为，长期来讲一个股票组合的收益肯定会好于一个具有同样初始价值的债券组合收益。如果真是这样的话，那么标的资产为股票组合的长期限看跌期权的价格会非常便宜，这里期权的执行价格等于债券价格在将来的值。事实上，就像业界事例16-1 指出的那样，这种看跌期权的价格很昂贵。

业界事例16-1 我们是否可以保证长期股票收益一定优于债券的收益

人们常说，长线投资者应该购买股票而不是债券。考虑某个美国基金经理，他试图说服投资者购买一个模拟S&P 500 指数的股票基金。该投资经理可能向投资者保证其基金在今后10年内的收益至少要好过无风险利率的收益。由历史数据来看，几乎任意一个10年的股票收益都要好过债券收益。似乎基金经理的承诺不太值钱。

事实上，这种承诺是惊人的昂贵。假定股指今天的值为1 000，股息收益率为每年1%，股指波动率为15%，10年的无风险利率为每年5%，如果比债券投资好，股票每年的收益要高于5%。因为股息收益率为1%，因此资本增长率至少为4%，这意味着10年后的股指水平至少为$1\,000e^{0.04\times10}=1\,492$。

对未来10年中投资到S&P 500上的1 000美元的收益高于投资到债券中的保证也就等于一个执行价格为1 492的10年期看跌期权。这一看跌期权可由式(16-5)来定价，计算中输入参数为$S_0=1\,000$，$K=1\,492$，$r=5\%$，$\sigma=15\%$，$T=10$，$q=1\%$，看跌期权价格为169.7。这说明基金经理所做出的承诺等于股指基金价格的17%，这么贵重的承诺可不能免费给出。

16.4.1 远期价格

定义F_0为股指在时间T到期的远期价格，如式(5-3)所示，$F_0=S_0e^{(r-q)T}$。这意味着式(16-4)和式(16-5)中欧式看涨期权价格c和欧式看跌期权价格p为

$$c = F_0e^{-rT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{16-8}$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - F_0e^{-rT}N(-d_1) \tag{16-9}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

看跌-看涨期权平价关系式(16-3)变为

$$c + Ke^{-rT} = p + F_0e^{-rT}$$

或

$$F_0 = K + (c-p)e^{rT} \tag{16-10}$$

对于某一给定的期限，如果具有同一执行价格的看涨和看跌期权交易活跃的话(在交易所市场这一现象并非罕见)，我们可以采用式(16-10)来估计对于这一期限的股指远期价格。一旦取得了对于一系列期限相应的远期价格，我们就可以定义远期价格的期限结构，对于其他期权，我们可以采用式(16-8)和式(16-9)来进行定价。以上做法的优点是，在定价过程中我们不需要明确估计股指的股息收益率。

16.4.2 隐含股息收益率

如果需要估计股息收益率(例如，对美式期权进行定价时)，我们可以利用具有等同执行价格与等同期限的看涨期权和看跌期权来计算，由式(16-3)得出

$$q = -\frac{1}{T}\ln\frac{c - p + Ke^{-rT}}{S_0}$$

对于一个特定的执行价格和期限，由以上估计的 q 不一定可靠，但如果将许多配对的看涨和看跌期权汇集到一起，我们将可以得出一个关于市场上对于其股息收益率所做假设的清晰图像。

16.5 货币期权的定价

为了对货币期权定价，我们定义 S_0 为即期汇率。精确地讲，S_0 为一个单位的外币所对应的美元数量。在5.10节中我们曾讲过，外币与支付连续股息的股票相似。一个外币持有者收入的股息收益率等于外币无风险利率 r_f(以外币计)。将不等式(16-1)和式(16-2)中的 q 由 r_f 替代，我们得出欧式看涨期权 c 和欧式看跌期权 q 的下限

$$c \geqslant \max(S_0e^{-r_fT} - Ke^{-rT}, 0)$$

$$p \geqslant \max(Ke^{-rT} - S_0e^{-r_fT}, 0)$$

将式(16-3)中的 q 由 r_f 替代，我们可以得出对于欧式货币期权的看跌-看涨期权平价关系式

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0e^{-r_fT}$$

最后将式(16-4)和式(16-5)中的 q 由 r_f 替代，我们可得出欧式货币期权的定价公式

$$c = S_0e^{-r_fT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{16-11}$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0e^{-r_fT}N(-d_1) \tag{16-12}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

国内和国外的无风险利率分别对应于期限为 T 的利率。看跌与看涨期权具有对称性质，即以货币B买入货币A，执行价格为 K 的看跌期权等价于对于以货币A买入货币B的执行价格为 $1/K$ 的看涨期权(见练习题16.8)。

【例16-2】 考虑一个4个月期限的英镑欧式看跌期权。假定当前英镑/美元汇率为1.600 0，期权执行价格为1.600 0，美国无风险利率为每年8%，英国无风险利率为每年11%，以及期权价格为4.3美分，这时 $S_0=1.6$，$K=1.6$，$r=0.08$，$r_f=0.11$，$T=0.333\,3$ 与 $c=0.043$ 我们可以通过试错法来求隐含波动率。波动率为20%时，期权价格为0.063 9；波动率为10%，期权价格为0.028 5；依此类推，我们计算得出的隐含波动率为14.1%。

使用远期汇率

由于银行与其他金融机构很频繁地交易远期汇率，因此常常会利用汇率为其期权定价。

由式(5-9)得出，对应于期限 T 的远期汇率为

$$F_0 = S_0e^{(r-r_f)T}$$

这一结果可将式(16-11)和式(16-12)简化为

$$c = e^{-rT}[F_0N(d_1) - KN(d_2)] \tag{16-13}$$

$$p = e^{-rT}[KN(-d_2) - F_0N(-d_1)] \tag{16-14}$$

和

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

式(16-13)和式(16-14)与式(16-8)和式(16-9)相似。我们将在第 17 章看到，任何资产的即期期权均可以通过由式(16-13)和式(16-14)给出的对于资产远期或期货期权形式定价。注意，期货或远期的期限与期权的期限相等。

16.6　美式期权

如第 12 章所述，二叉树可以用于对美式股指和货币期权定价。与无股息股票相同，决定价格上涨幅度的变量 u 等于 $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$，其中 σ 为波动率，Δt 为时间步长，决定价格下跌幅度的变量 $d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$。对于无股息股票，价格上涨所对应的概率为

$$p = \frac{a - d}{u - d}$$

其中 $a = e^{r\Delta t}$。对于股指和货币期权，计算 p 的公式不变，但计算 a 的公式会有所变化。对于股指期权

$$a = e^{(r-q)\Delta t} \tag{16-15}$$

其中 q 为股息收益率；对于货币期权

$$a = e^{(r-r_f)\Delta t} \tag{16-16}$$

式中 r_f 为外国的无风险利率。在 12.11 节中的例 12-1 显示了如何利用一个两步二叉树来对一个股指期权定价，例 12-2 展示了如何构造一个三步二叉树来对一个货币期权定价。在第 20 章，我们将给出更多的关于利用二叉树来对股指和货币期权定价的例子。

在某些情形下，提前行使美式货币期权为最优。因此，美式货币期权比相应的欧式货币期权的价值更高。一般来讲，对高利率货币的看涨期权和低利率货币的看跌期权，在期权到期前很容易被提前行使。这是因为高利率货币更容易贬值，因此低利率货币更容易升值。另外，高股息收益率股指的看涨期权与低股息收益率股指的看跌期权更有可能被提前行使。

小　结

在交易的股指期权以现金结算。在行使看涨期权时，期权持有人的收入为 100 乘以股指超出执行价格的数量。类似地，在股指看跌期权被行使时，期权持有人收入为 100 乘以执行价格超出股指价格的数量。股指期权可用来对证券组合进行保险。如果证券组合与股指有类似的收益，我们可以对于证券组合中每 $100S_0$ 的价值买入一看跌期权。如果证券组合与股指的收益不同，对于证券组合每 $100S_0$ 的价值，我们需要买入 β 份看跌期权，其中 β 是资本资产定价模型中证券组合的 β 值，购买期权的执行价格应反映所要求的价格保险水平。

大多数货币期权在场外市场交易。企业资金部主管可以采用这些期权来对冲外汇风险。例如，一个美国公司的资金部主管得知在将来某时刻将收入一笔英镑，他可以买入在将来同一时刻到期的英镑看跌期权来对冲外币风险。类似地，一个美国企业资金部主管得知在将来某时刻将支付一笔英镑，他可以买入将来同一时刻到期的英镑看涨期权来对冲其外币风险。货币可以用于范围远期合约。当公司知道会有外汇风险暴露时，这种零费用的合约被用来对损失提供保险，但同时要放弃一些增值机会。

无股息股票的欧式期权布莱克-斯科尔斯-默

顿公式可以被推广到当标的股票支付连续股息收益率的情形。这种推广意义很大，因为一些其他形式期权的标的资产可以看做等价于支付连续股息收益的股票。本章采用了以下结果：

- 股指可类比为支付连续股息的股票，其中收益率等于构成指数的股票平均股息收益率。
- 外币可类比为支付已知股息的股票，外币利率扮演着股息收益率的角色。

二叉树可用来对美式股指和货币期权定价。

推荐阅读

Amin, K., and R.A. Jarrow. "Pricing Foreign Currency Options under Stochastic Interest Rates," *Journal of International Money and Finance*, 10 (1991): 310–29.

Biger, N., and J.C. Hull. "The Valuation of Currency Options," *Financial Management*, 12 (Spring 1983): 24–28.

Bodie, Z. "On the Risk of Stocks in the Long Run," *Financial Analyst Journal*, 51, 3 (1995): 18–22.

Garman, M.B., and S.W. Kohlhagen. "Foreign Currency Option Values," *Journal of International Money and Finance*, 2 (December 1983): 231–37.

Giddy, I.H., and G. Dufey. "Uses and Abuses of Currency Options," *Journal of Applied Corporate Finance*, 8, 3 (1995): 49–57.

Grabbe, J.O. "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange," *Journal of International Money and Finance*, 2 (December 1983): 239–53.

Jorion, P. "Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market," *Journal of Finance* 50, 2(1995): 507–28.

Merton, R.C. "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973): 141–83.

练习题

16.1 一个证券组合的当前价值为 1 000 万美元，β 值为 1.0，S&P 100 的当前值为 800。解释如何利用执行价格为 700，标的资产为 S&P 100 的看跌期权来为证券组合提供保险？

16.2 “一旦我们知道了支付连续股息股票期权的定价方法，那我们也就知道了股指和货币期权的定价方法”。解释这句话的含义。

16.3 一个股指的当前价格为 300，股指收益率为每年 3%，无风险利率为每年 8%，对于这一股指执行价格为 290，6 个月期限的欧式看跌期权的下限为多少？

16.4 一种外币当前价格为 0.80 美元，波动率为 12%，国内和国外无风险利率分别为 6%和 8%。利用两步二叉树来对以下期权定价：(a)4 个月期执行价格为 0.79 的欧式期权；(b)4 个月期具有同样执行价格的美式期权。

16.5 说明企业如何用货币范围远期合约来对冲其外汇风险。

16.6 计算一个期限为 3 个月的股指平值欧式看涨期权的价格，股指的当前值为 250，无风险利率为每年 10%，股指的波动率为 18%，股指连续股息收益率为每年 3%。

16.7 计算一个 8 个月期的欧式货币看跌期权价格，期权执行价格为 0.50，当前汇率为 0.52，汇率波动率为 12%，国内无风险利率为每年 4%，外国无风险利率为每年 8%。

16.8 证明式(16-12)给出的关于以货币 B 卖出一个单位货币 A，执行价格为 K 的看跌期权的价格等于式(16-11)给出的关于以货币 A 卖出 K 个单位货币 B，执行价格为 $1/K$ 的看涨期权的价格。

16.9 一种外币的当前价格为 1.5 美元，国内与国外的无风险利率分别为 5% 与 9%。分别计算在欧式和美式情况下对于一个 6 个月期执行价格为 1.40 看涨期权的

下限。

16.10 考虑某股指，其当前价格为250，股指的连续股息收益率为每年4%，无风险利率为每年6%，这一股指的3个月期、执行价格为245美元的欧式看涨期权价格为10美元。一个3个月期，执行价格为245美元的看跌期权价值为多少?

16.11 一个股指的当前价格为696，其波动率为30%，无风险利率为每年7%，股指所提供的连续股息收益率为每年4%。计算3个月期、执行价格为700美元的欧式期权价格。

16.12 假定C为执行价格为K，期限为T，连续股息率为q的股票的美式看涨期权的价格，P为具有同样执行价格与期限的美式看跌期权的价格，证明

$$S_0e^{-qT}-K<C-P<S_0-Ke^{-rT}$$

式中S_0为股票价格，r为无风险利率，$r>0$。提示：为了证明第一个不等式，考虑以下证券组合的价值：

组合A：一个欧式看涨期权加上数量为K的无风险投资。

组合B：一个美式看跌期权加上e^{-qT}股股票，其中股息再投资于股票之中。

为了证明第二个不等式，考虑以下证券组合的价值。

组合C：一个美式看涨期权加上数量为Ke^{-rT}的无风险投资。

组合D：一个欧式看跌期权加上一股股票，其中股息再投资于股票中。

16.13 证明当远期价格等于执行价格时，一个欧式货币看涨期权价格等于相应的欧式货币看跌期权价格。

16.14 股指的波动率是大于还是小于典型股票的波动率？解释原因。

16.15 当证券组合的β增加时，相应的证券组合保险的价格是增加还是减少？解释原因。

16.16 假定一证券组合的价值为6 000万美元，S&P 500的当前值为1 200，如果证券组合收益反映了股指收益，为了保证证券组合在一年后价格不低于5 400万美元，证券组合管理者应购买什么样的期权?

16.17 考虑练习题16.16的情形，假定证券组合的β为2.0，无风险利率为每年5%，证券组合与股指的股息率为每年3%。为了保证证券组合在一年后价格不低于5 400万美元，管理者应购买什么样的期权?

16.18 一个指数的当前水平为1 500，执行价格为1 400，期限为6个月的看涨和看跌期权的价格分别为154.00美元和34.25美元。6个月期无风险利率为5%，这时的隐含股息收益率为多少?

16.19 一个整体收益指数对某交易组合的整体收益(其中包括股息)进行跟踪；解释你将如何对该指数上的以下产品定价：(a)远期合约；(b)欧式期权。

16.20 什么是欧式货币期权的看跌-看涨期权平价关系式?

16.21 一个关于日元/欧元的期权是否可由以下两个期权来构造：一个期权为美元/欧元期权，另一个期权为美元/日元期权。解释你的答案。

16.22 采用书中所述交易组合来证明式(16-1)、式(16-2)和式(16-3)中的结果。

作业题

16.23 道琼斯工业平均指数在2007年1月12日为12 556，而对于3月份到期，执行价格为126的看涨期权(March 126 Call)价格为2.25美元。采用DerivaGem软件来计算期权的隐含波动率，在计算中假定无风险利率为5.3%，股息收益率为3%，期权到期日为2007年3月20日。估计3月份到期，执行价格为126的看跌期权价格。由这一期权价格得出的隐含波动率为多少?（注意，期权的标的

资产为道琼斯指数除以100)。

16.24 一股指的当前值为300,波动率为20%,无风险利率为8%,股息收益率为3%。利用三步二叉树对指数的6个月期,执行价格为300美元的看跌期权定价,期权分别为欧式和美式。

16.25 假定加元的即期汇率为0.95美元,加元/美元汇率的波动率为8%,加拿大与美国的无风险利率分别为每年4%与5%。计算9个月期的以0.95美元买入1加元的欧式看涨期权的价格。利用看跌-看涨期权平价关系式来求出9个月期的以0.95美元出售1加元的欧式看跌期权的价格,在9个月后以1加元买入0.95美元的看涨期权的价格为多少?

16.26 对冲基金的管理费一般是收取一定的固定费,再加上基金盈利的一定百分比(如果有盈利)。基金的这种薪酬方式将激励基金管理人采取何种行为?

16.27 如果货币A以货币B表达时满足过程

$$dS = (r_B - r_A)S dt + \sigma S dz$$

式中r_A和r_B分别为国家A和国家B的无风险利率。如果以货币A表达货币B,货币将满足什么过程?

16.28 假定美元/欧元的3个月期的远期汇率为1.3000,汇率波动率为15%。一家美国公司在3个月时将支付100万欧元。欧洲和美国的无风险利率分别为5%与4%。这家公司准备采用范围远期合约,其中低限执行价格等于1.2500,

(a) 为保证合约费用为0,执行价格上限等于多少?

(b) 公司采用的看涨和看跌期权的头寸是什么?

(c) 证明只要两种货币的利率差$r - r_f$保持不变,则(a)的答案不依赖于利率的大小。

16.29 在业界事例16-1中,保证在今后10年内基金的回报不会为负的费用是多少?



第 17 章 期货期权

到目前为止，在我们所考虑的期权中，期权持有者可以在将来某一固定时刻以某一确定价格买入或卖出一定的标的资产。这些期权有时也被称为对于**即期资产的期权**(options on spot)或**即期期权**(spot options)，这是因为在行使期权时，以指定价格买入或卖出资产的交易会马上进行。本章我们考虑**期货上的期权**(options on futures)，这类期权也被称为**期货期权**(futures options)。在这些合约中，行使期权会使得期权持有者持有期货的一种头寸。

商品期货交易委员会(The Commodity Futures Trading Commission，CFTC)在 1982 年批准了实验性的期货期权交易。1987 年，该委员会批准了永久性的期货期权交易。从那时起，这类期权得到投资者的青睐。

本章我们将讨论期货期权的运作方式以及这类期权与即期期权的差别。我们将探讨如何用二叉树和布莱克-斯科尔斯-默顿股票期权公式来对期货期权来定价。我们也将讨论期货期权与即期期权的相对定价问题。

17.1 期货期权的特性

期货期权给持有者某种权利(而非义务)在将来一定时刻以一定的期货价格进入期货合约。具体地讲，看涨期货期权给持有者在将来某时刻以一定期货价格持有合约长头寸的权利；看跌期货期权给持有者一种权利在将来某时刻以一定期货价格持有期货合约的短头寸。大多数期货期权为美式期权，也就是说期权持有者在合约有效期内随时可以行使期权。

当看涨期货期权被行使时，期权持有者进入一个期权合约的长头寸，加上最新期货结算价格减去执行价格所得出的一个现金结算量；当看跌期货期权被行使时，期权持有者进入一个期权合约的短头寸，加上执行价格减去最新期货结算价格所得出的一个现金结算量。以下例子说明，一个关于看涨期货期权的实际收益等于 $\max(F_T-K,\ 0)$，而一个关于看跌期货期权的实际收益等于 $\max(K-F_T,\ 0)$，F_T 是执行时的期货价格，K 为执行价格。

【例 17-1】 假定现在是 8 月 15 日，某投资者买入了 9 月份的黄铜期货期权，期权执行价格为每磅 240 美分。一份合约的规模是 25 000 磅黄铜。假定当前 9 月份交割的黄铜期货的价格为 251 美分，8 月 14 日(最近一个结算日)黄铜期货的结算价格为 250 美分。如果期权被行使，投资者收入现金为

$$25\,000\times(250-240)\text{ 美分}=2\,500\text{ 美元}$$

同时投资者进入一个在 9 月份买入 25 000 磅黄铜期货合约的长头寸。如果投资者愿意，他可以将期货马上平仓，投资者收入 2 500 美元外加以下数量的现金

$$25\,000 \times (251 - 250)\text{ 美分} = 250\text{ 美元}$$

这一数量反映了在最近一次结算后，期货价格的变化。在8月15日行使期权的整体收益为2 750美元，该数量等于25 000($F-K$)，其中F为期权被行使时的期货价格，K为执行价格。

【例17-2】 某投资者买入12月份玉米期货的看跌期权，执行价格为每蒲式耳400美分。合约规模是55 000蒲式耳玉米。假定当前12月份交割的玉米期货的价格为380美分，在最近一个结算日，玉米期货的结算价格为379美分。如果期权被行使，投资者收入现金为

$$5\,000 \times (400 - 379)\text{ 美分} = 1\,050\text{ 美元}$$

同时投资者进入一个在9月份卖出5 000蒲式耳玉米期货合约的短头寸。如果投资者愿意，他可以将期货马上平仓，投资者收入1 050美元外加以下数量的现金

$$5\,000 \times (380 - 379)\text{ 美分} = 50\text{ 美元}$$

这一数量反映了在最近一次结算后，期货价格的变化。投资者的净收益为1 000美元，该数量等于5 000($K-F$)，其中F为期权被行使时的期货价格，K为执行价格。

17.1.1 到期月

期货期权是以标的期货到期月而非期权到期月来识别的。上面讲过，大多数期货期权为美式期权，期货期权到期日通常是标的期货交付日期的前几天(例如，CME集团的长期国债期货期权到期日是期货合约到期月的前一个月份，具体日期为距月底至少5个交易日之前的倒数第一个星期五)。CME中线欧洲美元(mid-curve Eurodollar)合约是一个例外，该合约到期时间比相应期权到期时间要晚1～2年。

在美国，比较流行的期货期权的标的资产包括玉米、大豆、棉花、糖、原油、天然气、黄金、长期国债、中期国债、5年期国债、30天期联邦基金(30-day federal funds)、欧洲美元、一年与两年期中线欧洲美元、欧元银行间拆出利率(Euribor)、欧元债券(Eurobonds)和S&P 500股指。

17.1.2 利率期货期权

在美国的交易所，交易最为活跃的利率期权产品是长期国债期货、中期国债期货和欧洲美元期货。

在CME交易的长期国债期货期权的持有者有权进入一个长期国债期货合约。如第6章所述，一个长期国债期货合约是关于10万美元的长期国债，长期国债期货期权的价格是以标的长期国债面值的百分比给出的，价格被近似到1%的1/64。

在CME交易的欧洲美元期货期权的持有者有权进入一个欧洲美元期货。如第6章所述，当欧洲美元报价变化一个基点(即0.01%)时，欧洲美元的损益为25美元。类似地，在欧洲美元期货的报价中，一个基点也代表25美元。

利率期货期权的运作方式与其他章所讨论的期货期权的运作方式相同。例如，在行使期权后，除了现金收益，看涨期权持有者还要持有期货合约的长头寸，期权承约方会持有期货合约的短头寸。期权的整体收益(包括期货交易的头寸)为$\max(F-K,\ 0)$，其中F为在期权行使时的期货价格，K为执行价格。

当债券价格增长时(即利率下降时)，利率期货价格会随之增长；当债券价格下降时(即利率增长时)，利率期货价格会随之下降。如果一个投资者认为短期利率会增长，他可以买入关于欧洲美元的看跌期权来投机；如果一个投资者认为短期利率会下降，他可以买入关于欧洲美元的看涨期权来投机。如果一个投资者认为长期利率会增长，他可以买入关于长期或中期国债的看跌期权来投机；如果一个投资者认为长期利率会下降，他可以买入关于长期或中期国债的看涨期权来

进行投机。

【例17-3】 现在是2月份，6月份欧洲美元合约的远期价格为93.82(对应于为每年6.18%的3个月欧洲美元利率)。对于以上合约，执行价格为94.00美元的看跌期权的报价为0.1，即10个基点。对于认为利率会下降的投资者而言，该期权可能会有吸引力。假定短期利率确实下降了100个基点，当欧洲美元期货价格为94.78时(对应于为每年5.22%的3个月欧洲美元利率)，期权持有人行使期权，期权收益为25×(94.78−94.00)×100=1 950美元，期权合约的费用为10×25=250美元。投资者的盈利为1 700美元。

【例17-4】 现在是8月份，12月份长期国债合约的期货价格为96−09 $\left(\text{即}96\frac{9}{32}=96.281\,25\right)$。长期国债的收益率大约为每年6.4%。某投资者认为这一利率到12月份时会下降，他可以买入在12月份到期、执行价格为98美元的看涨期权。假定期权价格为1−04 $\left(\text{价格为面值的}1\frac{4}{64}=1.062\,5\%\right)$。如果长期利率确实下降到每年6%，长期国债期货价格上升到100−00，投资者每100美元的债券期货的净盈利为

$$100.00-98.00-1.062\,5=0.937\,5$$

因为一个期权合约是关于面值为100 000美元的产品买卖，投资者从每个买入的期权中的盈利为937.50美元。

17.2 期货期权被广泛应用的原因

人们很自然会问，为什么有人会选择交易期货期权而不是交易关于标的资产的期权呢？一个主要原因是，在大多数情形下，期货合约要比标的资产的流动性更好，而且更容易交易。此外，在交易所很容易获得期货的价格，而标的资产价格并不是很容易取得。

考虑长期国债。长期国债的期货市场要比任何国债市场都要活跃，而且可以随时从交易所的交易中得到长期国债期货的价格。与此相比，只有通过联系一个或更多的交易商，投资者才能取得当前债券市场的价格。因此，当我们看到投资者更愿意交割长期国债期货而不是国债现货时，就不会感到奇怪了。

商品期货的交易往往比直接交易商品本身更容易。例如，在市场上，对活牛期货进行交割比对活牛本身进行交割要容易得多。

期货期权的一个重要特点是对期权的行使并不一定会触发对标的资产的交割，在大多数情形下标的期货合约往往在到期日之前被平仓。期货期权通常以现金结算，这对大多数投资者来讲颇具吸引力，尤其对于那些缺乏资金而不能在期权行使后买入标的资产的投资者更是如此。有时人们认为期货期权还有另一个优点，即期货与期货期权在同一个交易所中同时交易。这给对冲、套利、投机都带来了方便，也使得市场效率会更高。期货期权的另一个优点是，在许多情况下，期货期权比即期期权交易费用要低。

17.3 欧式即期期权和欧式期货期权

执行价格为K的欧式即期期权收益为

$$\max(S_T-K,0)$$

式中S_T为期权到期时资产的即期价格。具有同样执行价格K的欧式期货期权收益为

$$\max(F_T-K,0)$$

式中 F_T 为期权到期时期货的价格。如果期货与期权同时到期，那么 $F_T=S_T$，这时两个期权等价。类似地，当期货与期权同时到期时，欧式即期看跌期权与欧式期货看跌期权等价。

大多数市场交易的期货期权为美式期权。但是我们会看到，研究欧式期货期权仍会很有用处，因为我们得出的结果可以用来对欧式即期期权定价。

17.4 看跌-看涨期权平价关系式

在第 10 章我们得出了欧式股票期权的看跌-看涨期权的平价关系式，在此将采用类似的做法来推导对于欧式期货期权的看跌-看涨平价关系式。考虑具有相同执行价格 K 与期限 T 的两个欧式看涨和看跌期货期权。我们构造以下两个交易组合：

组合 A：一份欧式看涨期货期权加上数量为 Ke^{-rT} 的现金。

组合 B：一份欧式看跌期货期权加上一份期货合约长头寸，再加上数量为 F_0e^{-rT} 的现金，其中 F_0 为期货价格。

在组合 A 中，现金以无风险利率 r 投资，在 T 时刻，该投资会增长到 K。令 F_T 为期权到期时的期货价格。如果 $F_T>K$，组合 A 中的期权会被行使，这时组合 A 的价值为 F_T；如果 $F_T\leqslant K$，组合 A 中的期权不会被行使，组合 A 的价值为 K。因此，在 T 时刻，组合 A 的价值为

$$\max(F_T,K)$$

在组合 B 中，现金以无风险利率 r 投资，在 T 时刻，该投资会增长到 F_0。看跌期权收益为 $\max(K-F_T,\ 0)$，期货提供的收益为 F_T-F_0[⊖]。因此组合 B 在时刻 T 的价格为

$$F_0+(F_T-F_0)+\max(K-F_T,0)=\max(F_T,K)$$

因为以上两个交易组合在 T 时刻的价值相等，并且欧式期权不能被提前行使，所以这里的两个交易组合在今天的价值应该相等。组合 A 在今天的价值为

$$c+Ke^{-rT}$$

式中 c 为看涨期货期权的价格。按每日结算(daily settlement)过程保证在组合 B 中期货在今天的价格为 0，所以组合 B 今天的价格为

$$p+F_0e^{-rT}$$

式中 p 为看跌期货期权的价格，因此

$$c+Ke^{-rT}=p+F_0e^{-rT} \tag{17-1}$$

以上看跌-看涨期权平价关系式与式(10-6)给出的对于无股息股票的平价关系式的区别在于式(10-6)中的 S_0 被贴现后的期货价格 F_0e^{-rT}取代。

如 17.3 节所示，当期权合约与期货合约同时到期时，欧式即期期权与欧式期货期权等价，这时由式(17-1)所给出的关系式为即期看涨期权、即期看跌期权和期货价格之间的关系式。

【例 17-5】 假定一个对于即期白银的欧式看涨期权价格为每盎司 0.56 美元，期权期限为 6 个月，执行价格为 8.5 美元。假定在 6 个月到期时白银期货价格为 8 美元，无风险利率为每年 10%。由式(17-1)的变形形式得知，一个与欧式即期看涨期权有同样期限和执行价格的欧式看跌期权价格为

$$0.56+8.50e^{-0.1\times 6/12}-8.00e^{-0.1\times 6/12}=1.04$$

对于美式期货期权，看跌-看涨期权的平价关系式为(见练习题 17.19)

$$F_0e^{-rT}-K<C-P<F_0-Ke^{-rT} \tag{17-2}$$

17.5 期货期权的下限

看跌-看涨期权平价关系式(17-1)给出了欧式看涨期权和看跌期权的下限。因为看跌期权 p

⊖ 在分析中，我们假定期货价格等价于远期价格，即期货只在到期日结算，而非每天结算。

的价格不能为负值，由式(17-1)得出

$$c + Ke^{-rT} \geqslant F_0 e^{-rT}$$

即

$$c \geqslant (F_0 - K)e^{-rT} \tag{17-3}$$

类似地，因为看跌期权 c 的价格不能为负值，由式(17-1)得出

$$Ke^{-rT} \leqslant F_0 e^{-rT} + p$$

即

$$p \geqslant (K - F_0)e^{-rT} \tag{17-4}$$

以上得出的下限与第 10 章中推导出的欧式股票期权的下限类似。当期权为深度实值状态时，欧式看涨和看跌期权会与它们的下限价格非常接近。为了说明为什么会这样，我们重新考虑由式(17-1)所表达的看跌-看涨期权平价关系式，当一个看涨期权为深度实值状态时，相应的看跌期权为深度虚值状态，这意味着 p 会接近于 0，c 与 p 的差等于其下限。因此，看涨期权会接近于其下限。我们对看跌期权也可以进行类似的讨论。

由于美式期货期权可以在任何时刻被行使，因此，我们有以下关系式

$$C \geqslant F_0 - K$$

与

$$P \geqslant K - F_0$$

因此，如果利率为正，美式期权的下限一定会高于欧式期权的下限，美式期货期权总是有被提前行使的可能性。

17.6 采用二叉树对期货期权定价

本节我们将更正式地探讨如何用二叉树对期货期权定价。期货期权与股票期权的关键区别在于进入期货合约时无须付费。

假定当前的期货价格为 30，一个月后，期货价格或者上涨到 33 或者下跌到 28。我们考虑对于在期货上执行价格为 29 美元的看涨期权。在分析过程中，我们忽略期货每日结算的性质。这一情形见图 17-1。当期货价格上涨到 33 时，期权的收益为 4，同时期货合约的价值为 3；当期货价格下跌到 28 时，期权的收益为 0，同时期货合约的价值为 -2[⊖]。

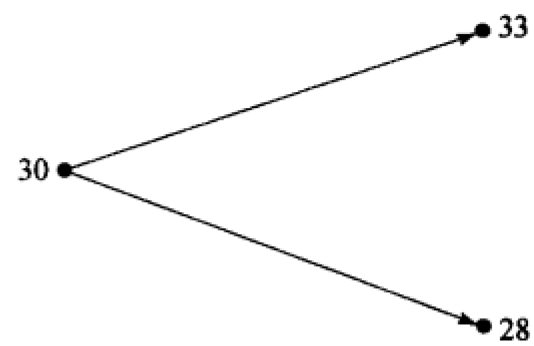


图 17-1 数值例子中的期货价格变化

为了构造无风险对冲，我们考虑由一个期权短头寸与 Δ 份期货长头寸所组成的交易组合。当期货价格上涨到 33 时，交易组合价值为 $3\Delta - 4$；当期货价格下跌到 28 时，交易组合价值为 -2Δ。当交易组合的最终价格相同，即 $3\Delta - 4 = -2\Delta$ 时，交易组合为无风险，因此 $\Delta = 0.8$。

当 Δ 取 0.8 时，交易组合在一个月后的价值为 $3 \times 0.8 - 4 = -1.6$。假定无风险利率为 6%，交易组合今天的价值为

$$-1.6e^{-0.06 \times 1/12} = -1.592$$

交易组合包含一个期货期权合约的短头寸与 Δ 份期货合约。因为今天的期货合约价值为 0，因此今天的期权价格为 1.592。

⊖ 这一数值为期货盈亏的近似，因为期货的收益不仅仅发生在时刻 T，其收益分布在 0 ~ T 的每一天。但是，当二叉树步长变得越来越小时，这一估计会越来越好。在极限状态下，即步长趋向于 0 时，我们不会有任何精度损失。

17.6.1 推广

我们可以将以上分析进行推广。假定 F_0 为期货初始价格，在时间段 T 以后，期货价格会上涨到 F_0u 或者下跌到 F_0d。我们考虑一个在时间 T 到期的期权，当期货价格上涨时，期权收益为 f_u；当期货价格下跌时，期权收益为 f_d。图 17-2 是对这一情形的总结。

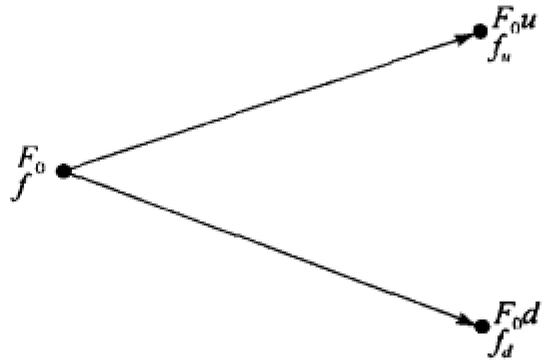


图 17-2 一般情形的期货与期权价格

这时，无风险交易组合包括一期权的短头寸和 Δ 份期货期权的长头寸。其中

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{F_0u - F_0d}$$

交易组合在 T 时刻的价值为

$$(F_0u - F_0)\Delta - f_u$$

将无风险利率记为 r，我们得出交易组合在今天的价值为

$$[(F_0u - F_0)\Delta - f_u]e^{-rT}$$

另外一种表达交易组合今天价值的表达式为 $-f$，其中 f 为期权今天的价格。因此

$$-f = [(F_0u - F_0)\Delta - f_u]e^{-rT}$$

将 Δ 代入以上表达式，f 可被简化为

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d] \tag{17-5}$$

其中

$$p = \frac{1-d}{u-d} \tag{17-6}$$

这与 12.9 节里的结果一致。式(17-6)给出了在风险中性世界里股票价格上涨的概率。

考虑以上的数值例子（见图 17-1），$u=1.1$，$d=0.933\,3$，$r=0.06$，$T=1/12$，$f_u=4$，$f_d=0$。由式(17-6)，我们可以得出

$$p = \frac{1-0.933\,3}{1.1-0.933\,3} = 0.4$$

并由式(17-5)得出

$$f = e^{-0.06\times 1/12}[0.4\times 4 + 0.6\times 0] = 1.592$$

这与我们以前所得的结果是一致的。

17.6.2 多步树

应用多步二叉树对于美式期货期权定价与对股票期权定价没有什么不同之处，其过程在 12.9 节曾解释过。对应于期货价格上涨参数 u 等于 $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$，其中 σ 为期货价格的波动率，Δt 为步长，期货价格上升的概率为

$$p = \frac{1-d}{u-d}$$

例 12-13 说明了如何利用多步二叉树来对期货期权定价，例 20-3 给出了进一步的说明。

17.7 期货价格在风险中性世界的漂移率

更一般的结果可以使我们应用 16.3 节中的分析来对期货期权定价。这一结果说明，在风险中性世界里，期货价格的行为等价于支付连续股息收益率为国内无风险利率 r 的股票。

期货的二叉树上关于 p 的方程与股票二叉树上当 $q=r$ 时的概率方程一致（比较式(17-6)与式(16-15)和式(16-16)），从这一现象中我们可以得出一些线索。另外一些线索是期货期

权的看跌-看涨期权平价关系式与将股票价格换成期货价格，令 $q=r$ 时等同（比较式(17-1)和式(16-3)）。

为了严格地证明以上结果，我们需要计算期货价格在风险中性世界的漂移率。我们定义 F_t 为在时刻 t 的期货价格，并且假设结算日期为时刻0，Δt，$\Delta 2t$，…，如果我们在0时刻进入期货合约，其价值为0。在时刻 Δt，期货的收益为 $F_{\Delta t}-F_0$。如果 r 为在0时刻开始一个很短的时间(Δt)区间的利率，由风险中性定价公式得出，在0时刻，合约收益的价值为

$$e^{-r\Delta t}\hat{E}(F_{\Delta t}-F_0)$$

式中 $\hat{E}$ 为风险中性世界的期望值，我们必须有

$$e^{-r\Delta t}\hat{E}(F_{\Delta t}-F_0)=0$$

因此

$$\hat{E}(F_{\Delta t})=F_0$$

类似可以证明，$\hat{E}(F_{2\Delta t})=F_{\Delta t}$，$\hat{E}(F_{3\Delta t})=F_{2\Delta t}$，等等。将所有结果结合在一起，对于任意时刻 T，下式成立

$$\hat{E}(F_T)=F_0$$

因此，在风险中性世界，期货价格的漂移率为0。由式(16-7)得出，期货价格类似于股息收益率 $q=r$ 的股票。这一结果具有一般性，它对所有的期货价格均成立，并且与关于利率、波动率等的假设无关[1]。

在风险中性世界里，一个关于 F 常用的假设如下：

$$dF=\sigma F dz \tag{17-7}$$

其中 σ 为常数。

微分方程

为了从另外一个角度来说明期货价格类似于股息收益率为 q 的股票，我们可以推导出关于期货价格的衍生产品所满足的微分方程，其推导过程类似于推导14.6节中的无股息股票的衍生产品所满足的微分方程。关于期货价格的衍生产品的微分方程为[2]

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2F^2=rf \tag{17-8}$$

将 q 设定为 r，式(16-6)与上式相同。因此证明，对衍生产品定价时，我们可以将期货价格等同为股息收益率为 r 的股票。

17.8 对于期货期权定价的布莱克模型

将以上结论进行推广，我们可以对欧式期货期权定价。布莱克在1976年的文章中首先证明了这一点[3]。假设标的期货价格服从式(17-7)中的对数正态过程，期权上的欧式看涨期权价格 c 和看跌期权 p 可由在式(16-4)与式(16-5)中将 S_0 由 F_0 取代，同时令 $q=r$，则

$$c=e^{-rT}[F_0N(d_1)-KN(d_2)] \tag{17-9}$$

---

[1] 在第27章，我们将发现这一结果的准确描述如下："一个期货价格在定价单位为货币市场账户的传统风险中性世界里的漂移率为0。"一个具有0漂移率的随机过程被称为鞅。远期价格在另一个风险中性世界中为鞅，这一世界的定价单位为在时刻 T 到期的零息债券。

[2] 关于证明，见作者网页上的技术报告(Technical Note 7)。

[3] 见 F. Black, "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, 3(March 1976): 167-79。

$$p = e^{-rT}[KN(-d_2) - F_0N(-d_1)] \tag{17-10}$$

式中

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

式中 σ 为期货价格的波动率。当持有费用以及便利收益均为时间的函数时，我们可以证明期货价格的波动率等于标的资产的波动率。

【例 17-6】 考虑一个原油期货上的欧式看跌期权，期权的期限为 4 个月，同时期货价格为 20 美元，执行价格为 20 美元，无风险利率为每年 9%，期货波动率为每年 25%。这时 $F_0=20$，$K=20$，$r=0.09$，$T=4/12$，$\sigma=0.25$，$\ln(F_0/K)=0$，因此

$$d_1 = \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} = 0.072\,16$$

$$d_2 = -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2} = -0.072\,16$$

$$N(-d_1) = 0.471\,2, \quad N(-d_2) = 0.528\,8$$

看跌期权价格 p 为

$$p = e^{-0.09\times4/12}(20\times0.528\,8 - 20\times0.471\,2) = 1.12$$

即 1.12 美元。

由布莱克模型代替布莱克-斯科尔斯-默顿模型

17.3 节的结果显示了当期权期限与期货期限相同时，欧式期货期权与欧式即期期权等价。因此，式(17-9)和式(17-10)也提供了对于即期资产欧式期权的定价公式。

【例 17-7】 考虑一个 6 个月期限，标的资产为即期黄金价格的欧式看涨期权，期权持有者有权在 6 个月时买入一盎司黄金，期权的执行价格为 1 200 美元，6 个月到期的期货价格为 1 240 美元，无风险利率为每年 5%，期货波动率为 20%，这一期权等价于 6 个月期限的欧式期货期权。期权价格可由式(17-9)来计算，期权价格为

$$e^{-0.05\times0.5}[1\,240N(d_1) - 1\,200N(d_2)]$$

式中

$$d_1 = \frac{\ln(1\,240/1\,200) + 0.2^2\times0.5/2}{0.2\times\sqrt{0.5}} = 0.302\,6$$

$$d_2 = \frac{\ln(1\,240/1\,200) - 0.2^2\times0.5/2}{0.2\times\sqrt{0.5}} = 0.161\,1$$

计算出的期权价格为 88.37 美元。

与布莱克-斯科尔斯-默顿模型相比，交易员更喜欢采用布莱克模型来对欧式即期期权定价。这种用法非常广泛。标的资产既可以是消费资产也可以是投资资产，而且资产还可以为持有人提供收入。在式(17-9)和式(17-10)中，变量 F_0 被设定为与期权期限等同的标的资产期货或远期合约的价格。

式(16-13)和式(16-14)展示了如何将布莱克模型应用到关于货币即期期权的定价上。式(16-8)和式(16-9)则展示了如何将布莱克模型应用到关于股指即期期权的定价上。布莱克模型的

最大优点是，我们不需要估计标的资产的收入(或方便收益)，模型中的期货或远期价格已经将这些收入考虑在内。

在 16.4 节，当考虑股指情形时，我们解释了从看跌-看涨期权平价关系式出发，如何从市场交易活跃的指数期权中隐含地计算相应期限的远期价格，通过对这些远期价格进行插值，我们还可以估计对应于其他期限的远期价格。对于许多其他标的资产，我们也可以进行类似的处理。

17.9 美式期货期权与美式即期期权

在实践中，市场交易的期货期权通常为美式期权。假定无风险利率 r 为正，美式期货期权总是有被提前行使的可能性，因此，美式期货期权价格总是会高于相应的欧式期货期权的价格。

当期权与期货具有相同的期限时，美式期货期权的价格并不一定等于美式即期期权的价格[⊖]。例如，假定我们有一个**正常市场**(normal market)，即期货价格在到期前一直高于即期资产价格。大多数股指价格、黄金、银价、低利率的外币与某些商品均满足这一性态。这时，美式看涨期货期权价格一定会高于相应的美式即期看涨期权。这是因为在一些情形下，期货期权可能被提前行使，这会给期权持有者带来更大的收益。类似地，一个美式看跌期货期权的价格一定会低于相应的美式即期看跌期权的价格。当市场为**反向市场**(inverted market)，即期货价格总是低于即期价格时，与以上相反的结论会成立。这时，美式看涨期货期权的价格会低于美式即期看涨期权的价格，而美式看跌期货期权的价格会大于美式即期看跌期权的价格。

上面描述了美式期货期权与美式即期期权的差别，这在期货与期权具有不同或相同期限时均成立。事实上，期货期限比期权期限越长，两种期权的差别也就越大。

17.10 期货式期权

某些交易所交易所谓的**期货式期权**(futures-style options)，这些合约是关于期权收益的期货合约。一般来讲，交易员在买入即期以及期货期权时，首先要支付现金。与一般期权交易有所不同的是，买入或卖出期货式期权的交易员要支付保证金，这一点与一般的期货交易没有什么两样(见第 2 章)。期货式期权要与其他期货一样，每天进行结算，最终的结算为期权的收益。期货合约是对资产的将来价格所下的赌注，而期货式期权是对期权将来收益所下的赌注[⊜]。当利率为常数时，期货式期权中的期货价格等价于期权收益的远期合约中的远期价格，这一结论说明期货式期权中的期货价格等于一个在到期时才付费的期权的价格。因此，期货式期权价格等于一个普通期权价格以无风险利率复利到期权满期。

式(17-9)和式(17-10)定义的布莱克模型给出了一个普通欧式期权的价格，其中期货(远期)价格 F_0 对应于一个与期权具有同样期限的期货。因此，看涨期货式期权中的期货价格为

$$F_0N(d_1) - KN(d_2)$$

看跌期货式期权中的期货价格为

$$KN(-d_2) - F_0N(-d_1)$$

式中 d_1 和 d_2 由式(17-9)和式(17-10)给出。这些公式不依赖于无风险利率，并且对于期货合约的期货式期权和资产即期价格的期货式期权均正确。在第一种情形下，F_0 为期权标的合约的当前期货价格；在第二种情形下，F_0 为与期权具有同样期限的期货合约的当前期货价格。

对期货期权的看跌-看涨期权平价关系式为

⊖ 与期货期权相对应的即期期权具有相同的执行价格及到期日。

⊜ 关于期货式期权的详细讨论，见 D. Lieu，"Option Pricing with Futures-Style Margining," *Journal of Futures Markets*, 10, 4(1990), 327-338。当利率为随机时，见 R. -R. Chen and L. Scott，"Pricing Interest Rate Futures Options with Futures-Style Margining," *Journal of Futures Markets*, 13, 1(1993), 15-22。

$$p + F_0 = c + K$$

一个美式期货式期权可以被提前行使，这时期权的内涵价格要马上结算。事实上，提前行使美式期货式期权一定不为最优，这是因为期权的期货价格永远大于内涵价格。这种美式期货式期权可被视为欧式期货式期权。

小 结

期货期权在行使时需要交割标的期货。当一看涨期权被行使时，期权持有者取得期货长头寸加上期货价格超出执行价格的现金余额。类似地，当看跌期权被行使时，期权持有者取得期货短头寸加上执行价格超出期货价格的现金余额。期货的到期日通常比期权的到期日略晚。

期货价格与支付连续股息收益率等于无风险利率 r 的股票价格相似。这意味着，当我们将股票价格由期货价格取代，并令股息收益率等于无风险利率时，第 16 章中得出的股票期权定价公式也适用于期货期权。欧式期权的定价公式最早由布莱克于 1976 年提出，公式中的主要假设是期权到期时期货价格服从对数正态分布。

如果期权与期货具有同样的期限，欧式期货期权的价格等于相应的欧式即期期权的价格。这一结论对美式期权并不成立。如果期货市场为正常市场，美式看涨期货期权的价格会高于相应的美式即期看涨期权，美式看跌期货期权的价格会低于相应的美式即期看跌期权，当期货市场为反向市场时，以上相反的结论会成立。

推荐阅读

Black, F. "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, 3 (1976): 167–79.

Hilliard, J. E., and J. Reis. "Valuation of Commodity Futures and Options under Stochastic Convenience Yields, Interest Rates, and Jump Diffusions in the Spot," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 1 (March 1998): 61–86.

Miltersen, K. R., and E. S. Schwartz. "Pricing of Options on Commodity Futures with Stochastic Term Structures of Convenience Yields and Interest Rates," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 1 (March 1998): 33–59.

练习题

17.1 解释一个关于日元的看涨期权和日元期货的看涨期权的不同。

17.2 为什么国库券期货期权比国库券期权交易更为活跃？

17.3 "期货价格类似于支付连续股息的股票"，这里的股息收益率为多少？

17.4 一个期货的当前价格为 50 美元，在 6 个月后，价格会变为 56 美元或者变为 46 美元，无风险利率为每年 6%，6 个月期限、执行价格为 50 美元的欧式看涨期权价格为多少？

17.5 一个对于期货期权的看跌-看涨期权平价关系式与一个无股息股票期权的看跌-看涨期权平价关系式的不同之处是什么？

17.6 考虑一美式期货看涨期权，其中期货与期权到期日相同，在什么情况下期货期权价格高于相应的有关标的资产的美式期权？

17.7 计算以下 5 个月期的欧式看跌期货期权价格：期货价格为 19 美元，期权执行价格为 20 美元，无风险利率为每年 12%，期货价格波动率为每年 20%。

17.8 假定你买入关于 10 月份黄金期货的看跌期权，执行价格为每盎司 1 200 美元，每一个期权合约的标的资产为 100 盎司黄金。当 10 月份期货价格为 1 180 美元时，行使期权会产生什么样的收益？

17.9 假定你卖出了一个关于 4 月份的活牛期货看涨期权，期权执行价格为每磅 90 美分，每一个期权合约的标的资产为

40 000磅活牛。在期货价格为95美分时，行使期权会产生什么样的收益？

17.10 考虑一个2个月期限的期货看涨期权，执行价格为40美元，无风险利率为每年10%，当前期货价格为47美元，在以下两种情况下，期货期权的下限为多少？(a)欧式期权和(b)美式期权。

17.11 考虑一个4个月期限的看跌期货期权，执行价格为50美元，无风险利率为每年10%，期货的当前价格为47美元，在期权为以下两种情况下，期权价格的下限为多少？(a)欧式期权和(b)美式期权。

17.12 某期货的当前价格为60美元，波动率为30%，无风险利率为每年8%。利用两步二叉树来估计期货6个月期、执行价格为60美元的看涨期权价格。如果看涨期权为美式期权，期权是否应被提前行使？

17.13 在练习题17.12中，二叉树所给出的6个月期、执行价格为60美元的期货欧式看涨期权价格是多少？如果看跌期权为美式期权，期权是否应该被提前行使？验证练习题17.12中计算出的欧式看涨期权价格和本例中计算出的欧式看跌期权价格满足看跌-看涨期权平价关系式。

17.14 某期货当前价格为25美元，波动率为30%，无风险利率为每年10%，一个9个月期限、执行价格为26美元的欧式看涨期货期权价格为多少？

17.15 某期货当前价格为70美元，波动率为每年20%，无风险利率为每年6%，一个执行价格为65美元，5个月期限的欧式看跌期货期权价格为多少？

17.16 假定1年期限的期货当前价格为35美元。在这个期货上一个1年期的欧式看涨期权和一个1年期的欧式看跌期权价格均为2美元，这里看涨与看跌期权的执行价格均为34美元，无风险利率为每年10%，识别套利机会。

17.17 一个平值欧式期货看涨期权价格总是等于一个类似的平值欧式期货看跌期权价格。解释这句话为什么正确。

17.18 假定一期货当前价格为30美元，无风险利率为每年5%，一个3个月期限、执行价格为28美元的美式期货看涨期权价格为4美元。计算3个月期执行价格为28美元的美式看跌期货期权价格下限。

17.19 假定C为美式期货看涨期权价格，其中执行价格为K，期限为T。P为一个对于同一期货具有相同执行价格与期限的美式期货看跌期权价格，证明

$$F_0e^{-rT}-K<C-P<F_0-Ke^{-rT}$$

式中F_0为期货价格，r为无风险利率。假定$r>0$，并且假定远期和期货价格等同（提示：采用类似练习题16.12中的方法）。

17.20 计算即期白银3个月期限的欧式看涨期权价格，这里的3个月期限的期货价格为12美元，执行价格为13美元，无风险利率为4%，白银价格波动率为25%。

17.21 一家公司已知在3个月时要将500万美元投资90天，投资收益率为LIBOR－50个基点，该公司想确保收益率不低于6.5%，它需要买入什么样的交易所交易期权来达到对冲目的？

作业题

17.22 某期货价格为40美元，已知在3个月末，价格会变为35美元或45美元。一个执行价格为42美元的3个月期的欧式看涨期权的价格为多少？这里的无风险利率为每年7%。

17.23 假定今天为2月4日。执行价格为260、270、280、290与300的7月份玉米期货看涨期权价格分别为26.75、21.26、17.25、14.00与11.375。具有相同执行价格的7月份看跌期权价格分别为8.50、13.50、19.00、25.625和32.625。期权到期日为6月19日，7月份玉米期货价

格为 278.25，无风险利率为 1.1%。采用 DerivaGem 来计算期权的隐含波动率。讨论你所得出的结果。

17.24 下表是关于大豆期货的欧式看跌期权价格表，计算大豆期货的隐含波动率。

期货的当前价格	525
执行价格	525
无风险利率	每年 6%
期限	5 个月
看跌期权价格	20

17.25 计算关于 S&P 500 即期值的 6 个月期欧式看跌期权价格。股指上 6 个月期限的远期价格为1 400，执行价格为 1 450，无风险利率为 5%，股指波动率为 15%。

17.26 期货期权的执行价格是 550 美分，无风险利率为 3%，期货价格的波动率为 20%，期权的期限是 9 个月，期货价格是 500 美分。

(a) 当期权为欧式看涨期权时，价格是多少？

(b) 当期权为欧式看跌期权时，价格是多少？

(c) 验证看跌-看涨平价关系式。

(d) 如果期权是期货式看涨期权，期权的期货价格是多少？

(e) 如果期权是期货式看跌期权，期权的期货价格是多少？

PDG



第 18 章 希腊值

金融机构在场外市场向客户卖出期权后会面临风险管理的问题。如果出售的期权刚好与交易所内交易的期权相同，那么这家金融机构可以在交易所买入同样的期权来对冲其风险暴露。但是，如果场外市场的期权是为了满足客户的特殊需要而设定，那么这一期权与交易所内交易的标准化期权会有所不同，这时对冲这一期权的风险就会比较困难。

本章将讨论解决这个问题的几种方式。我们将讨论希腊值(Greek letters，Greeks)。每一个希腊值都被用来度量交易中的某个特定风险，而交易员管理交易的目的就是管理交易组合的希腊值，以便将其值保持在一个可接受范围之内。本章中的分析既适用于交易所内的做市商，也适用于金融机构的场外市场交易员。

本章末我们将讨论如何以合成形式来构造期权，这与期权的对冲密切相关。以合成形式来构造期权与构造相反的对冲期权是一回事。例如，以合成形式构造的看涨期权等价于对冲看涨期权的短头寸。

18.1 例解

以下几节我们将采用一家金融机构的头寸来作为例子，该金融机构卖出了 100 000 份无股息股票的欧式看涨期权，收入为 300 000 美元。我们假设股票价格为 49 美元，期权执行价格为 50 美元，无风险利率为每年 5%，股票价格的波动率为每年 20%，期权期限为 20 周(0.384 6 年)，股票的收益率期望为每年 13%[1]。采用惯用的符号，这意味着

$$S_0 = 49,\quad K = 50,\quad r = 0.05,\quad \sigma = 0.20,\quad T = 0.3846,\quad \mu = 0.13$$

由布莱克-斯科尔斯-默顿模型得出，此期权的价格大约为 240 000 美元(即买入一股股票的期权是 2.4 美元)。这家金融机构卖出期权的价格比理论价格高出 60 000 美元，但它同时也面临对冲风险的问题[2]。

18.2 裸露头寸和带保头寸

金融机构可采用的一种策略是对期权头寸不采取任何对冲措施，这种做法被称为持有**裸露头寸**(naked position)。20 周后，如果股票价格低于 50 美元，这种策略的收益会很好。期权最终没有给金融机构带来任何费用，整个交易给金融机构带来净利润 300 000 美元。如果在 20 周后期权

---

[1] 如第 12 章和第 14 章所示，股票的收益率期望与期权价格无关。这里给出股票的收益率期望是因为此变量同对冲的效率有关。

[2] 这里采用无股息股票的欧式看涨期权来作为例子是为了便于说明问题，这里所得的结论也适用于其他类型的期权及衍生产品。

得以行使，这种策略收益不好。在期权到期时，金融机构必须在市场以市价买入 100 000 股股票以兑现期权承诺。例如，如果在 20 周后，股票价格为 60 美元，期权会给金融机构带来 1 000 000 美元的费用。这一费用远远大于期权所带来的 300 000 美元收入。

金融机构可以采取的另一种策略被称为**带保头寸**(covered position)。在这种策略中，金融机构在卖出期权时也买入 100 000 股股票。如果期权被行使，这一交易策略会很好，而在其他情形会有很大损失。例如，假如股票价格降到 40 美元，金融机构持有的股票将损失 900 000 美元，但这一数量远远大于期权所带来的 300 000 美元收入[⊖]。

裸露头寸和带保头寸都不是很好的对冲交易策略。如果布莱克-斯科尔斯-默顿模型的假设前提成立，在两种策略中，金融机构持有期权的费用平均应当为 240 000 美元[⊜]。但是，在以上各种情况下，成本范围介于 0 ~ 1 000 000 美元之上，一个理想的对冲交易费用应接近于 240 000 美元。

18.3　止损交易策略

止损交易策略(stop-loss strategy)是一个很有意思的对冲方法。为了解释这一方法，假定某金融机构卖出了一个期权，期权持有者有权以 K 的价格买进一只股票。止损交易策略的思路是这样的：在股票价格刚刚高于 K 时马上买入股票，而在股票价格刚刚低于 K 时马上卖出股票。这一对冲的核心思想就是当股票价格刚刚低于 K 时，采用裸露头寸策略，而当股票价格刚刚高于 K 时，采用带保头寸策略。这一对冲的设计过程保证了在时间 T，如果期权处于实值状态，金融机构会持有股票；如果期权处于虚值状态，金融机构不持有股票。该交易策略所形成的收益类似于期权的收益。如图 18-1 所示，这一策略在时刻 t_1 买入股票、在时刻 t_2 卖出股票、在时刻 t_3 买入股票、在时刻 t_4 卖出股票、在时刻 t_5 买入股票并在时刻 T 交割。

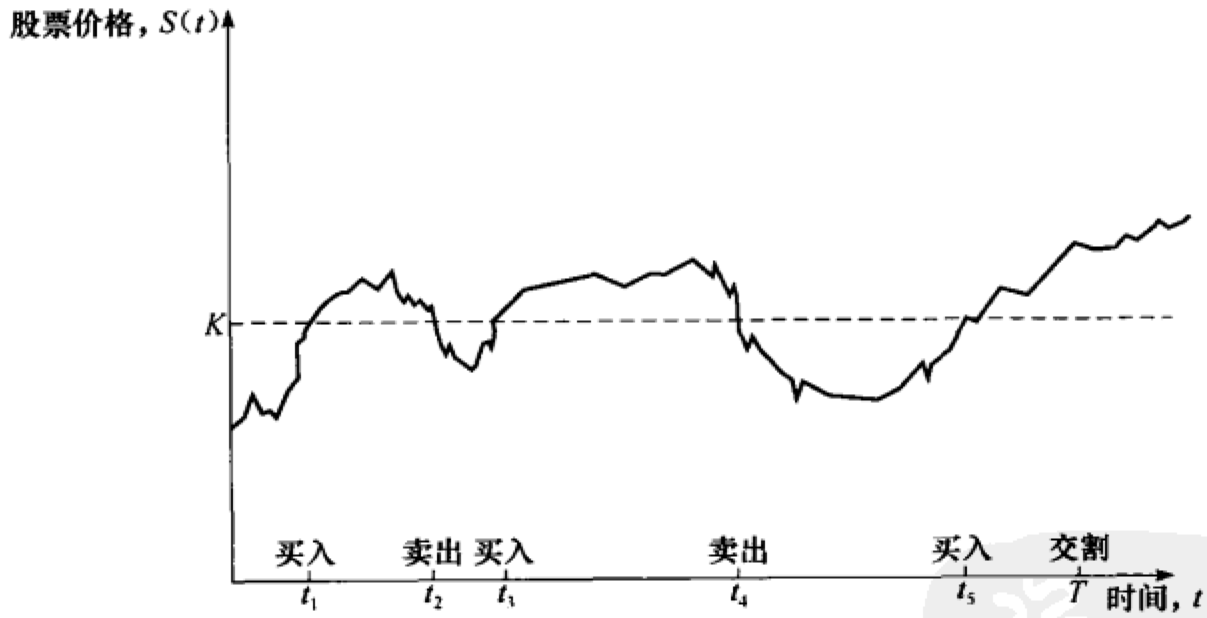


图 18-1　止损交易策略

采用惯用的符号，我们假定股票的初始价格为 S_0，这一交易的初始费用在当 $S_0 > K$ 时为 S_0，否则为 0。这样一来，卖出期权并进行对冲后的全部费用 Q 为期权的内涵价格：

$$Q = \max(S_0 - K, 0) \tag{18-1}$$

这是因为在时间 0 之后的买入以及卖出交易的价格均为 K。如果以上公式正确，在没有交易费用的情况下，该交易对冲策略会非常完美。而且，这种交易的对冲费用永远小于由布莱克-斯科尔斯-默顿公式所给出的期权价格。因此，投资者通过卖出期权并以这一方式对冲，可以获得无风

⊖ 看跌-看涨期权平价关系式显示，出售带保头寸看涨期权的风险等价于出售无保护的看跌期权的风险。

⊜ 更准确地讲，在采用合适的经风险调节的贴现率，两种策略的成本期望的贴现值均为 24 万美元。

险盈利。

式(18-1)并不正确，原因有两个：第一个原因是对冲者的现金流发生在不同的时刻，对这些现金流必须贴现；第二个原因是股票的买入与卖出不可能总是正好发生在价格等于 K 的时刻。第二个原因很关键。假如我们处在利率为0的风险中性世界里，我们可以忽略货币的时间价值，但并不能假定股票的买入与卖出刚好发生在价格等于 K 的时刻。如果市场是有效的，在股票市场价格为 K 时，对冲者并不知道股票价格会变得高于还是低于 K。

一种可行的做法是在以上描述的过程中，股票的买入价格必须为 $K+\varepsilon$，股票的卖出价格必须为 $K-\varepsilon$，这里的 ε 为一个小的正数。因此每一笔买入与卖出股票的费用为 2ε(在这里我们忽略交易手续费)。对冲者一个自然的做法是增大价格观测的频率来使得 ε 变得更小。但当 ε 变得更小时，交易也会更加频繁，因此交易费用的减低会被交易频率的增加所抵消。但当 $\varepsilon \to 0$ 时，预期交易数量会趋向于无穷大[⊖]。

尽管止损交易策略从表面上看起来很诱人，但这一策略并不是有效的对冲手段。例如，考虑一虚值期权。如果股票价格从来达不到 K 的价格，那么止损交易策略的费用为0。如果股票价格与执行价格水平线交叉很多次，止损交易策略的费用会很高。**蒙特卡罗模拟法**(Monte Carlo simulation)可用于检验止损交易策略的整体效果，该方法先随机地产生股票价格的路径，然后再计算止损交易策略的结果。表18-1显示了以上考虑的期权结果。假定在时间间隔为 Δt 的末尾观察股票价格[⊜]，对冲的表现(对冲表现测度)以期权对冲费用的标准差与期权的布莱克-斯科尔斯-默顿价格的比率来衡量。每一个结果都是基于1 000个股票价格路径抽样来计算的，标准误差大约为2%。完美的对冲将会使对冲表现测度为零，但在这里我们可以看出无论 Δt 如何小，止损交易策略的对冲表现测度都不小于0.70。

表18-1 止损交易策略的表现

Δt(周)	5	4	2	1	0.5	0.25
对冲表现	1.02	0.93	0.82	0.77	0.76	0.76

注：对冲的表现以期权对冲费用的标准差与期权的布莱克-斯科尔斯-默顿价格的比率来衡量。

18.4 Delta对冲

大多数交易员采用的对冲策略要比我们前面所讨论的方法更为复杂，这些对冲策略中包括计算Delta、Gamma、Vega等测度。本节我们将讨论Delta的作用。

在第12章里我们引入了期权的Delta(Δ)，该变量定义为期权价格变动与其标的资产价格变动的比率，它是期权价格与标的资产价格变化曲线的切线斜率。假定某看涨期权Delta为0.6，这意味着当股票价格变化一个很小的数量时，相应期权价值变化大约等于股票价值变化的60%。图18-2展示了期权变化随标的资产变化的关系。当股票价格对应点 A 时，期权价格对应于点 B，而 Δ 为

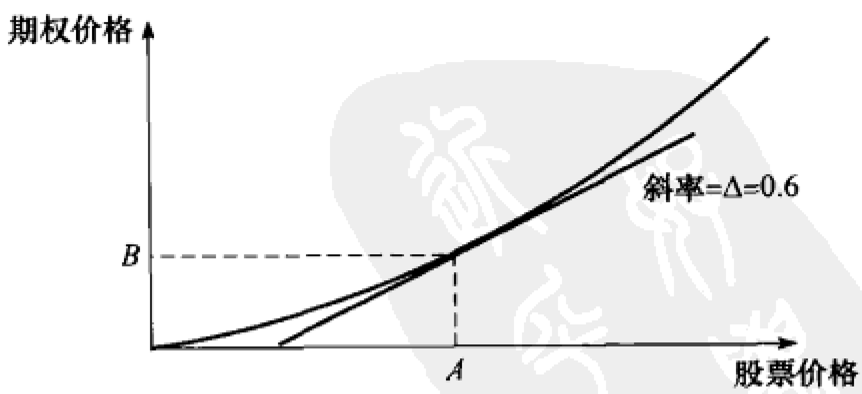


图18-2 Delta的计算

⊖ 如13.2节所述，在某一固定时间段，维纳过程等于某一特定数值的预期次数为无穷大。

⊜ 精确的对冲规则可被描述如下：如果在 Δt 时间段，股票价格从低于 K 上生到高于 K，那么在该时间段的末尾购入股票；如果在 Δt 时间段，股票价格从高于 K 下跌到低于 K，那么在该时间段的末尾卖出股票；否则，不进行任何交易。

图中所示直线的斜率。一般来讲

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

式中，c 是看涨期权的价格，S 是股票的价格。

假设在图 18-2 中，股票价格为 100 美元，期权价格为 10 美元。假设金融机构的交易员卖出了 20 份该股票的看涨期权（期权持有者有权购买 2 000 股股票）。交易员的头寸可以通过购买 $0.6 \times 2\,000 = 1\,200$ 股股票来对冲。期权头寸所对应的盈利（亏损）可由股票头寸上的亏损（盈利）来抵消。例如，如果股票价格上涨 1 美元（买入的股票会升值 1 200 美元），期权价格将上涨 $0.6 \times 1 = 0.6$ 美元（卖出期权会带来损失 1 200 美元）；如果股票价格下跌 1 美元（买入股票会损失 1 200 美元），期权价格下跌 0.6 美元（卖出期权会带来收益 1 200 美元）。

在这个例子中，交易员 2 000 个期权头寸的 Delta 为

$$0.6 \times (-2\,000) = -1\,200 \text{ 美元}$$

换句话说，当股票上涨 ΔS 时，交易员期权的短头寸就会损失 $1\,200\Delta S$。每股股票的 Delta 为 1.0，因此持有 1 200 股股票的 Delta 值为 1 200。因此，投资者的整体 Delta 为 0。股票头寸的 Delta 被期权头寸的 Delta 抵消。Delta 为 0 的头寸被称为 **Delta 中性**（delta neutral）。

有一点非常重要，由于 Delta 会变动，投资者的 Delta 对冲状态（或 Delta 中性状态）只能维持在一段短暂的时间里。对冲策略要不断地调整，这种调整过程被称为**再平衡**（rebalancing）。在我们的例子中，在 3 天末时的股票价格也许会升到 110 美元。如图 18-2 所示，股票价格上涨会使得 Delta 变大，假设 Delta 从 0.6 增加到 0.65，如果仍要保持 Delta 中性，投资者需要再买入 $0.05 \times 2\,000 = 100$ 股股票。

这里所描述的 Delta 对冲策略为**动态对冲**（dynamical-hedging）策略的一个例子。这种对冲策略与**静态对冲**（static-hedging）策略形成了对比，静态对冲在最初设定后无须再调整。静态对冲有时也被称为**"保完即忘"**（hedge-and-forget）策略。Delta 对冲与布莱克-斯科尔斯-默顿分析密切相关。如第 14 章所述，通过由股票期权与标的股票建立的无风险交易组合，我们可以推导出布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程。采用符号 Δ，布莱克-斯科尔斯-默顿分析里的交易组合为

$$\begin{cases} -1: \text{期权} \\ +\Delta: \text{股票} \end{cases}$$

采用新的术语，我们进行以下描述：在建立 Delta 中性的头寸后，可以通过论证该交易组合的收益率等于（瞬时）无风险利率来为期权定价。

18.4.1 欧式股票期权的 Delta

对于无股息股票期权上看涨期权的 Delta，我们可以证明（见练习题 14.17）

$$\Delta(\text{看涨}) = N(d_1)$$

式中 d_1 由式（14-20）给出，$N(x)$ 是标准正态分布函数。以上公式为欧式看涨期权长头寸的 Delta。欧式看涨期权短头寸的 Delta 为 $-N(d_1)$。对一个看涨期权短头寸做对冲时，对卖出的每个期权需要持有 $N(d_1)$ 股股票的长头寸。类似地，对一个看涨期权长头寸做对冲时，对买进的每个期权，需要持有 $N(d_1)$ 股股票的短头寸。

对于无股息股票上看跌期权的 Delta 为

$$\Delta(\text{看跌}) = N(d_1) - 1$$

这里的 Delta 为负，意味着看跌期权的长头寸应该由标的股票的长头寸来对冲；同时看跌期权的短头寸应该由标的股票的短头寸来对冲。图 18-3 显示了看涨与看跌期权的 Delta 与股票价格之间的变化关系。图 18-4 显示了实值期权、平值期权和虚值期权的 Delta 与期权期限之间的变化关系。

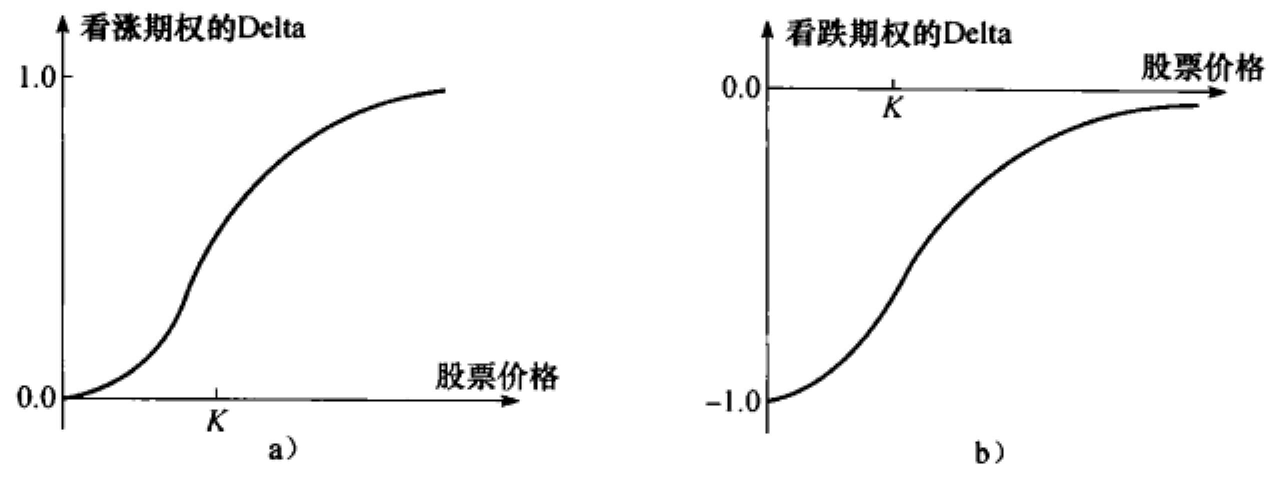


图 18-3 无股息股票看涨期权及看跌期权的 Delta 与股票价格之间的变化关系

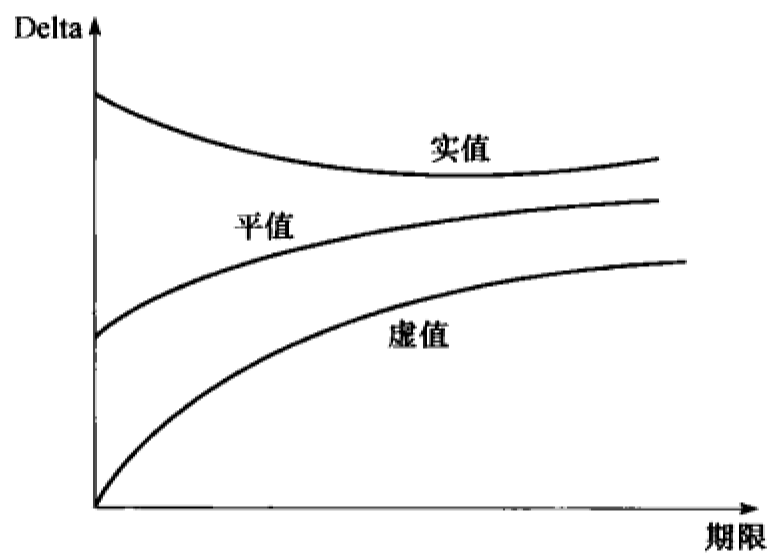


图 18-4 看涨期权的 Delta 与期权期限之间的变化关系

【例 18-1】 再次考虑 18.1 节中的无股息股票看涨期权，其中股票价格为 49 美元，执行价格为 50 美元，无风险利率为 5%，期限为 20 周（=0.384 6 年），股票价格波动率为 20%。这时，我们有

$$d_1 = \frac{\ln(49/50) + (0.05 + 0.2^2/2) \times 0.3846}{0.2 \times \sqrt{0.3846}}$$
$$= 0.0542$$

Delta 为 $N(d_1)$，即 0.522。当股票价格变化为 ΔS 时，期权价格变化为 $0.522\Delta S$。

18.4.2 对冲的动态特性

表 18-2 和表 18-3 给出了两个对 18.1 节中的例子做 Delta 对冲的例子。这里我们假设对冲交易是每个星期进行再平衡一次。在例 18-1 中我们计算了所卖出期权在最初的 Delta 为 0.522，因而整个交易组合的 Delta 为 -52 200。这意味着在出售看涨期权的同时，交易员必须借入 2 557 800 美元，并按 49 美元价格购买 52 200 股股票。借入资金的利率为 5%，第一周的利息费用大约为 2 500 美元。

表 18-2 Delta 对冲模拟（期权为实值期权；对冲成本为 263 300 美元）

周数	股票价格	Delta	购买股票数量	购买股票费用（以千计）	累计现金流（以千计）	利息费用（以千计）
0	49.00	0.522	52 200	2 557.8	2 557.8	2.5
1	48.12	0.458	(6 400)	(308.0)	2 252.3	2.2
2	47.37	0.400	(5 800)	(274.7)	1 979.8	1.9
3	50.25	0.596	19 600	984.9	2 966.6	2.9

（续）

周数	股票价格	Delta	购买股票数量	购买股票费用（以千计）	累计现金流（以千计）	利息费用（以千计）
4	51.75	0.693	9 700	502.0	3 471.5	3.3
5	53.12	0.774	8 100	430.3	3 905.1	3.8
6	53.00	0.771	(300)	(15.9)	3 893.0	3.7
7	51.87	0.706	(6 500)	(337.2)	3 559.5	3.4
8	51.38	0.674	(3 200)	(164.4)	3 398.5	3.3
9	53.00	0.787	11 300	598.9	4 000.7	3.8
10	49.88	0.550	(23 700)	(1 182.2)	2 822.3	2.7
11	48.50	0.413	(13 700)	(664.4)	2 160.6	2.1
12	49.88	0.542	12 900	643.5	2 806.2	2.7
13	50.37	0.591	4 900	246.8	3 055.7	2.9
14	52.13	0.768	17 700	922.7	3 981.3	3.8
15	51.88	0.759	(900)	(46.7)	3 938.4	3.8
16	52.87	0.865	10 600	560.4	4 502.6	4.3
17	54.87	0.978	11 300	620.0	5 126.9	4.9
18	54.62	0.990	1 200	65.5	5 197.3	5.0
19	55.87	1.000	1 000	55.9	5 258.2	5.1
20	57.25	1.000	0	0.0	5 263.3	

在表 18-2 中，一周后股票价格降到了 48.12 美元，期权的 Delta 也随之降到了 0.458，期权头寸新的 Delta 为 −45 800。要保持 Delta 中性，需要从已持股票中卖出 6 400 股股票，卖出股票带来现金收入为 308 000 美元，第一周的累计借款余额减至为2 252 300美元。在第二周内，股票价格降到了 47.37 美元，期权的 Delta 也随之降低。在期权接近到期时，很明显期权将被行使，期权的 Delta 接近 1.0。因此在第 20 周结束时，对冲者会拥有100 000股股票，期权持有人会在此时行使期权，对冲者以执行价格卖出股票而收到 5 000 000 美元，卖出期权与对冲风险的总支出费用为 263 300 美元。

表 18-3 显示出另一组模拟的股票价格，期权在期满时成为虚值期权，在第 20 周结束时，对冲者不持有任何股票，对冲总支出费用为 256 600 美元。

表 18-3　Delta 对冲模拟（期权为实值期权；对冲成本为 256 600 美元）

周数	股票价格	Delta	购买股票数量	购买股票费用（以千计）	累计现金流（以千计）	利息费用（以千计）
0	49.00	0.522	52 200	2 557.8	2 557.8	2.5
1	49.75	0.568	4 600	228.9	2 789.2	2.7
2	52.00	0.705	13 700	712.4	3 504.3	3.4
3	50.00	0.579	(12 600)	(630.0)	2 877.7	2.8
4	48.38	0.459	(12 000)	(580.6)	2 299.9	2.2
5	48.25	0.443	(1 600)	(77.2)	2 224.9	2.1
6	48.75	0.475	3 200	156.0	2 383.0	2.3
7	49.63	0.540	6 500	322.6	2 707.9	2.6
8	48.25	0.420	(12 000)	(579.0)	2 131.5	2.1
9	48.25	0.410	(1 000)	(48.2)	2 085.4	2.0

（续）

周数	股票价格	Delta	购买股票数量	购买股票费用（以千计）	累计现金流（以千计）	利息费用（以千计）
10	51.12	0.658	24 800	1 267.8	3 355.2	3.2
11	51.50	0.692	3 400	175.1	3 533.5	3.4
12	49.88	0.542	(15 000)	(748.2)	2 788.7	2.7
13	49.88	0.538	(400)	(20.0)	2 771.4	2.7
14	48.75	0.400	(13 800)	(672.7)	2 101.4	2.0
15	47.50	0.236	(16 400)	(779.0)	1 324.4	1.3
16	48.00	0.261	2 500	120.0	1 445.7	1.4
17	46.25	0.062	(19 900)	(920.4)	526.7	0.5
18	48.13	0.183	12 100	582.4	1 109.6	1.1
19	46.63	0.007	(17 600)	(820.7)	290.0	0.3
20	48.12	0.000	(700)	(33.7)	256.6	

表18-2与表18-3表明，贴现后对冲成本很接近于布莱克-斯科尔斯-默顿的理论价格240 000美元，但这些近似值与布莱克-斯科尔斯-默顿的价格并不完全一致。在一个完美的对冲机制下，对每一组模拟的股票价格变化，贴现后对冲费用与理论价格应完全相等。Delta对冲费用与理论费用的差别是因为对冲交易的频率仅为一周一次，当对冲再平衡的频率增大时，对冲费用与理论值的差距将会减小。当然，这里的分析结果是建立在波动率为常数以及无交易费用等假设上的。

表18-4展示了我们在例子中模拟的1 000股股票路径所对应的Delta对冲的效果统计。与表18-1类似，对冲效果由对冲费用的标准差与期权的布莱克-斯科尔斯-默顿价格的比率来衡量。显然，Delta对冲比止损策略有很大改进。不同于止损策略的是，随着调整频率的提高，Delta对冲效果也会逐步提高。

表18-4 Delta对冲的效果

再平衡之间的时间（周）	5	4	2	1	0.5	0.25
对冲表现	0.43	0.39	0.26	0.19	0.14	0.09

对冲的目的是为了使金融机构的头寸的价值尽量保持不变。最初卖出期权的价值为240 000美元，由表18-2所示，第9周时的期权价值为414 500美元，因卖出期权金融机构损失174 500美元(414 500 - 240 000)。资金累计费用在第9周时比交易开始时要多1 442 900美元，所持有股票的价值由最初的2 557 800美元变为4 171 100美元。将所有头寸汇总在一起，金融机构的交易组合价值从第0周到第9周的变化仅为4 100美元。

18.4.3 费用由何而来

由表18-2与表18-3所示的对冲机制以合成的形式构造出一个等价于期权长头寸的交易，从而与金融公司所持的短头寸相互抵消。如表所示，对短头寸进行对冲会造成在价格下跌时将卖出股票，而在价格上涨时将买进股票，我们也许可以称此为“买高卖低”。数量为240 000美元的费用来自于购买股票价格与卖出股票价格之差的平均值。

18.4.4 证券组合的Delta

以某单一资产为标的资产的期权或其他衍生产品组合的Delta定义为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S}$$

其中 Π 为证券组合的价值。

证券组合的 Delta 值可由证券组合内各个单一期权的 Delta 来计算。如果一个交易组合由数量为 w_i 的期权($1 \leqslant i \leqslant n$)组成，那么证券组合的 Delta 值为

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i$$

其中 Δ_i 为第 i 个期权的 Delta。该公式可以用来计算标的资产的头寸或标的资产期货的头寸，以使得证券组合的 Delta 为 0。当 Delta 为 0 时，我们称证券组合为 **Delta 中性**(delta neutral)。

假定一个金融机构持有以下 3 个关于某标的股票的头寸。

- 100 000 份看涨期权的长头寸，执行价格为 55 美元，期限为 3 个月，每份期权的 Delta 为 0.533；
- 200 000 份看涨期权的短头寸，执行价格为 56 美元，期限为 5 个月，每份期权的 Delta 为 0.468；
- 50 000 份看跌期权的短头寸，执行价格为 56 美元，期限为 2 个月，每份期权的 Delta 为 −0.508。

这时整个证券组合 Delta 为

$$100\,000 \times 0.533 - 200\,000 \times 0.468 - 50\,000 \times (-0.508) = -14\,900$$

这意味着金融机构可以买入 14 900 股股票来使得该证券组合为 Delta 中性。

18.4.5 交易费用

衍生产品交易商一般每天都会将其头寸再平衡一次，以便使其为 Delta 中性。如果交易商一个资产上仅有少量的期权，若按以上所描述方式进行对冲时将会引发昂贵的交易费用。但对一个很大的期权组合进行对冲时，Delta 中性就会切实可行。此时只需要进行一笔标的资产交易就可以将整个期权组合的 Delta 中性化，交易费用也会被其他交易盈利所吸收。

18.5 Theta

期权组合的 Theta(Θ)定义为在其他条件不变时，证券组合价值变化与时间变化的比率。Theta 有时被称为证券组合的**时间损耗**(time decay)。对于一个无股息股票的欧式看涨期权，计算 Theta 的公式可由布莱克-斯科尔斯-默顿得出(见练习题 14.17)，即

$$\Theta(\text{看涨}) = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

式中 d_1 与 d_2 分别由式(14-20)给出，而且

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \tag{18-2}$$

为标准正态分布的密度函数。

对于一个股票上欧式看跌期权，计算 Theta 的公式为

$$\Theta(\text{看跌}) = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

因为 $N(-d_2) = 1 - N(d_2)$，看跌期权的 Theta 比相应看涨期权的 Theta 大一个值为 rKe^{-rT} 的数量。

在这些公式中，时间以年为单位。而通常在计算 Theta 时，时间是以天为单位，因此 Theta 为在其他变量不变时，在一天过后交易组合价值的变化。我们可以计算“每日历天”的 Theta 或“每

交易日”的 Theta。为了计算每日历天的 Theta，上面计算 Theta 的公式必须除以 365，为了计算每交易日的 Theta，上面计算 Theta 的公式则除以 252（DerivaGem 计算每日历天的 Theta）。

【例 18-2】 采用例 18-1 中的数据，考虑一个对于无股息股票的期权，其中股票价格为 49 美元，执行价格为 50 美元，无风险利率为 5%，期限为 20 周（=0.384 6 年），股票价格波动率为 20%，这时 $S_0=49$，$K=50$，$r=0.05$，$\sigma=0.2$，$T=0.384\,6$，期权的 Theta 为

$$-\frac{S_0N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}-rKe^{-rT}N(d_2)=-4.31$$

因此，每日历天的 Theta 为 $-4.31/365=-0.011\,8$，每交易日的 Theta 为 $-4.31/252=-0.017\,1$。

期权的 Theta 通常为负⊖，这是因为在其他条件不变的情况下，随着期限的减小，期权价值会降低。图 18-5 显示一个股票上看涨期权的 Theta 与标的资产之间关系的曲线，当股票价格很低时，Theta 接近于零。对应于一个平值看涨期权，Theta 很大且是负值。当股票价格很高时，Theta 接近于 $-rke^{-rT}$。图 18-6 显示在三种不同情况：实值期权、平值期权、虚值看涨期权时 Theta 随时间变化的曲线。

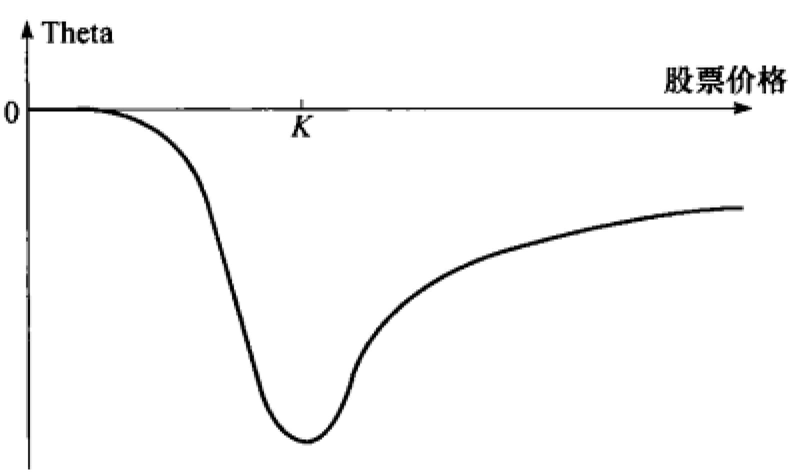


图 18-5 看涨期权的 Theta 与标的资产关系的曲线

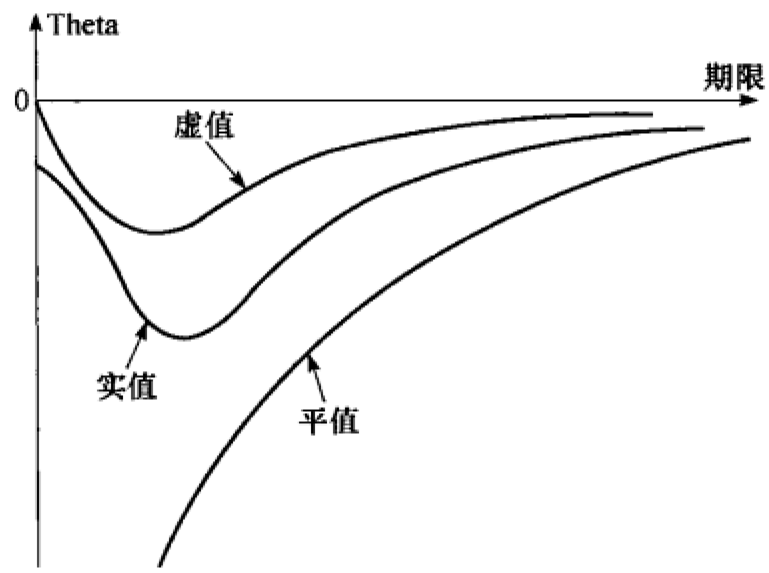


图 18-6 在三种不同情况下 Theta 随时间变化的曲线

作为对冲参数，Theta 与 Delta 属于不同类型。这是因为未来股票的价格有很大的不定性，但时间走向却没有不定性。通过对冲来消除交易组合关于标的资产的风险很有意义，但通过对冲来消除交易组合对于时间的不定性就毫无意义。即使如此，许多交易员仍把 Theta 作为一个关于交易组合有用的描述。正如我们在今后会看到的那样，在一个 Delta 中性的交易组合中，Theta 为 Gamma 的近似。

18.6 Gamma

期权交易组合的 Gamma（Γ）是指交易组合 Delta 的变化与标的资产价格变化的比率。这是交易组合关于标的资产价格的二阶偏导数

$$\Gamma=\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}$$

当 Gamma 很小时，Delta 变化缓慢，这时为保证 Delta 中性所做的交易调整并不需要太频繁。但是当 Gamma 的绝对值很大时，交易组合的 Delta 对标的资产价格变动就变得很敏感，此时在任何一

⊖ 对这一特性的反例包括：无股息实值看跌期权，以及外币汇率较高时的实值看涨汇率期权。

段时间内不对一个 Delta 中性的交易组合做调整都会非常危险。图 18-7 说明了这一点，当股票价格由 S 变成 S'时，在 Delta 对冲时假设期权价格由 C 变成 C'，而事实上期权由 C 变成了 C''。C'与 C''的不同就造成了对冲误差，而这一误差的大小取决于期权价格与标的资产价格曲线的曲率。Gamma 值正是用来度量这一曲率[⊖]。

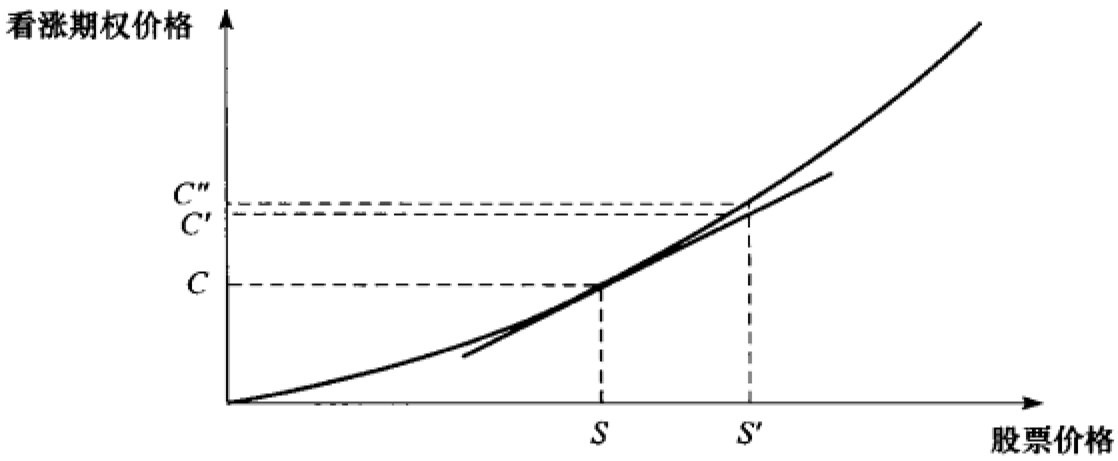


图 18-7 非线性所引入的对冲误差

假定 ΔS 为在很小时间区间 Δt 内股票价格的变化，$\Delta\Pi$ 为相应的交易组合价格变化。对于一个 Delta 中性的交易组合，附录 18A 证明了当忽略高级项后

$$\Delta\Pi = \Theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2 \tag{18-3}$$

其中 Θ 为证券组合的 Theta。图 18-8 展示了 $\Delta\Pi$ 与 ΔS 之间的关系。由这一图形我们可以看到，当 Gamma 为正时，Θ 往往是负值。如果这时 S 没有什么变化，交易组合的价值将会下降。只有当标的资产价格 S 变化幅度较大时，交易组合才会有正的收益；当 Gamma 为负时，Θ 将很可能为正，与上面相反结论成立。当标的资产价格 S 不变时，组合价值上升，而当 S 变化很大时，组合价值下降。当 Gamma 的绝对值增加时，期权价值对于 ΔS 的敏感性会相应增大。

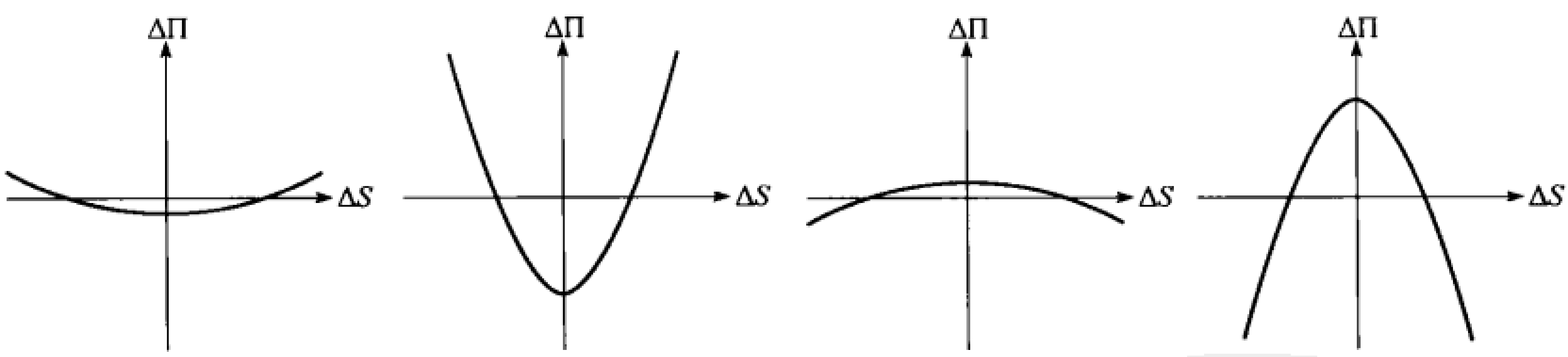


图 18-8 Delta 中性交易组合的 $\Delta\Pi$ 与 ΔS 之间的关系图

【例 18-3】 假定某一标的资产的期权组合为 Delta 中性，其 Gamma 为 $-10\,000$。式(18-3)表明，如果标的资产价格在一较短的时间内变化为 $+2$ 或 -2，交易组合价值下跌大约为 $0.5\times 10\,000\times 2^2=20\,000$ 美元。

18.6.1 使证券组合 Gamma 中性

标的资产的 Gamma 总是为 0，因此不能用于改变交易组合的 Gamma。改变交易组合的 Gamma 必须采用价格与标的资产价格呈非线性关系的产品，例如期权。

⊖ 事实上，期权的 Gamma 有时被从业人员称为曲率。

假如一个Delta中性的交易组合的Gamma为Γ，而某一交易所交易期权的Gamma为Γ_T。如果决定将w_T数量的期权加入交易组合中，由此产生的新的交易组合Gamma为

$$w_T\Gamma_T + \Gamma$$

因此，要使得交易组合为Gamma中性，期权交易头寸应为$w_T = -\Gamma/\Gamma_T$。引入新期权很可能会改变交易组合的Delta，因此必须调整标的资产数量以保证新的交易组合Delta中性。交易组合只是在较短时间内能做到Gamma中性，随着时间变化，只有不断调整期权数量以使得$w_T = -\Gamma/\Gamma_T$成立，才能保证交易组合为Gamma中性。

使一个交易组合既Gamma中性又Delta中性可以看做是对图18-7中所示对冲误差的校正。Delta中性保证了在对冲再平衡之间交易组合价值不受股票价格微小变化的影响，而Gamma中性则保证了在对冲再平衡之间交易组合价值不受股票价格较大变化的影响。假设某一交易组合为Delta中性，而Gamma为-3 000。某个正在交易的期权的Delta和Gamma分别为0.62和1.50。在交易组合中加入

$$\frac{3\,000}{1.5} = 2\,000$$

份期权会使得该交易组合变成Gamma中性，但这时交易组合的Delta也从0变成了2 000×0.62 = 1 240。因此，为保证新的交易组合Delta中性，必须卖出1 240份标的资产。

18.6.2 Gamma的计算

对于一个无股息股票的看涨与看跌期权，Gamma由以下关系式给出

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}$$

式中d_1由式(14-20)定义，$N'(x)$由式(18-2)给出。长头寸的Gamma总是为正，它与S_0之间的变化形式如图18-9所示。图18-10展示了虚值期权、平值期权、实值期权的Gamma与期限的关系。对于平值期权，Gamma随期限的减小而增大。短期限平值期权Gamma很高，意味着这种期权持有者的头寸对于股票价格变动非常敏感。

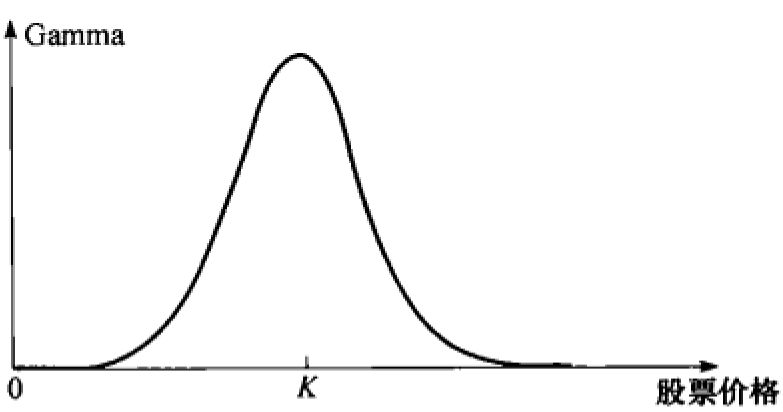


图18-9 看涨期权的Gamma与标的资产价格的关系

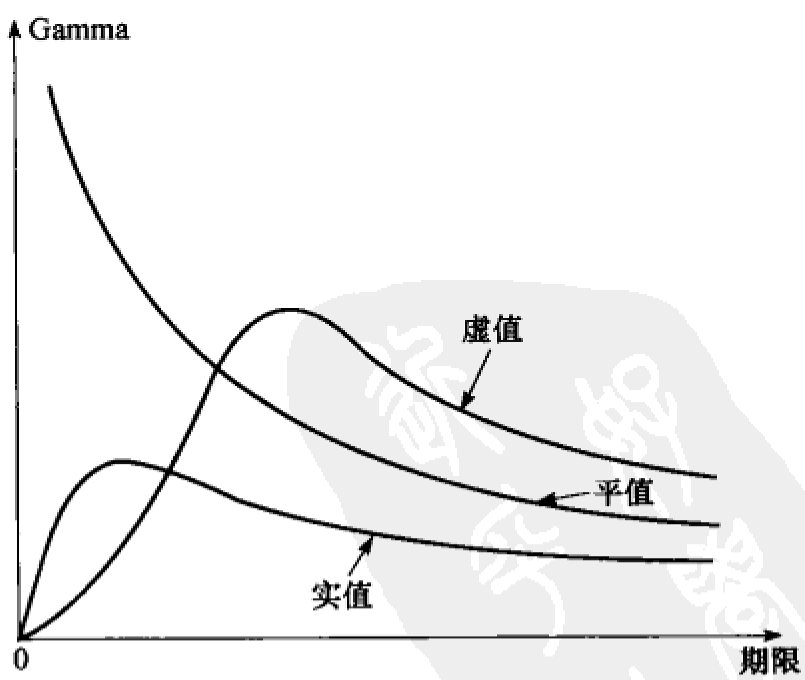


图18-10 期权的Gamma与期权期限的关系

【例18-4】 如例18-1所示，考虑一个无股息的股票上看涨期权，其中股票价格为49美元，执行价格为50美元，无风险利率为5%，期权期限为20周(0.384 6年)，股票价格波动率为20%。这时$S_0=49$，$K=50$，$r=0.05$，$\sigma=0.2$和$T=0.384\,6$，期权的Gamma为

$$\frac{N'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}=0.066$$

当股票价格变化为 ΔS 时，期权的 Delta 变化为 $0.066\Delta S$。

18.7　Delta、Theta 和 Gamma 之间的关系

无股息股票的单个衍生产品的价格必须满足式(14-16)。因此，由这些衍生产品所组成的资产组合 Π 也一定满足以下微分方程

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t}+rS\frac{\partial\Pi}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}=r\Pi$$

因为

$$\Theta=\frac{\partial\Pi}{\partial t},\quad\Delta=\frac{\partial\Pi}{\partial S},\quad\Gamma=\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}$$

因此

$$\Theta+rS\Delta+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma=r\Pi\tag{18-4}$$

对于其他标的资产，我们可以取得类似的结果(见练习题 18.19)。

对于 Delta 中性交易组合，$\Delta=0$，因此

$$\Theta+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma=r\Pi$$

上式说明当 Θ 很大并且为正时，交易组合的 Gamma 也很大，但为负，这一结论反之亦然。这与图 18-8 所示结果一致，同时也解释了为什么对于 Delta 中性的交易组合，我们可以将 Theta 作为 Gamma 的近似。

18.8　Vega

到目前为止，我们一直假设衍生证券的标的资产波动率为常数。在实际中，波动率会随时间变化，这意味着衍生证券价格既会随着标的资产价格与期限的变化而变化，同时也会随波动率的变化而变化。

一个交易组合的 Vega($\mathcal{V}$)[⊖]是指交易组合价值变化与标的资产波动率变化的比率

$$\mathcal{V}=\frac{\partial\Pi}{\partial\sigma}$$

如果一个交易组合 Vega 绝对值很大，该交易组合的价值会对波动率变化非常敏感，当一个交易组合 Vega 绝对值较小时，资产波动率的变化对交易组合价值的影响也会很小。

标的资产的头寸具有零 Vega，但是，在交易组合中加入某个交易所交易期权会使得交易组合的 Vega 得以改变，假定某交易组合的 Vega 为 $\mathcal{V}$，可交易期权期权的 Vega 为 $\mathcal{V}_T$，在交易组合中加入头寸为 $-\mathcal{V}/\mathcal{V}_T$ 的交易所交易期权可使最初的交易组合 Vega 中性。但不幸的是，一个 Gamma 中性的交易组合一般不会是 Vega 中性，反之亦然。投资者要想使得一个交易组合同时达到 Gamma 和 Vega 中性，就必须至少引入与标的产品有关的两种不同衍生产品才能达到目的。

【例 18-5】 假如某一交易组合为 Delta 中性，Gamma 为 −5 000，Vega 为 −8 000。下表所列的期权可以用来交易。

⊖ Vega 虽然是期权定价中“希腊值”的一个名称，但是 $\mathcal{V}$ 并不对应于任何一个希腊字母。

	Delta	Gamma	Vega
组合	0	−5 000	−8 000
期权 1	0.6	0.5	2.0
期权 2	0.5	0.8	1.2

购买 4 000 个交易所交易期权会使得交易组合成为 Vega 中性，这样做同时会使 Delta 增至 2 400，因此为了保证 Delta 中性必须卖出 2 400 个单位的标的资产，交易组合的 Gamma 也会从 −5 000变成 −3 000。

为了保证交易组合 Gamma 中性且 Vega 中性，我们需要同时将期权 1 和期权 2 加入到组合中。用 w_1 及 w_2 代表两个可交易期权的头寸，我们要求

$$-5\,000 + 0.5w_1 + 0.8w_2 = 0$$

及

$$-8\,000 + 2.0w_1 + 1.2w_2 = 0$$

以上两式的解为 $w_1 = 400$，$w_2 = 6\,000$。因此分别加入 400 个期权 1 及 6 000 个期权 2 会使得交易组合 Gamma 及 Vega 都呈中性。加入这两种期权后，交易组合的 Delta 变为$400 \times 0.6 + 6\,000 \times 0.5 = 3\,240$，因此必须卖出 3 240 份标的资产才能保持交易组合为 Delta 中性。

对于无股息股票的欧式看涨期权，Vega 由以下公式给出

$$\mathcal{V} = S_0\sqrt{T}N'(d_1)$$

式中 d_1 由式(14-20)给出，$N'(x)$由式(18-2)给出。欧式与美式期权长头寸的 Vega 总为正，Vega 与 S_0 变化的一般形式如图 18-11 所示。

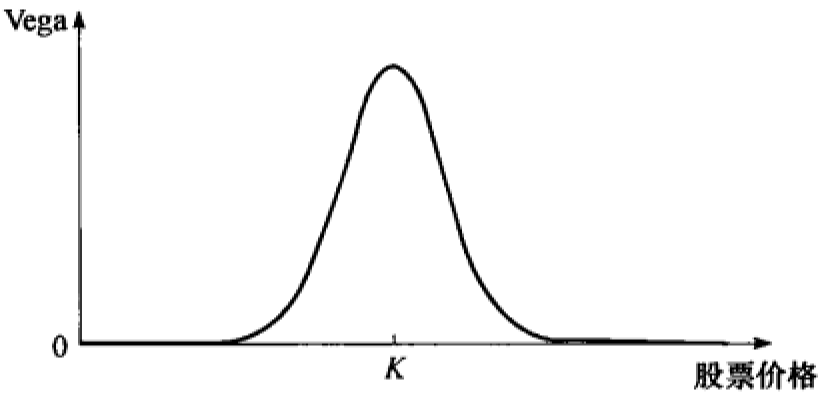


图 18-11 期权的 Vega 与股票价格的关系

【例 18-6】 与例 18-1 一样，考虑一个无股息股票的看涨期权，其中股票价格为 49 美元，执行价格为 50 美元，无风险利率为 5%，期限为 20 周(= 0.384 6 年)，股票价格波动率为 20%。这时，$S_0 = 49$，$K = 50$，$r = 0.05$，$\sigma = 0.2$，$T = 0.384\,6$。我们可以得出期权的 Vega 为

$$S_0\sqrt{T}N'(d_1) = 12.1$$

因此，当波动率增加 1% 时(例如，由 20% 增长到 21%)，期权价格会相应增长大约 $0.01 \times 12.1 = 0.121$。

由布莱克-斯科尔斯-默顿模型及其推广形式来计算 Vega 看起来有些奇怪，因为该模型的一个基本假设就是波动率为常数。从理论上讲，由一个假定波动率为随机变量的模型来计算 Vega 更为合理。但是，结果表明，由随机波动率模型得出的 Vega 与布莱克-斯科尔斯-默顿模型得出的 Vega 很接近，因此，在实际应用中使用将波动率假设成常数而得出的 Vega 是比较合理的[⊖]。

Gamma 中性保证了在两个对冲平衡交易时间之间，交易组合价格并不因为标的资产较大幅度变动而产生变动，而 Vega 中性则保证当 σ 变动时，交易组合的价值得到保护。就像所期望的那样，采用交易所交易期权来对 Vega 与 Gamma 进行对冲是否为最好的办法取决于对冲的再平衡时

⊖ 参考 J. C. Hull and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42(June 1987): 281-300; J. C. Hull and A. White, "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility," *Advances in Futures and Options Research* 3(1988): 27-61。

间间隔以及波动率的波动率[⊖]。

当波动率变化时，短期限隐含波动率的变化要比长期限隐含波动率要大，因此在计算组合的Vega时，常常将长期限波动率改变的幅度比短期波动率的幅度要小。22.6节讨论了其中一种这样的处理方法。

18.9 Rho

一个期权交易组合的rho为交易组合价值变化与利率变化的比率

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

这一变量用于衡量当其他变量保持不变时，交易组合价值对于利率变化的敏感性。对于一个无股息股票的欧式看涨期权，rho由以下公式给出

$$\text{rho(看涨)} = KTe^{-rT}N(d_2)$$

式中 d_2 由式(14-20)来给出。对于欧式看跌期权

$$\text{rho(看跌)} = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

【例18-7】 与例18-1一样，考虑一个无股息股票的看涨期权，其中股票价格为49美元，执行价格为50美元，无风险利率为5%，期限为20周（=0.3846年），股票价格波动率为20%。这时，$S_0=49$，$K=50$，$r=0.05$，$\sigma=0.2$ 和 $T=0.3846$。

期权的rho为

$$KTe^{-rT}N(d_2) = 8.91$$

因此，当利率增加1%时（由5%增长到6%），期权价格相应增长大约 $0.01\times8.91=0.0891$。

18.10 对冲的现实性

在一个理想世界里，金融机构的交易员可以随时调整对冲交易以确保交易组合的所有希腊值均为0。但在现实生活中这样做是不可能的。在管理依赖于单一资产的交易组合时，交易员通常至少每天都再平衡一次组合，以确保交易组合的Delta为0或接近于0。不幸的是，保证Gamma与Vega为0就没有那么容易，因为在市场上很难找到价格合理并且适量的期权或非线性产品以达到对冲目的。业界事例18-1中提供了金融机构的动态对冲是如何进行的讨论。

业界事例18-1 实践中的动态对冲

金融机构一般指定某一交易员或某一交易组来负责管理与某一特定资产有关的交易组合。例如，高盛公司的某一交易员被指定负责与澳元有关的所有衍生品交易组合。交易组合的市价及有关的希腊值风险均通过某一计算机系统来产生。对应于每一项风险都会设定不同的风险额度，如果交易员的交易量在交易日结束时超过额度，他必须得到特殊批准。

Delta额度的表达形式通常对应于标的资产的最大交易量。例如，假设高盛公司关于微软股票的Delta额度为1000万美元，微软股价为50美元，这意味着对应的Delta数量不能超过20万。Vega的交易额度通常表达为当标的价格波动率变化1%时所对应价值变化的最大限量。

⊖ 关于这一问题的讨论，参考J. C. Hull and A. White, "Hedging the Risks from Writing Foreign Currency Options," *Journal of International Money and Finance* 6(June 1987): 131-152。

事实上，交易员在每天交易日结束时会保证交易组合 Delta 中性或接近中性。Gamma 及 Vega 会得到监控，但这些风险量并不是在每天都得到调整。金融机构常常发现自己因业务需要而向客户卖出期权，天长日久自己会积累一个负的 Gamma 与 Vega。因此金融机构往往会寻求适当机会以合适的价格买入期权来中和自己所面临的 Gamma 及 Vega 风险。

用期权来管理 Gamma 及 Vega 等风险时要特别注意，当期权刚刚卖出时，一般为平值（或很接近平值），而此时期权的 Gamma 及 Vega 会接近最大值。但随着时间的流逝，当基础资产价格变化足够大后，期权会变成实值或虚值期权，此时期权的 Gamma 及 Vega 会很小，这些风险量对交易组合的影响也很小。当一个期权接近到期而且标的资产价格与执行价格较为接近，此时进行对冲会是交易员最头痛的事。

对于期权交易员而言，这里存在一个很大的规模经济问题。每天维持在一个资产上的少数期权 Delta 中性从经济上讲往往是不现实的，因为对每个被对冲期权的交易费用都很高[⊖]。但是，对于衍生产品交易商来讲，保持一个资产上很大的交易组合 Delta 中性就变得切实可行，因为每份期权的交易费用可能会变得很合理。

18.11 情景分析

除了观察诸如 Delta、Gamma 和 Vega 等风险量之外，期权交易员也常常做情景分析（scenario analysis）。这种分析包括计算在某一指定时间内不同情景下交易组合的盈亏，分析中时间长度的选择通常与产品的流动性有关，分析中所采用的情景可由管理人员选定，也可由模型来产生。

考虑如下情况。一家银行持有一个汇率期权组合，此交易组合价值取决于两个主要变量：汇率与汇率波动率。假定当前汇率为 1.0，汇率波动率为每年 10%。银行可以采用类似于表 18-5 中的表格来计算两周内在所示不同情景下交易组合的盈亏。在表 18-5 中，我们考虑了 7 种不同的汇率与 3 种不同的波动率。汇率在两周内变化的标准方差为 0.02，表中汇率的变化为对应于大约零个、一个、两个和三个标准方差的变化。

表 18-5 在不同情景下某汇率期权交易组合在两周内的盈亏

波动率	汇率						
	0.94	0.96	0.98	1.00	1.02	1.04	1.06
8%	+102	+55	+25	+6	−10	−34	−80
10%	+80	+40	+17	+2	−14	−38	−85
12%	+60	+25	+9	−2	−18	−42	−90

在表 18-5 中，最大损失位于该表的右下角。这一损失对应的波动率为 12%，汇率为 1.06 的情景。在类似于表 18-5 的情景分析中，最大损失（像表 18-5）通常位于表格的角落位置，但这一特性并不是永远正确。例如，当银行的头寸为蝶式差价的短头寸时（见 11.3 节），最大损失是对应于标的资产市场价格不变时的情景。

18.12 公式的推广

到目前为止，我们所推导出的 Delta、Theta、Vega 与 Rho 只适用无股息的股票期权。表 18-6 给出了当股票支付连续股息收益率 q 时，这些公式相应的形式。d_1 与 d_2 分别由式（16-4）和式

⊖ 当交易员以卖方报价买入资产，并以买方出价卖出资产时就会产生交易费用。

(16-5)给出。令 q 为表示股指的股息收益率，我们可以得出股指欧式期权的希腊值；令 q 为外币利率，我们可以得出货币期权的希腊值；令 $q=r$，我们可以得出欧式期货期权的 Delta、Gamma 和 Vega 值。对于欧式期货看涨期权，rho 等于 $-cT$，相应的看跌期权的 rho 等于 $-pT$。

表 18-6 提供收入收益率为 q 的资产上欧式期权的希腊值

希腊值	看涨期权	看跌期权
Delta	$e^{-qT}N(d_1)$	$e^{-qT}[N(d_1)-1]$
Gamma	$\frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$	$\frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$
Theta	$-S_0N'(d_1)\sigma e^{-qT}/(2\sqrt{T})$ $+qS_0N(d_1)e^{-qT}$ $-rKe^{-rT}N(d_2)$	$-S_0N'(d_1)\sigma e^{-qT}/(2\sqrt{T})$ $-qS_0N(-d_1)e^{-qT}$ $+rKe^{-rT}N(-d_2)$
Vega	$S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT}$	$S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT}$
Rho	$KTe^{-rT}N(d_2)$	$-KTe^{-rT}N(-d_2)$

对于外汇期权，对于两个不同的利率有两个不同的 rho 值。国内利率的 rho 由表 18-6 中公式给出[d_2 与式(16-11)中一样]，欧式看涨期权外币利率 rho 的表达式为

$$\text{rho}(\text{看涨,外币利率}) = -Te^{-r_fT}S_0N(d_1)$$

欧式看跌期权外币利率 rho 的表达式为

$$\text{rho}(\text{看跌,外币利率}) = Te^{-r_fT}S_0N(-d_1)$$

其中 d_1 与式(16-11)一样。

第 20 章将讨论如何计算美式期权的希腊值。

18.12.1 远期合约的 Delta

Delta 的概念也适用于期权以外的金融产品。考虑一个无股息股票的远期合约。式(5-5)表示远期合约的价值为 S_0-Ke^{-rT}，其中 K 为交割价格，T 为远期的期限。在其他变量不变的情况下，当股票价格变化为 ΔS 时，股票远期合约的价格变化也为 ΔS，因此远期合约长头寸的 Delta 永远为 1.0。这意味着一个股票的远期合约的长头寸可以用一只股票的短头寸来对冲；远期合约的短头寸可以买入一只股票来对冲其风险[⊖]。

对于连续股息收益率为 q 的资产，式(5-7)给出远期合约的 Delta 为 e^{-qT}。对于股指合约，q 等于股息收益率。对于外汇远期合约，q 等于外币无风险利率 r_f。

18.12.2 期货的 Delta

由式(5-1)可知，一个无股息股票的期货价格为 S_0e^{rT}，其中 T 为期货的期限。这一公式说明，在其他变量不变的情况下，当股票价格变化为 ΔS 时，期货价格变化为 ΔSe^{rT}。因为期货价格每天都按市场定价，期货合约长头寸的持有者几乎马上会得到 ΔSe^{rT} 数量的收益，因此期货合约的 Delta 为 e^{rT}。对于股息收益率为 q 的股票，采用式(5-3)，我们可以得出 Delta 为 $e^{(r-q)T}$。

应当注意，由于每日结算会造成期货 Delta 与远期 Delta 略有差别。在利率为常数，即远期价格等于期货价格时，这一结论也成立(与其相关的讨论，见业界事例 5-2)。

⊖ 这里的对冲为保完即忘型(hedge-and-forget)。因为 Delta 永远为 1，在合约期限内，我们无须对股票头寸重新进行调整。

有时期货合约会被用来构造 Delta 中性的头寸。定义：

T——期货合约的到期日；

H_A——保证 Delta 中性所需要持有的资产数量；

H_F——在采用期权对冲方法时，为保证 Delta 中性所持有的期货数量。

如果标的资产不支付任何股息，我们以上分析说明

$$H_F = e^{-rT}H_A \tag{18-5}$$

如果标的资产支付的连续股息收益率为 q，我们有

$$H_F = e^{-(r-q)T}H_A \tag{18-6}$$

对于股指，q 等于股指收益率；对于货币，q 等于外币汇率，因此，

$$H_F = e^{-(r-r_f)T}H_A \tag{18-7}$$

【例 18-8】 假定一家美国银行持有一外汇期权交易组合，并可以通过 458 000 英镑的短头寸来达到 Delta 中性。假定美国无风险利率为 4%，英国无风险利率为 7%。由式(18-7)得出，采用 9 个月期的货币期货做对冲时需要的短头寸为

$$e^{-(0.04-0.07)\times 9/12} \times 458\,000$$

即 468 442 英镑。因为每一个期货合约是关于卖出或买入 62 500 英镑。这时，该银行进入 7 个合约的短头寸(这里的合约数量 7 是与 168 442/62 500 最近的整数)即可以达到对冲目的。

18.13 资产组合保险

证券组合的管理人常常想持有对于其管理证券组合的看跌期权。在市场下跌时，看跌期权会对证券组合提供保护，而在市场上涨时，证券组合仍有潜在上涨的空间。一种做法(在 16.1 节里曾有讨论)是买入像 S&P 500 这样的股指看跌期权，而另外一种做法则是以合成的方式构造期权。

构造合成期权是指持有一定数量的标的资产(或标的资产的期货)以使得所持头寸的 Delta 等于所需期权头寸的 Delta。构造合成期权所需的头寸与对冲该期权所需要的头寸刚好相反，这是因为对期权的对冲过程涉及构造一个相同但具有相反头寸的合成期权。

对证券组合管理人而言，构造合成看跌期权可能会比在市场上买入期权更有吸引力，这样做有两个原因：第一个原因是期权市场可能不具备足够大的流动性来提供大型基金经理所需要的产品，第二个原因是基金经理所需要期权的执行价格和到期日与交易所市场提供的期权会有所不同。

合成期权可以通过交易证券组合或交易期货合约来完成。我们首先描述如何由交易证券组合来构成一个看跌期权。由表 18-6 得出，证券组合欧式看跌期权的 Delta 为

$$\Delta = e^{-qT}[N(d_1) - 1] \tag{18-8}$$

与通常一样

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

S_0 为证券组合价格，K 为执行价格，r 为无风险利率，q 为证券组合的收益率，σ 为证券组合价格波动率，T 为期权期限。组合的波动率通常假设为其 Beta 乘以一个风险充分扩散的市场指数的波动率。

为了以合成的方式构造看跌期权，基金经理在任意给定时刻所卖出的股票占原证券组合的比例为

$$e^{-qT}[1 - N(d_1)]$$

基金经理在卖出股票后将所得资金投入无风险资产。当原证券组合价值下跌时，由式(18-8)

给出的看跌期权的 Delta 变得越来越负[⊖]，因此证券组合卖出的份额必须增加；当原证券组合的价值上涨时，看跌期权变负的程度会有所减少，因此证券组合卖出的份额要减少(即需购回原证券组合的一部分)。

采用这种策略构造证券组合保险意味着在任意给定时刻，基金被分为两部分，一部分基金为股票组合，对此股票组合需要提供保险，另一部分为无风险资产。当股票组合价上涨时，无风险资产要被变卖，股票组合头寸会有所增大；当股票价格下跌时，股票组合头寸要减小，无风险资产要被买回。保险的成本是由于证券管理人买高卖低造成的。

【例 18-9】 一证券组合价值为 9 000 万美元。为了在市场下跌时对证券组合提供保护，证券组合经理需要持有一个执行价格为 8 700 万美元，期限为 6 个月的看跌期权，这里无风险利率为每年 9%，波动率为每年 25%，S&P 500 股指的当前价格为 900 美元。证券组合的结构很接近 S&P 500，因此证券组合经理的一种做法是买入 1 000 份执行价格为 870 美元的 S&P 500 看跌期权。另外一种做法则是构造合成期权。这里，$S_0=9\,000$，$K=8\,700$，$r=0.09$，$q=0.03$，$\sigma=0.25$，$T=0.5$，因此

$$d_1=\frac{\ln(90/87)+(0.09-0.03+0.25^2/2)0.5}{0.25\sqrt{0.5}}=0.449\,9$$

初始时刻所要求的期权 Delta 为

$$e^{-qT}[N(d_1)-1]=-0.321\,5$$

这说明，在最初要卖出 35.15% 的证券组合来吻合所要求的 Delta。卖出证券的收入将被投资于无风险资产上，需要卖出证券组合的数量应该经常调整。例如，如果在一天后证券组合价值减至 8 800万美元，所需要的 Delta 变为 −0.367 9，这时应进一步卖出 4.64% 的证券组合，并将所得收入投资于无风险资产上。如果交易组合价值增至 9 200 万美元，Delta 变为 −0.278 7，这时应买回 4.28% 的证券组合。

利用指数期货

我们也可以利用指数期货来构造合成期权，而且这种做法有时比利用标的股票来构造合成期权更受欢迎，这是因为交易股指期货的费用比交易相应标的资产的费用更低。由式(18-6)至式(18-8)可以得出，卖出指数期货合约的金额数量占证券组合价值的比例应为

$$e^{-qT}e^{-(r-q)T^*}[1-N(d_1)]=e^{q(T^*-T)}e^{-rT^*}[1-N(d_1)]$$

式中 T^* 为期货的到期日。如果证券组合价值等于 A_1 乘以指数，指数期货的规模等于 A_2 乘以指数，那么在任意时刻所持指数期货短头寸的数量为

$$e^{q(T^*-T)}e^{-rT^*}[1-N(d_1)]A_1/A_2$$

【例 18-10】 假定在前一个例子中，我们采用 9 个月期的 S&P 500 期货来构造合成期权，这时 $T=0.5$，$T^*=0.75$，$A_1=100\,000$，$A_2=250$，$d_1=0.449\,9$，每个股指期货是关于股指的 250 倍，因此 $A_2=250$，最终需要的期货合约短头寸数量为

$$e^{q(T^*-T)}e^{-rT^*}[1-N(d_1)]A_1/A_2=122.96$$

即 123(近似到最近的整数)。随着时间推移与指数的变化，期货的头寸要随时加以调整。

在这里的分析中，我们假定证券组合的收益是指数的镜像反射。当实际情况不是这样时，我们

⊖ 即其绝对值越加增大。——译者注

需要计算资产组合的 Beta，求得提供保护的股指期权头寸数量，以及选择股指期货头寸来产生合成期权。如 16.1 节所述，期权的执行价格应等于证券组合价格达到保险水平时所对应的市场指数的预期价格。指数期权数量等于证券组合的 β 乘以在证券组合的 β 值为 1 时所对应的期权数量。

18.14 股票市场波动率

我们在第 14 章讨论了究竟是新信息的出现还是交易引起股票波动的问题。以上所描述的证券组合保险交易策略有可能会使市场波动率增大。当市场下跌时，这些策略会使得证券组合管理人要么卖出股票要么卖出指数期货。这两种交易都会加重市场的下跌幅度(见业界事例 18-2)。抛售股票会带动股指进一步下跌，卖出股指期货也会使得期货价格下跌。根据指数套利机制(见第 5 章)，这同样会对股票产生抛售压力。因此，市场指数也会因此下跌。类似地，当市场价格上涨时，证券组合保险会使证券组合管理人或者买入股票或者买入期货，这会进一步加剧市场价格上涨的幅度。

业界事例 18-2 1987 年股票暴跌

在 1987 年 10 月 19 日，星期一，道琼斯工业平均指数下跌幅度超过 20%。对于这次下跌，组合保险策略起了重要作用。在 1987 年 10 月，有近 600 亿～900 亿美元的股票资产用于组合保险策略，这一保险策略利用 18.13 节所述的合成的形式构造出看跌期权。

在 1987 年 10 月 14 日星期三至 1987 年 10 月 16 日星期五这段期间，市场下跌了近 10%，这里大部分下跌发生在星期五的下午，因为这一下跌由交易组合保险策略程序显示至少有 120 亿股票或股指期货需要出售，但事实上，交易组合保险持有人的销售量只达到了 40 亿，在接下一周开始时，保险持有人需要卖出大笔股票以达到满足他们的程序所要求的数量，据估计在 10 月 19 日由三家交易组合保险持有人所卖出股票的数量占整个纽约股票交易所成交量的 10%，而整个交易组合保险策略所产生的交易占整个股指期货交易的 21.3%，其他投资者预见到交易组合保险持有人会大笔抛出股票，这些投资者也纷纷将自己的股票抛出，这进一步助长了股票市场的下跌幅度。

股票市场下跌造成了整个交易市场的超负荷运作。许多组合保险持有人不能够及时完成模型所要求的交易，因此组合保险也没有带来预定的效果。不管怎么说，交易组合保险策略在 1987 年后大幅减少，这一故事说明当所有市场参与者都在做类似交易时，这种交易策略(甚至对冲策略)是非常危险的。

除了一些正式的证券组合保险交易策略，我们还可以看到许多投资者在有意或无意之中实施自己的证券组合保险策略。例如，某投资者可能在市场下跌时出售证券以限制损失。

证券组合保险交易策略(正式或非正式)是否会影响市场波动率会取决于市场对组合保险策略交易的容纳程度。如果组合保险交易仅仅是市场交易中很少的一部分，那么这种交易策略对市场可能不会有太大影响。但当证券组合保险交易变得越来越普遍时，这种交易策略往往会对市场产生不稳定影响。

小 结

金融机构向其客户提供许多种类的期权产品。这些期权产品常常与交易所内交易的标准化期权有所不同。因此金融机构会面临对冲自身风险暴露的问题。裸露期权及带保头寸会使得面临的风险达到不可接受的水平。一种可以采用的策略是所谓的止损交易策略。这种交易

策略在当期权为虚值状态时，持有裸露期权头寸；而当期权为实值状态时，马上进入带保期权头寸。虽然这种策略看起来很吸引人，但其对冲效果并不好。

期权的 Delta 为期权价格变化与标的资产价值变化的比率。Delta 对冲是指构造 Delta 为 0 的头寸(有时也被称为 Delta 中性头寸)。因为标的资产的 Delta 值为 1.0，因此，对于每一个期权的长头寸，一种对冲的方法是持有 $-\Delta$ 数量的标的资产。期权的 Delta 随时间变化而变化，这意味着应该经常调整标的资产的头寸。

一旦某个期权头寸已处于 Delta 中性状态，接下来一个步骤是观察其 Gamma。期权的 Gamma 值为期权的 Delta 变化与标的资产价格变化的比率。这一数量是为了衡量期权价格与标的资产价格关系曲线的曲率。通过使期权头寸的 Gamma 中性，我们可以减小曲率对 Delta 对冲效果的影响。如果某头寸的 Gamma 值为 Γ，那么通过持有 Gamma 值为 $-\Gamma$ 的交易所内交易的期权将可以达到以上目的。

Delta 与 Gamma 两种对冲都假设波动率为常数。事实上，波动率会随时间变化而变化。期权或期权组合的 Vega 等于头寸价值变化与波动率变化的比率。希望将自身期权组合对波动率呈中性的交易员可以持有一个 Vega 中性的交易组合。与构造 Gamma 中性状态相同，交易员通常可以持有抵消性交易头寸来达到目的。如果交易员希望同时达到 Gamma 和 Vega 中性，他必须至少交易两类交易所内的期权。

衡量期权头寸风险的另外两个测度为 Theta 和 Rho。在其他变量不变时，Theta 等于头寸价值变化与时间变化的比率。类似地，在其他变量不变时，Rho 等于头寸价值变化与利率变化的比率。

在实际中，期权交易员常常至少会每一天都要调整交易组合以便保证 Delta 中性。要长期性地保证 Gamma 和 Vega 中性是不现实的。一般来讲，交易员会观察这些敏感度，当它们变动太大时，要采取适当措施以致停止交易。

为了对股票证券组合进行保险，有时证券组合管理人会对构造合成期权产生兴趣。交易员可以通过交易自身的证券组合或交易该证券组合的股指期货来达到目的。交易证券组合需要将证券组合分成股权和无风险产品两个部分。当市场下跌时，投资于无风险产品的资金将增加；当市场上涨时，投资于股权部分的资金将增加。交易该证券组合的指数期货是在保证股权组合不变的同时，卖出指数期货合约。当市场下跌时，更多的指数期货会被卖出；当市场上涨时，更少的期货会被卖出。这种形式的证券组合保险在正常的市场条件下会运作得很好。但在 1987 年 10 月 19 日，星期一，当道琼斯工业平均指数剧烈下跌时，这一保险策略的效果非常糟糕。这时证券组合的保险者不能及时卖出股票与指数期货来对其的头寸进行保护。

推荐阅读

Taleb, N. N., *Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options*. New York: Wiley, 1996.

练习题

18.1 解释投资者如何对一个卖出的虚值看涨期权实施止损对冲策略。为什么这种策略的效果并不好？

18.2 一个看涨期权 Delta 为 0.7 的含义是什么？当每个期权的 Delta 均为 0.7 时，如何使得 1 000 份期权的短头寸组合变为 Delta 中性？

18.3 当无风险利率为每年 10%，股票波动率为 25% 时，计算这一无股息股票的平值欧式期权的 Delta，其中期权的期限为 6 个月。

18.4 当时间以年作单位时，一个期权头寸的 Theta 为 -0.1 的含义是什么？如果交易员感觉股票价格与波动率均不会改变，什么样的期权头寸比较合适？

18.5 期权头寸的 Gamma 是什么含义？某个头寸的 Delta 为 0，而 Gamma 为一个很大的负值，该头寸的风险是什么？

18.6 “构造一个合成期权的过程，就是对冲这一期权头寸的反过程。”解释这句话的含义。

18.7 解释为什么证券组合保险策略在1987年10月19日的股票市场大跌中效果不好。

18.8 一个执行价格为40美元的虚值看涨期权的布莱克-斯科尔斯-默顿价格为4美元，一个卖出期权的交易员想采用止损交易策略。交易员想在股票价格为40.10美元时买入股票，而在39.90美元时卖出股票，估计股票被买入与卖出的次数。

18.9 假定某股票的当前价格为20美元，一个执行价格为25美元的看涨期权由频繁交易标的股票头寸构造而成。考虑以下两种情形：

(a) 股票价格在期权期限内逐渐平稳地由20美元涨至35美元。

(b) 股票价格剧烈变动，最后的价格为35美元。

在哪种情景会使得合成期权更为昂贵？解释你的答案。

18.10 数量为1 000的关于白银期货欧式看涨期权短头寸的Delta为多少？其中期权期限为8个月，标的期货的期限为9个月。目前9个月期限的期货价格为每盎司8美元。期权执行价格为8美元，无风险利率为每年12%，白银价格波动率为每年18%。

18.11 在练习题18.10中，为保证Delta对冲，白银期货的初始头寸为多少？如果采用白银本身来对冲，初始头寸又为多少？如果采用1年期的期货，初始头寸又为多少？这里假设白银没有存储费用。

18.12 一家公司准备对一货币上的看跌和看涨期权所组成的证券组合长头寸来进行Delta对冲。以下哪种情况对冲的效果最好？

(a) 一个基本稳定的即期汇率。

(b) 一个变动剧烈的即期汇率。

解释你的答案。

18.13 重复练习题18.12中的分析，本题是一家持有外汇看涨期权和外汇看跌期权短头寸的金融机构。

18.14 一家金融机构刚刚卖出了1 000份7个月期的日元欧式看涨期权。假设即期汇率为每日元0.81美分，执行价格为每日元0.81美元，美国的无风险利率为每年8%，日本的无风险利率为每年5%，日元汇率的波动率为15%，计算金融机构头寸的Delta、Gamma、Vega、Theta和Rho。解释这些数量的意义。

18.15 在什么情况下只需要在组合中加入一个其他的欧式期权就可以使得一个股指上的欧式期权同时Gamma和Vega中性化。

18.16 某基金公司经理拥有一个风险分散较好的证券组合，该证券组合的收益反映了S&P 500股指收益，这一证券组合价值为3 600万美元，S&P 500的价格为1 200。证券组合经理打算购买保险，以便使得在今后6个月证券组合价值下跌不超过5%。无风险利率为每年6%，证券组合与S&P 500的股息收益率均为3%，S&P 500股指波动率为30%，

(a) 如果基金经理买入交易所内交易的看跌期权，他所付保险费为多少？

(b) 仔细解释涉及交易所内交易的欧式期权的其他交易策略，并说明这些交易策略将如何取得相同的结果。

(c) 如果基金经理决定将证券组合的一部分投放于无风险证券，初始头寸应该为多少？

(d) 如果基金经理决定采用9个月期的指数期货，初始头寸应该为多少？

18.17 假定证券组合的β为1.5，重复练习题18.16。假定证券组合股息收益率为每年4%。

18.18 对于以下情景代入相应表达式，证明式(18-4)仍然成立。

(a) 无股息股票的欧式看涨期权。

(b) 无股息股票的欧式看跌期权。

(c) 无股息股票的欧式看涨与看跌期权的组合。

18.19 对以下两种情况，与式(18-14)相应的方程式什么？(a)外汇衍生产品组合；(b)期货衍生产品组合。

18.20 假定我们要为价值为700亿美元的股权资产做出保险计划。假定这一保险将保证在1年内，股权资产价格下跌不会超过5%，做出你认为需要的估计，并采用DerivaGem软件计算，如果在一天之内市场下跌23%时，该股权资产组合保险的管理人应出售股票或期货合约的价值为多少？

18.21 一个股指远期的Delta是否与相同头寸的股指期货的Delta相等？解释你的答案。

18.22 某银行持有的美元/欧元汇率期权头寸的Delta为30 000，Gamma为-80 000。说明如何理解这些数字。汇率为0.90美元/欧元(每欧元所对应的美元数量为0.90)，为了使得头寸为Delta中性，你应该持有什么样的头寸？在一短暂时间后，汇率变化为0.93，估计新的Delta。这时为了保证Delta中性，你还要再进行什么样的交易？假定银行在最初设定了Delta中性头寸，在汇率变动后，这一头寸是会亏损还是会盈利？

18.23 对于无股息股票期权，利用看跌-看涨期权平价关系式得出：

(a) 欧式看涨期权Delta与欧式看跌期权Delta的关系式。

(b) 欧式看涨期权Gamma与欧式看跌期权Gamma的关系式。

(c) 欧式看涨期权Vega与欧式看跌期权Vega的关系式。

(d) 欧式看涨期权Theta与欧式看跌期权Theta的关系式。

作业题

18.24 考虑一个1年期的欧式股票看涨期权，股票价格为30美元，执行价格为30美元，无风险利率为每年5%。波动率为每年25%。采用DervaGem来计算期权的价格、Delta、Gamma、Vega、Theta和Rho。将价格变为30.1美元时，通过计算期权价格来验证Delta的正确性；通过计算期权在股票价位为30.1美元时的Delta来计算Gamma，并由此来验证Gamma的正确性，进行类似的计算来验证Vega、Theta和Rho的正确性。采用DerivaGem软件画出期权价格、Delta、Gamma、Vega、Theta、Rho与股票价格的关系图形。

18.25 某金融机构持有以下关于英镑的场外交易期权组合(见表18-7)。

表 18-7

期权类型	头寸	期权 Delta	期权 Gamma	期权 Vega
看涨	-1 000	0.50	2.2	1.8
看涨	-500	0.80	0.6	0.2
看跌	-2 000	-0.40	1.3	0.7
看涨	-500	0.70	1.8	1.4

某交易所交易期权的Delta为0.6，Gamma为1.5，Vega为0.8。

(a) 什么样的交易所内交易的英镑期权头寸和英镑头寸会使得交易组合为Gamma与Delta中性？

(b) 什么样的交易所内交易的英镑期权头寸和英镑头寸会使得交易组合为Vega与Delta中性？

18.26 考虑作业题18.25中的情景，假定第二个交易所交易期权的Delta为0.1，Gamma为0.5，Vega为0.6，进行什么样的交易可使得交易组合Delta，Gamma与Vega均为中性。

18.27 某银行提供的存款产品中有向投资者保证收益等于0与市场指数收益的40%的最大值。某投资者决定将100 000美元投资于这种产品，将该产品收益描述为关于指数的期权。假定无风险利率为每年8%，指数股息收益率为每年3%，指数波动率为每年25%，这一产品对于投资者而言合理吗？

18.28 第17章给出的欧式期货看涨期权 c 与

期货价格 F_0 的关系式为

$$c=e^{-rT}[F_0N(d_1)-KN(d_2)]$$

式中

$$d_1=\frac{\ln(F_0/K)+\sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}} \quad 和$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

式中 K、r、T 和 σ 分别为执行价格、利率、期限和波动率，

(a) 证明 $F_0N'(d_1)=KN'(d_2)$。

(b) 证明看涨期权对于期货价格的 Delta 等于 $e^{-rT}N(d_1)$。

(c) 证明看涨期权的 Vega 等于 $F_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-rT}$。

(d) 证明 18.12 节给出的计算 Rho 的公式。

在计算期货看涨期权的 Delta、Gamma、Theta 与 Vega 时，我们可以将一般期权的希腊值计算公式中的 q 由 r 代替，S_0 由 F_0 代替。为什么这一做法对计算看涨期权 Rho 时不成立？

18.29 利用 DerivaGem 软件验证 18.1 节中的期权满足式(18-4)(注意：DerivaGem 所计算的结果为每日历天，式(18-4)的 Theta 对应于每年)。

18.30 利用 DerivaGem 的应用工具(Application Builder)功能来重新产生表18-2(注意：在表 18-2 中，期权头寸已被近似到最近的 100 股)。计算期权头寸每周的 Gamma 与 Theta。计算头寸每周的价值变化，并检验式(18-3)是否近似成立[注意：DerivaGem 所计算的结果为每日历天，而式(18-3)中的 Theta 对应于每年]。

附录18A

泰勒级数展开和对冲参数

泰勒级数展开显示了某一短时间内各个希腊值在交易组合变化中起的不同作用。假设标的资产的价格波动率为常数。作为标的资产(变量)价格以及时间函数，交易组合价格 Π 的泰勒展开式为

$$\Delta\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S+\frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\Delta S^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\Delta t^2+\frac{\partial^2\Pi}{\partial S\partial t}\Delta S\Delta t+\cdots \tag{18A-1}$$

式中 $\Delta\Pi$ 和 ΔS 分别对应于在一短时间 Δt 内 Π 与 S 的变化。Delta 对冲可将式(18A-1)右端式第一项消除，第二项对应于时间损耗是一个非随机项，第三项可以在保证 Gamma 中性时被消除，随机微分方程理论显示出 ΔS 的误差级别与 $\sqrt{\Delta t}$ 相同，这意味着右端第三项的误差级别为 Δt，右端的其他项的误差级别高于 Δt。

对于一个 Delta 中性的交易组合，右端第一项为 0，因此

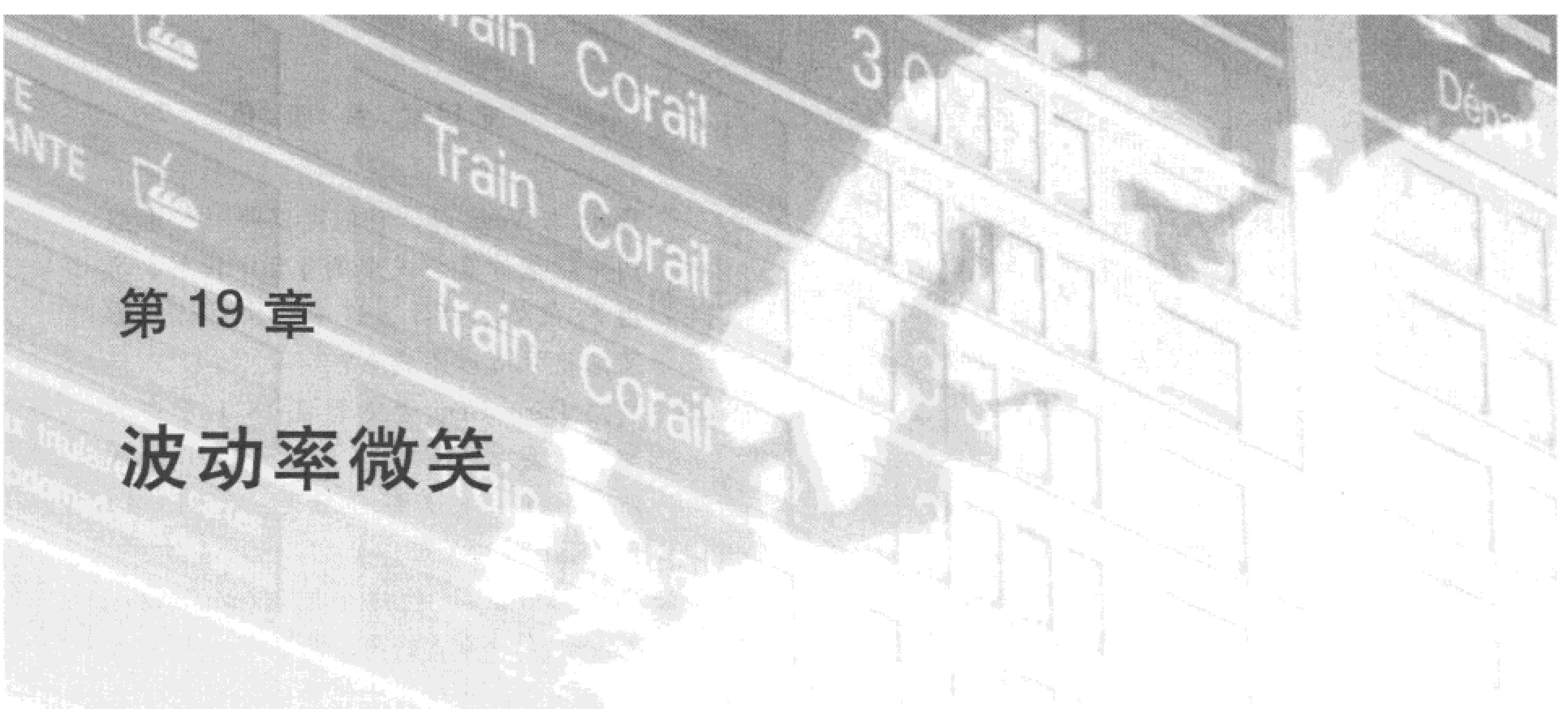
$$\Delta\Pi=\Theta\Delta t+\frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2$$

这里我们忽略误差级别高于 Δt 的项。这正是式(18-3)。

当标的资产价格波动率也不确定时，作为 σ、S 以及 t 的函数，式(18A-1)变为

$$\Delta\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S+\frac{\partial\Pi}{\partial\sigma}\Delta\sigma+\frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\Delta S^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\sigma^2}\Delta\sigma^2+\cdots$$

式中 $\Delta\sigma$ 为波动率在 Δt 内的变化量。此时，通过 Delta 中性可以消除右端第一项。通过 Vega 中性可消除第二项，第三项为非随机项，第四项可以通过 Gamma 中性消除。交易员也会经常定义相应于泰勒展开式中高级项的希腊字母。



第 19 章

波动率微笑

由布莱克-斯科尔斯-默顿模型所计算出的期权价格与市场价格有多相近呢？交易员在交易中真的采用布莱克-斯科尔斯-默顿公式来对期权定价吗？资产价格真的服从对数正态分布吗？在本章我们将回答这些问题。交易员确实使用布莱克-斯科尔斯-默顿公式，但所应用的方式与布莱克、斯科尔斯和默顿最初的想法有所不同。这是因为交易员允许波动率是期权执行价格以及期权期限的函数。

波动率微笑（volatility smile）是指描述期权隐含波动率与执行价格函数关系的图形。在本章，我们将描述交易员在股票与货币市场所采用的波动率微笑。我们将解释波动率微笑与所假设的将来标的资产价格概率分布之间的关系，还将讨论交易员如何按不同期限对波动率进行调整以及交易员如何将波动率曲面作为期权定价的工具。

19.1 为什么波动率微笑对看涨期权与看跌期权是一样的

本节将说明当欧式看涨期权和欧式看跌期权具有相同执行价格和期限时，其隐含波动率是一样的。这说明欧式看涨期权对应于一个期限的波动率微笑和欧式看跌期权对应于该期限的波动率微笑是一样的。这个结论会给我们带来方便，它说明当讨论波动率微笑时，我们没有必要去明确指明期权是看涨还是看跌的。

在前面几章里我们讲过，当欧式看涨期权与看跌期权具有同样的执行价格和期限时，看跌-看涨评价关系式提供了它们之间的一个关系式。当标的资产提供收益率 q 时，这个关系式为

$$p + S_0 e^{-qT} = c + Ke^{-rT} \tag{19-1}$$

与通常一样，c 和 p 分别代表欧式看涨和看跌期权的价格，它们具有同样的执行价格 K 与期限 T。变量 S_0 为今天的标的资产价格，r 为对应于期限 T 的无风险利率，q 为资产的收益率。

看跌-看涨平价关系式的一个重要特征是它建立在比较简单的无套利机会基础上，这一结果并不需要对资产价格的分布做任何假设。无论资产价格是否服从对数正态分布，这个关系式都是成立的。

假定对于某个给定的波动率，p_{BS} 与 c_{BS} 是由布莱克-斯科尔斯-默顿模型得出的欧式看跌与看涨期权的价格。再假定 p_{mkt} 及 c_{mkt} 为这些期权的市场价格。因为看跌-看涨平价关系式对于布莱克-斯科尔斯-默顿模型也成立，因此我们有

$$p_{\mathrm{BS}} + S_0 e^{-qT} = c_{\mathrm{BS}} + Ke^{-rT}$$

在无套利的前提下，看跌-看涨平价关系式对市场价格也成立

$$p_{\mathrm{mkt}} + S_0 e^{-qT} = c_{\mathrm{mkt}} + Ke^{-rT}$$

以上两个公式相减，我们得出

$$p_{BS} - p_{mkt} = c_{BS} - c_{mkt} \tag{19-2}$$

式(19-2)说明：当采用布莱克-斯科尔斯-默顿模型对具有相同期限与执行价格的看跌及看涨期权定价时，公式所产生的误差应完全相同。

假定，欧式看跌期权的隐含波动率为 22%。这意味当布莱克-斯科尔斯-默顿模型中的波动率为 22% 时，$p_{BS} = p_{mkt}$。由式(19-2)得出，当采用同一波动率时，$c_{BS} = c_{mkt}$，因此看涨期权的隐含波动率也是 22%。这里的分析说明，欧式看涨期权的隐含波动率与具有相同执行价格和期限的看跌期权的隐含波动率总是一样的。换句话讲，对于给定的执行价格及期限，利用布莱克-斯科尔斯-默顿模型对欧式看涨期权定价与对欧式看跌期权定价必须要用同样的波动率。这说明波动率微笑(即对于特定期限的隐含波动率与执行价格之间的关系)对看涨期权与看跌期权是一样的，这同时说明了波动率期限结构(即对于特定执行价格，隐含波动率与期限之间的关系)也是一样的。因此，交易员在利用隐含波动率与执行价格关系，或隐含波动率与期限关系时，他们无须指明这些关系是对于欧式看涨期权还是欧式看跌期权。这些关系对于欧式看涨期权及欧式看跌期权均成立。

【例 19-1】 澳元的价格为 0.60 美元。美国的无风险利率为每年 5%，澳大利亚的无风险利率为每年 10%。一个澳元 1 年期限、执行价格为 0.59 美元的期权价格为 0.023 6。DerivaGem 所示的隐含波动率为 14.5%。为了保证无套利，式(19-1)所示的看跌-看涨平价关系式必须成立，其中 q 为外国(澳洲)无风险利率。1 年期限，执行价格为 0.59 美元的欧式看跌期权价格 p 满足以下关系式

$$p + 0.60e^{-0.10\times 1} = 0.0236 + 0.59e^{-0.05\times 1}$$

因此，$p = 0.0419$。根据这一价格，DerivaGem 所得的隐含波动率也是 14.5%，这正是我们上面分析所得的结果。

19.2　货币期权

图 19-1 展示了交易员所采用的货币期权波动率微笑的一般形状。平值期权的波动率相对较低，但波动率随着期权实值程度或虚值程度的增大而逐渐升高。

在附录 19A 里，我们将说明由在某一时间到期的期权波动率微笑可以确定在一定时间资产价格的风险中性概率分布。我们将这一概率分布称为**隐含概率分布**(implied distribution)。图 19-1 所示的波动率微笑对应于图 19-2 中由实线表达的概率分布。图 19-2 中的虚线代表一个与隐含分布有同样的期望值及标准差的对数正态分布。可以看出隐含分布比对数正态分布更具有肥尾特征㊀。

为了说明图 19-1 与图 19-2 的一致性，我们在此考虑一个执行价格为 K_2 的**深度虚值**(deep-out-of-money)看涨期权。这一期权只有在兑换率高于 K_2 时才会产生收益，图 19-2 说明这一期权在隐含概率分布下产生收益的概率比在对数正态分布下要大。因此我们期望对于这一期权，隐含概率分布所产生的价格会偏高。较高的价格对应于较高的波动率，这刚好是我们在图 19-1 中所观察到的。因此对于较高的执行价格，以上两个图形是一致的。接下来，我们考虑一个执行价格为 K_1 的深度虚值看跌期权。这一期权只有在兑换率低于 K_1 时才会产生收益。图 19-2 显示这一期权在隐含概率分布下产生收益的概率大于在对数正态分布下产生收益的概率。因此我们期望对于这一期权，隐含分布所产生的价格也会偏高。这正是我们在图 19-1 中所观察到的现象。

㊀ 这种现象可用峰度(kurtosis)来描述。注意：除了更具有肥尾特征外，隐含概率分布的峰值也更高(more "peaked")。在这种分布中，较大与较小变动发生的可能性大于在对数正态分布中的情形，但变动取中间值的可能性较小。

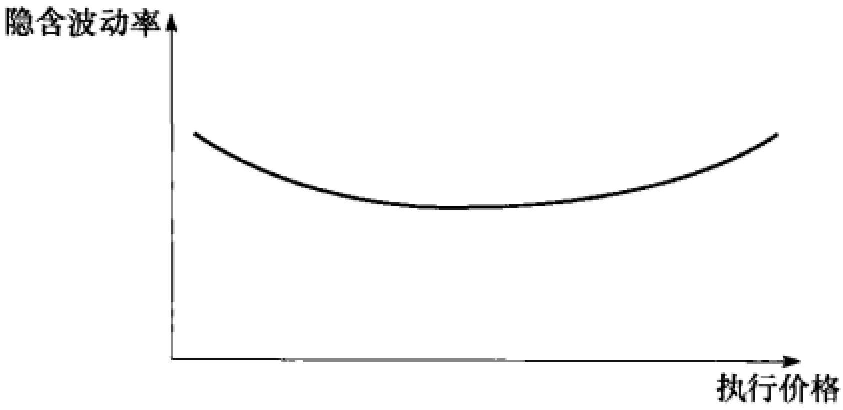


图 19-1 外汇期权的波动率微笑

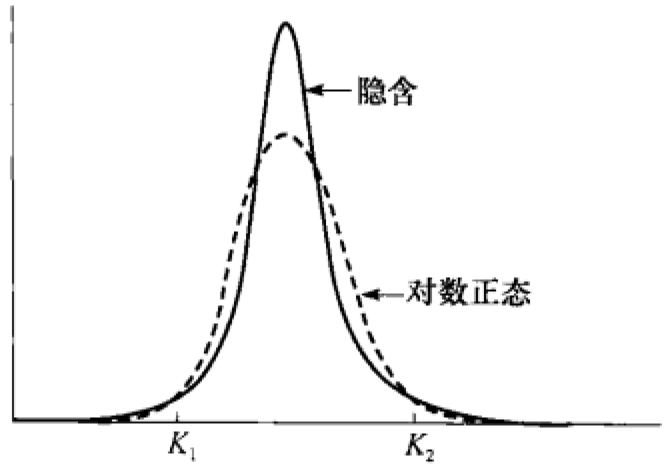


图 19-2 外汇期权隐含分布与对数正态分布

19.2.1 实证结果

以上分析说明外汇期权交易员确实采用了波动率微笑，这意味着交易员认为对数正态分布会低估汇率的极端变动。为了验证这一观点的正确性，我们在表 19-1 中检验了 10 年中 12 种不同汇率的日收益率[⊖]。产生这个表格的第一步需要计算每一个汇率价格百分比变化的标准差，第二步是要计算有多少百分比变化超出 1 个标准差、2 个标准差，等等。最后，我们计算在正态分布情况下这些百分比变化出现的概率(对数正态模型认为，一天的时间内百分比变化几乎完全是正态分布)。

表 19-1 价格比例变化大于 1，2，…，6 个标准方差的天数占整体观察日的比例 (%)

	历史数据	正态发布		历史数据	正态发布
>1 S. D.	25.04	31.73	>4 S. D.	0.29	0.01
>2 S. D.	5.27	4.55	>5 S. D.	0.08	0.00
>3 S. D.	1.34	0.27	>6 S. D.	0.03	0.00

注：S. D. = 价格比率变化的标准方差。

一天内变化超过 3 个标准差的天数占所有观察数据的比例为 1.34%，而对数正态分布所对应的比例却只有 0.27%。每天价格百分比变化超出 4 个、5 个以及 6 个标准差的天数占整个观察日的比例分别为 0.29%，0.08% 以及 0.03%，而对数正态分布认为这些事件几乎不可能发生。因此，表 19-1 提供了(汇率收益)肥尾性态存在(见图 19-2)以及交易员确实采用波动率微笑(见图 19-1)的证据。业界事例 19-1 指出，假如你在其他市场参与者之前做出类似分析就能取得盈利。

业界事例 19-1 如何从外汇期权中盈利

假如大多数市场参与者认为汇率服从对数正态分布，因而使用同一个波动率来对所有关于某一个汇率的期权定价。假如你刚刚分析了表 19-1 中的结果，知道对数正态分布并不是一个好的关于汇率的假设，那么你应该怎样从这些结论中盈利呢？

对这一问题的回答是，你应该买入一个深度虚值看涨与看跌期权，然后就是等待。这些期权相对来讲比较便宜并且成为实值期权的比率要比对数正态分布模型预测的要多一些，你的期权平均收益要远远大于期权成本。

⊖ 这一表格取自于 J. C. Hull and A. White, "Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed." *Journal of Derivatives*, 5, No. 3(Spring 1998): 9-19。

在 20 世纪 80 年代中期，有一些交易员认识到汇率分布中的“肥尾性态”，而其他的交易员仍然认为布莱克-斯科尔斯-默顿模型中的对数正态分布假设是合理的，对汇率分布有正确认识的交易员采用了我们描述的策略并且获得了巨大盈利。到了 80 年代后期，几乎所有的人都认识到虚值期权所对应的隐含波动率要高，这时套利机会就消失了。

19.2.2 外汇期权波动率微笑存在的原因

为什么汇率不服从对数正态分布呢？资产价格服从对数正态分布的两个条件是：

- 标的资产的波动率为常数。
- 标的资产价格变化平稳并且没有跳跃。

在实际中，以上假设对于汇率均不成立。汇率的波动率与常数相差甚远，并且波动率变化常常具有跳跃性[⊖]，非常数波动率以及跳跃都会使得汇率变化产生极端情形的现象更加频繁。

跳跃与非常数波动率对期权价格的影响与期权的期限有关。当期权期限增大时，非常数波动率对期权价格变化影响的程度变得越来越大，但同时对隐含波动率变化影响的程度却越来越小。当期权期限增大时，跳跃性对期权价格变化以及隐含波动率变化的影响越来越小[⊜]。这一结果的直接推论是当期权期限增大时，波动率微笑变得越来越弱。

19.3 股票期权

Rubinstein(1985，1994)以及 Jackwerth 和 Rubinstein(1996)研究了股票期权波动率微笑。在 1987 年前，市场上没有明显的波动率微笑现象。自 1987 年以来，交易员在期权定价中所采用的波动率微笑的一般形式如图 19-3 所示，这种形式的波动率微笑也被称为**波动率倾斜**(volatility skew)。这时，波动率是执行价格的递减函数。低执行价格期权[也就是深度虚值看跌期权与深度实值(deep-in-the-money)看涨期权]所对应的隐含波动率要远高于高执行价格期权(也就是深度实值看跌期权及深度虚值看涨期权)。

股票期权波动率微笑对应于图 19-4 中由实线所表达的概率分布。图 19-4 中的虚线代表一个与隐含概率分布有同样期望值及标准差的对数正态分布。可以看出隐含概率分布比对数正态分布有更肥的左端尾部及更瘦的右端尾部。

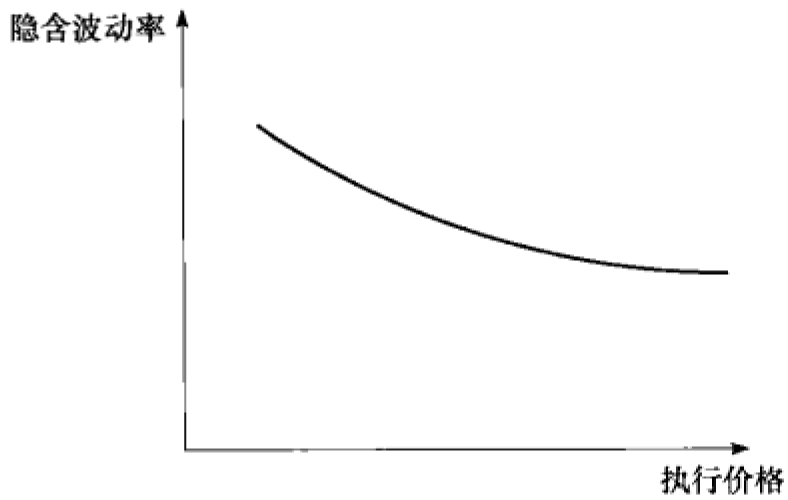


图 19-3 股票波动率微笑

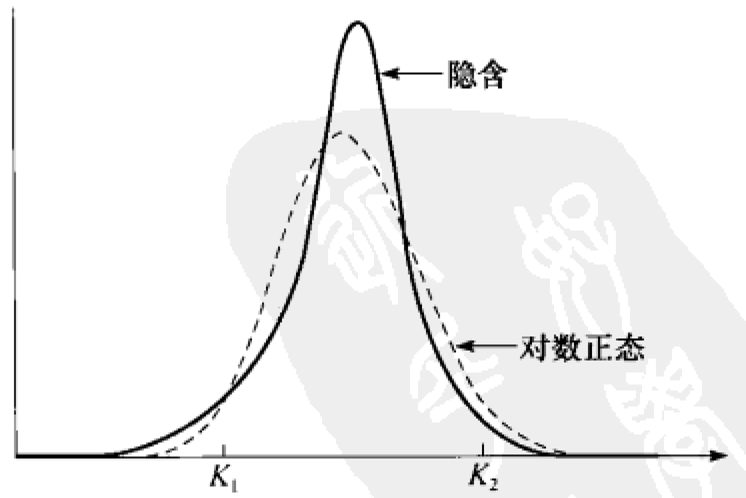


图 19-4 股票期权隐含分布与对数正态分布

⊖ 通常汇率的跳跃同中央银行的决策有关。

⊜ 当我们检测足够长期限的期权时，跳跃的效果会被平均化(averaged out)，因此存在跳跃时所得汇率概率分布与汇率平稳变化时所得概率分布难以区分的情况。

为了说明图 19-3 与图 19-4 的一致性，我们利用与图 19-1 和图 19-2 同样的论证。考虑深度虚值期权。由图 19-4 得出，执行价格为 K_2 的深度虚值看涨期权在假设隐含概率分布时的价格低于在假设对数正态分布时的价格。这是因为这一期权只有在股票价格高于 K_2 时才会产生收益，而隐含概率分布对此所对应的概率低于对数正态分布所对应的概率。因此，我们期望由隐含概率分布得出的期权价格会低于由对数正态分布得出的期权价格。较低的价格对应于较低的隐含波动率，这正如图 19-3 所示。接下来，我们考虑一个执行价格为 K_1 的深度虚值看跌期权。这一期权只有在执行价格低于 K_1 时才会产生收益。图 19-4 显示这一期权在隐含概率分布下产生收益的概率将大于在对数正态分布下产生收益的概率。因此对于这一期权隐含概率分布所对应的价格也会偏高，从而隐含波动率也应该偏高。这正是我们在图 19-3 中所观察到的现象。

股票期权波动率微笑存在的原因

关于股票期权波动率微笑的一种解释是杠杆效应，当公司股票价格下跌时，公司杠杆效应增加，这意味着股票风险增大，因此波动率增加。而当公司股票上涨时，杠杆效应降低，股票风险变小，因此波动率会减小。这种观点说明股票波动率应该是执行价格的一种递减函数，这一结论与图 19-3 和图 19-4 是一致的，另外一种关于股票波动率微笑的解释是波动率微笑来源于交易员对股票市场暴跌的恐惧。

业界事例 19-2　暴跌恐惧症

我们应该指出图 19-3 中所示的微笑形状只是在 1987 年 10 月股票大跌后才存在，在 1987 年 10 月之前，隐含波动率与执行价格之间没有太大关系，这一现象使得马克·鲁宾斯坦提议，造成波动率微笑的原因是由于人们对股票市场暴跌的恐惧症(crashophobia)。交易员害怕市场上会出现类似 1987 年 10 月那样的股票暴跌，因此对于深度虚值看跌期权赋予较大的价值(这也造成了较高的波动率)。

实际数据给以上解释提供了证据，S&P500 股指的下跌往往会伴随着波动率倾斜程度的增加，这是因为交易员在股票下跌的时会对可能出现的暴跌更加担心，当 S&P500 上涨时，倾斜程度会变小。

19.4　其他刻画波动率微笑的方法

截止到目前，我们定义的波动率微笑均为隐含波动率与执行价格之间的关系，这种关系与资产的当前价格有关。例如，图 19-1 中的波动率微笑的最低点通常与当前汇率很接近。当汇率增长时，波动率微笑往往向右移动；当汇率减小时，波动率微笑往往向左移动。类似地，在图 19-3 中，当股票价格增长时，波动率微笑往往向右移动；当价格减小时，波动率微笑往往向左移动[⊖]。正是因为这个原因，波动率微笑有时被定义为隐含波动率与 K/S_0(而不是与 K)之间的关系。这种波动率微笑也变得更加平稳。

对这种描述的一种改进方法是将波动率微笑定义为隐含波动率与 K/F_0 之间的关系，其中 F_0 为期限与所考虑期权相同的资产的远期价格。交易员也经常将平值期权定义为 $K=F_0$ 的情形，而不是 $K=S_0$ 的情形。这样做的原因是 F_0(而不是 S_0)为风险中性世界里股票在期权到期

⊖ 对于交易所交易期权，Derman 的研究结果说明，这种调解有时具有“黏性”(sticky)的性质。见 E. Derman, “Regimes of Volatility,” *Risk*, April 1999: 55-59。

时的价格期望值[⊖]。

另一种定义波动率微笑的方式是将其定义为隐含波动率与期权 Delta 之间的关系（其中 Delta 在第 18 章中定义），利用这种方式，我们可以将波动率微笑理论应用于欧式和美式看涨和看跌期权产品上。当应用这种方法时，平值期权被定义为 Delta 等于 0.5 的看涨期权，或 Delta 等于 −0.5的看跌期权。这些平值期权被称为“50-Delta 期权”(50-delta option)。

19.5　波动率期限结构与波动率曲面

交易员允许隐含波动率既依赖于执行价格，又依赖于期限。当短期的历史波动率较低时，波动率往往是期限的递增函数，因为这时波动率预期会升高。类似地，当短期的历史波动率较高时，波动率往往是期限的递减函数，因为这时波动率预期会减小。

波动率曲面是将波动率期限结构与波动率微笑结合在一起所产生的表格，该表格可用于对不同执行价格以及不同期限的期权进行定价。表 19-2 是一个可用于汇率期权定价的波动率曲面。

表 19-2　波动率曲面

期限	执行价格				
	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10
1 个月	14.2	13.0	12.0	13.1	14.5
3 个月	14.0	13.0	12.0	13.1	14.2
6 个月	14.1	13.3	12.5	13.4	14.3
1 年	14.7	14.0	13.5	14.0	14.8
2 年	15.0	14.4	14.0	14.5	15.1
5 年	14.8	14.6	14.4	14.7	15.0

表 19-2 中波动率曲面的一个变量为 K/S_0，另一维变量为期限。波动率曲面的数值是由布莱克-斯科尔斯-默顿公式得出的隐含波动率。在任意给定时间，波动率曲面的某些点对应于市场价格比较可靠的期权价格数据，对应于这些点的隐含波动率可以直接由市场期权价格来求得，并被输入波动率曲面之中。波动率曲面上其他点的数据常常是通过插值计算得出的。从表中我们可以发现当期权期限变长时，波动率微笑变得不太严重。如前所述，这正是从汇率期权上可以观察到的现象(在其他资产的期权上，也常常会有同样的现象)。

当我们对一个新的期权定价时，金融工程师会在波动率曲面取得适当的数据。例如，为了对一个 9 个月期限，K/S_0 之比为 1.05 的期权进行定价，金融工程师可以采用表 19-2 显示的 13.4 与 14.0 之间的插值作为对波动率的估计，插值结果为 13.7%。这一数据可以用于布莱克-斯科尔斯-默顿公式或二叉树。对于一个 1.5 年期限，K/S_0 之比为 0.925 的期权进行定价，可采用二维插值来求得隐含波动率，即 14.525%。

波动率微笑的形状与期权的期限有关。如表 19-2 所示，随着期权期限的增大，波动率微笑的幅度变得越来越小。假如 T 代表期限，F_0 代表期限与所考虑期权相同的资产的远期价格，有些金融工程师将波动率微笑定义为隐含波动率与变量

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\ln\left(\frac{K}{F_0}\right)$$

之间的函数，而不是将波动率直接定义为隐含波动率与执行价格 K 的函数，这种方式的微笑通常

⊖ 像在第 27 章解释的那样，远期或期货价格为资产在风险中性世界的期望值这一结论取决于风险中性世界的定义方式。

与期限 T 的关系不大[⊖]。

19.6 希腊值

波动率微笑会使得希腊值的计算更加复杂。假设对于某个期限，期权的隐含波动率与 K/S 的关系保持不变[⊜]。当标的资产价格变化时，期权的隐含波动率变化反映期权的**在值程度**(moneyness，即期权的实值或虚值程度)。第 18 章中所给出的计算期权希腊值公式将不再成立。例如，看涨期权的 Delta 计算公式变为

$$\frac{\partial c_{\mathrm{BS}}}{\partial S}+\frac{\partial c_{\mathrm{BS}}}{\partial \sigma_{\mathrm{imp}}}\frac{\partial \sigma_{\mathrm{imp}}}{\partial S}$$

其中 C_{BS} 是以资产价格 S 与隐含波动率 σ_{imp} 为函数的期权价格。考虑以上公式对股票看涨期权 Delta 的影响。波动率为 K/S 的递减函数，这说明当标的资产价格增加时，波动率也会增加。因此

$$\frac{\partial \sigma_{\mathrm{imp}}}{\partial S}>0$$

所以，这里计算的 Delta 比布莱克-斯科尔斯-默顿假设下的 Delta 要高。

在实际中，对市场上常常遇到的波动率曲面变化，银行会试图保证自身对这种变化的风险暴露小到一定合理的程序。一种识别这些变化的技巧为第 21 章将要讨论的**主成分分析法**(principal components analysis)。

19.7 模型的作用

如果交易员对每一笔交易都采用不同的波动率，那么期权定价模型有多重要呢？我们可以认为布莱克-斯科尔斯-默顿模型只不过是交易员用来进行插值的工具。利用布莱克-斯科尔斯-默顿模型，交易员可以保证期权的价格与市场交易活跃的产品价格是一致的。假如交易员在某一天突然决定不再使用布莱克-斯科尔斯-默顿模型，而改用另一种合理的模型，这时波动率曲面会有所改变，波动率微笑的形状也会改变，但期权的市场现金价格不会有明显的变化。甚至在改变模型后，按前面介绍而得出的 Delta 也不会有很大的改变。

对于某个衍生产品，如果市场上没有与其相似的产品可以交易，那么模型对该衍生产品的定价就至关重要。例如，后面章节所讨论的许多非标准奇异衍生品价格都与所选取的模型有关。

19.8 当预期会有价格大跳跃时

我们现在利用一个例子来说明股票市场波动率微笑如何会变成一种特殊的形式。假定股票的当前价格为 50 美元，今后几天的一项消息会使得股票价格或者下跌 8 美元或者上涨 8 美元(这一消息可能是关于一项并购计划的最终结果或者是关于一个重要法律诉讼的最终结局)。股票价格在一个月以后的分布可能由两个对数正态分布叠加而成。一个对数正态分布对应于好消息；另一个对数正态分布对应于坏消息。这一情形见图 19-5。实线表达

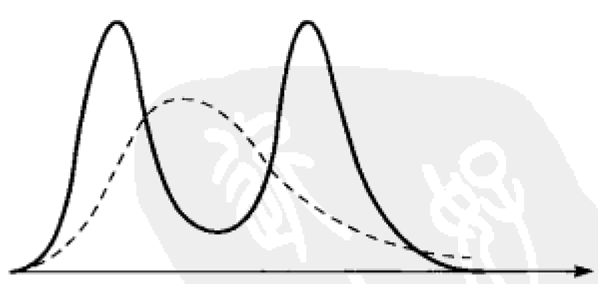


图 19-5 股票价格跳跃的效应

注：实线代表真实分布，虚线代表对数正态分布。

⊖ 关于这种方法的讨论，参考 S. Natenberg, *Option Pricing and Volaitility: Advanced Trading Strategies and Techniques*, 2nd edn. McGraw-Hill, 1994; R. Tompkins, *Options Analysis: A State of the Art Guide to Options Pricing*, Burr Ridge, IL: Irwin, 1994。

⊜ 有意思的是，只有当对于所有的期限波动率微笑都为水平时，这一自然模型才具有内在一致性，见 T. Daglish, J. Hull, and W. Suo, "Volatility Surfaces: Theory, Rules of Thumb, and Empirical Evidence," *Quantitative Finance*, 7, 5(October 2007), 507 - 524。

的概率分布为一个月后由两个对数正态分布叠加而成的股票价格分布。图中虚线代表一个与以上概率分布有同样的期望值及标准差的对数正态分布。

真正的概率分布为**双峰**(bimodal，该分布显然不是对数正态分布)。一个研究双峰股票价格分布效应的简单方法是考虑像二项分布这样的极端情形。我们下面考虑这种情况。

假设股票的当前价格为 50 美元。一个月后，股票价格会变为 42 美元或 58 美元。假定无风险利率为每年 12%，这一情形见图 19-6。期权可以通过由第 12 章所描述的二叉树模型来定价。这时，$u=1.16$，$d=0.84$，$a=1.0101$ 及 $p=0.5314$。表 19-3 列出了不同期权的价格。表中的第一列为不同的执行价格；第二列为一个月期限的欧式看涨期权的价格；第三列为一个月期限的欧式看跌期权的价格；第四列为隐含波动率(如第 19.1 节所述，对于同一执行价格以及期限，欧式看涨期权的隐含波动率等于欧式看跌期权的隐含波动率)。图 19-7 展示了由表 19-3 得出的隐含波动率微笑。隐含波动率微笑实际为隐含**波动率皱眉**(volatility frown，与在货币中观察到的波动率微笑形状相反)。在这种隐含波动率微笑形式中，当期权变得更加实值或虚值时，波动率有所减小。当使用执行价格为 50 美元的期权的隐含波动率对执行价格为 44 美元或 56 美元的期权进行定价时，所得价格将太高。

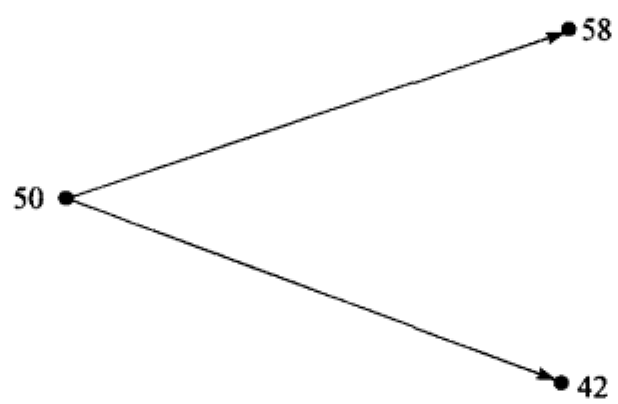


图 19-6 一个月后的股票价格变化

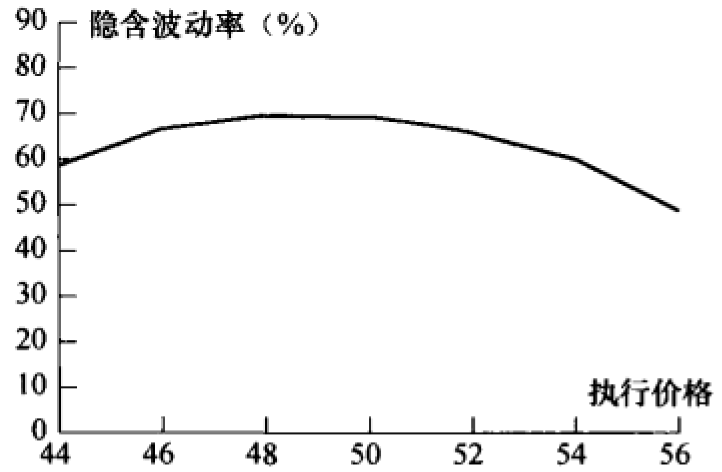


图 19-7 表 19-3 所对应的波动率微笑

表 19-3 隐含波动率 (单位：美元)

执行价格	看涨期权价格	看跌期权价格	隐含波动率(%)	执行价格	看涨期权价格	看跌期权价格	隐含波动率(%)
42	8.42	0.00	0.0	52	3.16	4.64	66.1
44	7.37	0.93	58.8	54	2.10	5.57	60.0
46	6.31	1.86	66.6	56	1.05	6.50	49.0
48	5.26	2.78	69.5	58	0.00	7.42	0.0
50	4.21	3.71	69.2				

注：这里的真实分布为二项分布。

小 结

布莱克-斯科尔斯-默顿模型及其推广均假定资产价格在将来时刻的概率分布服从对数正态分布。这一假设与交易员的假设是不一样的。他们一般假定股票价格的分布相对于对数正态分布来讲有较肥的左端尾部与较廋的右端尾部，还假定兑换率的概率分布相对于对数正态分布来讲有较肥的左端尾部与较肥的右端尾部。

交易员采用波动率微笑来刻画非对数正态分布。波动率微笑定义了期权隐含波动率与执行价格的关系。股票期权波动率微笑具有向下倾斜的形状，这意味深度虚值看跌期权及深度实值看涨期权所对应的隐含波动率较高，而深度实值看跌期权及深度虚值看涨期权所对应的隐含波动率较低。外汇期权波动率微笑为 U 字形。深度虚值期权及深度实值期权的波动率均

高于平值期权的波动率。

交易员也采用波动率期限结构，期权隐含波动率与期权的期限有关。将波动率期限结构与波动率微笑结合在一起时，我们可以产生波动率曲面，这一波动率曲面将隐含波动率视为执行价格和期限的函数。

推荐阅读

Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen. "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance*, 52, No. 5 (December 1997): 2004–49.

Bates, D. S. "Post-'87 Crash Fears in the S&P Futures Market," *Journal of Econometrics*, 94 (January/February 2000): 181–238.

Daglish, T., J. Hull, and W. Suo. "Volatility Surfaces: Theory, Rules of Thumb, and Empirical Evidence," *Quantitative Finance*, 7, 5 (2007), 507–24.

Derman, E. "Regimes of Volatility," *Risk*, April 1999: 55–59.

Ederington, L. H., and W. Guan. "Why Are Those Options Smiling," *Journal of Derivatives*, 10, 2 (2002): 9–34.

Jackwerth, J. C., and M. Rubinstein. "Recovering Probability Distributions from Option Prices," *Journal of Finance*, 51 (December 1996): 1611–31.

Melick, W. R., and C. P. Thomas. "Recovering an Asset's Implied Probability Density Function from Option Prices: An Application to Crude Oil during the Gulf Crisis," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, 1 (March 1997): 91–115.

Reiswich, D., and U. Wystup. "FX Volatility Smile Construction," Working Paper, Frankfurt School of Finance and Management, April 2010.

Rubinstein, M. "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976, through August 31, 1978," *Journal of Finance*, 40 (June 1985): 455–80.

Xu, X., and S. J. Taylor. "The Term Structure of Volatility Implied by Foreign Exchange Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29 (1994): 57–74.

练习题

19.1 在下列情形所观察到的波动率微笑是什么形式？

(a) 股票价格分布两端的尾部均没有对数正态分布肥大。

(b) 股票价格分布右端的尾部比对数正态分布要肥大，右端尾部没有对数正态分布肥大。

19.2 股票的波动率微笑形式是什么？

19.3 标的资产价格有跳跃时会造成什么形式的波动率微笑？这种形式对于2年和3个月期限的期权中哪个更显著？

19.4 一欧式看涨期权与一欧式看跌期权具有同样的执行价格及期限。看涨期权的隐含波动率为30%，看跌期权的隐含波动率为25%。你会进行什么样的交易？

19.5 仔细解释为什么与对数正态分布相比，左端尾部更加肥大而右端尾部更加瘦小的分布会造成向下倾斜的形状。

19.6 一个欧式看涨期权的价格为3美元。当采用30%的波动率时，布莱克-斯科尔斯-默顿公式的价格为3.50美元，由布莱克-斯科尔斯-默顿给出的对于相同执行价格以及期限的看跌期权的价格为1美元。这一期权的市场价格应该为多少？解释你的答案。

19.7 解释股票暴跌恐惧症。

19.8 股票的当前价格为20美元。明天公布的消息会使得股票价格上涨5美元或下跌5美元。采用布莱克-斯科尔斯-默顿公式来对一个月期的期权定价会存在什么问题？

19.9 当波动率不确定，并且与价格有正的相关性时，我们所观察到的6个月期限的期权波动率微笑最可能是什么样子？

19.10 在以实证形式验证期权定价公式时，你最可能会遇到什么问题？

19.11 假定中央银行的政策允许汇率在0.97～1.03中变化，你所计算的汇率期权隐

含波动率具有什么特征？

19.12 期权交易员有时将深度虚值期权看做是波动率上的期权。你认为他们为何会这样做？

19.13 某股票上看涨期权的执行价格为 30 美元，期限为 1 年，隐含波动率为 30%。对于同一股票，执行价格为 30 美元，期限也为 1 年的看跌期权的隐含波动率为 33%。这对于交易员来讲会有什么样的套利机会？套利机会是建立在布莱克-斯科尔斯-默顿对数正态分布的前提下吗？仔细解释你的答案。

19.14 假定明天将会宣布对于公司有重大影响的法律诉讼结果。公司股票的当前价格为 60 美元。如果诉讼结果对公司有利，股票价格将会上涨到 75 美元；如果诉讼结果对公司不利，股票价格将会下跌到 50 美元。诉讼结果对公司有利的风险中性概率为多少？如果诉讼结果对公司有利，股票在 6 个月时的波动率为 25%；但如果诉讼结果对公司不利，股票在 6 个月时的波动率为 40%。利用 DerivaGem 计算今天这家公司股票隐含波动率与期权价格的关系。已知公司股票无股息。假定 6 个月期的无风险利率为 6%。在计算中考虑具有执行价格为 30 美元、40 美元、50 美元、60 美元、70 美元及 80 美元的看涨期权。

19.15 当前某汇率为 0.800 0。汇率的波动率为 12%，两个国家的利率相同。采用对数正态的假设来估计汇率在以下范围的概率：(a)小于 0.700 0，(b)0.700 0 ~ 0.750 0 之间，(c)0.750 0 ~ 0.800 0 之间，(d)0.800 0 ~ 0.850 0 之间，(e)0.850 0 ~ 0.900 0 之间，(f)大于 0.900 0。假定汇率波动率微笑为通常所看到的形式，以上估计哪一项过低，哪一项过高。

19.16 某股票的价格为 40 美元。对于这一股票，执行价格为 30 美元，期限为 6 个月的欧式看涨期权的隐含波动率为 35%。对于同一股票，执行价格为 50 美元，期限为 6 个月的欧式看涨期权的隐含波动率为 28%。6 个月期限的无风险利率为 5%，股票无股息。解释为什么两个隐含波动率会不同。利用 DerivaGem 计算两个期权的价格。采用看跌-看涨期权平价关系式计算执行价格分别为 30 美元及 50 美元的看跌期权的价格。利用 DerivaGem 计算两个看跌期权的隐含波动率。

19.17 “布莱克-斯科尔斯-默顿模型是被交易员用做插值的工具”。解释这一观点。

19.18 利用表 19-2 计算交易员所采用的 8 个月期限，$K/S_0 = 1.04$ 的期权隐含波动率。

作业题

19.19 一家公司股票价格为 4 美元。公司没有任何债务。分析员认为公司清盘时其价格至少为 30 万美元，当前在市场总共有 10 万股股票。这时你会看到什么样的波动率微笑？

19.20 一家公司在等待某个诉讼结果。诉讼结果会在 1 个月后宣布。公司股票当前价格为 20 美元。如果诉讼结果对公司有利，1 个月后股票会上涨到 24 美元；如果诉讼结果对公司不利，1 个月后股票会下跌到 18 美元。1 个月期的无风险利率为每年 8%。

(a)诉讼结果对公司有利的风险中性概率为多少？

(b)执行价格分别为 19 美元、20 美元、21 美元、22 美元及 23 美元，1 个月期的看涨期权价格分别为多少？

(c)利用 DerivaGem 计算 1 个月期的看涨期权波动率微笑。

(d)验证 1 个月期的看跌期权波动率微笑与以上结果一致。

19.21 一个期货价格为 40 美元，无风险利率为 5%。明天公布的消息会造成今后 3 个月期的波动率变为 10% 或者 30%，第一种情况出现的概率为 60%，第二种情况出现的概率为 40%，采用软件 DerivaGem 计

算3个月期权的波动率微笑。

19.22 在作者网页上可以下载不同的汇率数据 http://www.rotman.utoronto.ca/~hull/data 选定一种货币来产生类似于表19-1的表格。

19.23 在作者网页上可以下载不同的股票数据 http://www.rotman.utoronto.ca/~hull/data 选定一种指数并检验价格下跌3个标准差的概率是否会大于价格上涨3个标准差的概率。

19.24 某欧式看涨期权与某欧式看跌期权具有同样的执行价格及期限。证明当波动率在一个短暂时段由 σ_1 上涨到 σ_2 时，以上两个期权的增值相同(提示：利用看跌-看涨平价关系式)。

19.25 某汇率当前值为1.0，6个月期限，具有执行价格0.7、0.8、0.9、1.0、1.1、1.2、1.3的隐含波动率为13%、12%、11%、10%、11%、12%和13%。国内与外国无风险利率均为2.5%。利用与例19A-1类似的方法计算隐含概率分布，并且与所有隐含波动率均为11.5%时的隐含概率分布相比较。

19.26 利用表19-2计算交易员采用的一个11个月期限，$K/S_0=0.98$ 的期权的隐含波动率。

附录19A

由波动率微笑确定隐含风险中性分布

期限为 T，执行价格为 K 的欧式看涨期权的价格为

$$c = e^{-rT}\int_{S_T=K}^{\infty}(S_T - K)g(S_T)\mathrm{d}S_T$$

式中 r 为利率(假定为常数)，S_T 为 T 时刻的资产价格，g 为 S_T 的风险中性概率密度函数。对 K 求导数，我们可以得出

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-rT}\int_{S_T=K}^{\infty}g(S_T)\mathrm{d}S_T$$

再一次对 K 求导数，得出

$$\frac{\partial^2 c}{\partial K^2} = -e^{-rT}g(K)$$

因此，概率密度函数 g 满足

$$g(K) = e^{rT}\frac{\partial^2 c}{\partial K^2} \tag{19A-1}$$

这一结果最先由Breeden和Litzenberger在1978年得出，由此我们可以由波动率微笑来估算风险中性概率分布㊀。假定 c_1、c_2 和 c_3 分别为期限为 T，执行价格为 $K-\delta$、K 和 $K+\delta$ 的看涨期权的价格。假定 δ 很小，$g(K)$ 的近似估计为

$$e^{rT}\frac{c_1 + c_3 - 2c_2}{\delta^2}$$

以另外一种方式来理解以上公式，假定你设定了一个蝶式差价，其中执行价格分别为 $K-\delta$、K 和 $K+\delta$，期限为 T。这意味着你将买入执行价格为 $K-\delta$ 的看涨期权，买入执行价格为 $K+\delta$ 的看涨期权，同时卖出两个执行价格为 K 的看涨期权。你的头寸的价值为 $c_1+c_3-2c_2$，这一头寸的价值也可以通过对收益的风险中性概率分布 $g(S_T)$ 进行积分，并以无风险利率贴现来求得。收益如图19A-1所示。因为 δ 很小，我们可以假定在 $K-\delta<S_T<K+\delta$ 区域内，$g(S_T)=g(K)$，这里的收益不为0。在三角形"尖刺"(spike)区域下的面积为 $0.5\times2\delta\times\delta=\delta^2$，因此收益的价值为 $e^{-rT}g(K)\delta^2$，因此

$$e^{-rT}g(K)\delta^2 = c_1 + c_3 - 2c_2$$

㊀ 见 D. T. Breeden and R. H. Litzenberger, "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices," *Journal of Business*, 51(1978), 621-51。

由此得出

$$g(K)=e^{rT}\frac{c_1+c_3-2c_2}{\delta^2} \tag{19A-2}$$

【例 19A-1】 假定一个无股息股票的当前价格为 10 美元，无风险利率为 3%，3 个月期限执行价格分别为 6 美元、7 美元、8 美元、9 美元、10 美元、11 美元、12 美元、13 美元和 14 美元的期权的隐含波动率分别为 30%、29%、28%、27%、26%、25%、24%、23%和 22%。一种应用以上结果的方式如下，假定 $g(S_T)$ 在 $S_T=6$ 和 $S_T=7$ 之间为常数，在 $S_T=7$ 和 $S_T=8$ 之间为常数，等等。定义

$g(S_T)=g_1$ 当 $6\leqslant S_T<7$

$g(S_T)=g_2$ 当 $7\leqslant S_T<8$

$g(S_T)=g_3$ 当 $8\leqslant S_T<9$

$g(S_T)=g_4$ 当 $9\leqslant S_T<10$

$g(S_T)=g_5$ 当 $10\leqslant S_T<11$

$g(S_T)=g_6$ 当 $11\leqslant S_T<12$

$g(S_T)=g_7$ 当 $12\leqslant S_T<13$

$g(S_T)=g_8$ 当 $13\leqslant S_T<14$

g_1 的取值可以由期限为 1 年，执行价格为 6.5 美元的隐含波动率进行插值计算来求得，计算结果为 29.5%，这意味着执行价格为 6 美元、6.5 美元和 7 美元的隐含波动率分别为 30%、29.5%和 29%。由软件 DerivaGem 得出，其对应的价格分别为 4.045 美元、3.549 美元和 3.055 美元。利用公式(19A-2)，$K=6.5$ 和 $\delta=0.5$，得出

$$g_1=\frac{e^{0.03\times0.25}(4.045+3.055-2\times3.549)}{0.5^2}$$
$$=0.0057$$

进行类似计算，可以得出

$$g_2=0.0444,\quad g_3=0.1545,\quad g_4=0.2781$$
$$g_5=0.2813,\quad g_6=0.1659,\quad g_7=0.0573,$$
$$g_8=0.0113$$

图 19A-2 展示了隐含概率分布(注意，在概率分布下的区域面积为 0.998 5，因此 $S_T<6$ 或 $S_T>14$ 的区域面积为 0.001 5)。虽然从图 19A-2 中来看并不是很清楚，隐含波动率的左端比对数正态分布的左端确实要肥大，右端比对数正态分布的右端要瘦小。对于基于单一波动率为 26% 的对数正态分布而言，股票价格介于 6 美元和 7 美元的概率为 0.003 1(在图 19A-2 中为 0.005 7)；股票价格介于 13 美元和 14 美元的概率为 0.016 7(在图 19A-2 中为 0.011 3)。

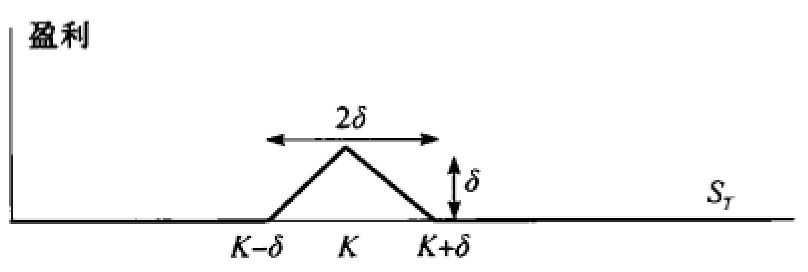


图 19A-1 蝶式差价的收益

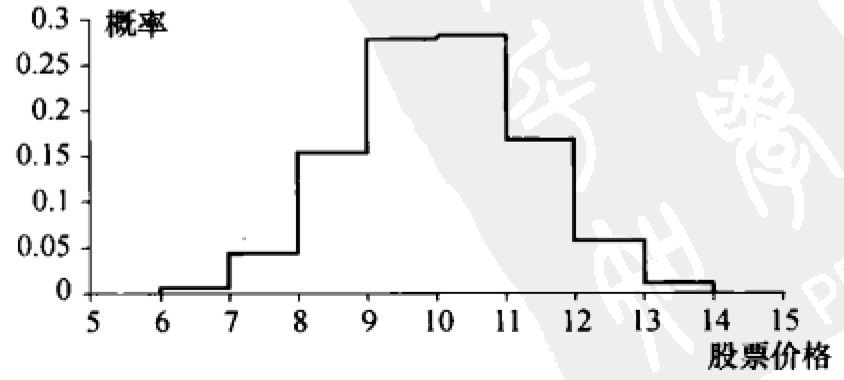


图 19A-2 例 19A-1 中的隐含波动率

第 20 章

基本数值方法

本章我们将讨论三种用于期权定价的数值方法，这些方法一般在没有类似于布莱克-斯科尔斯-默顿这样的解析解时才会被采用。第一种方法涉及构造第 12 章引入的树形结构来表达资产变化的方式；第二种方法涉及蒙特卡罗方法，在第 13 章解释随机过程时，我们曾对这一方法进行过简要的讨论；第三种方法为有限差分法。

蒙特卡罗方法主要适用于衍生产品的收益与标的资产的历史价格有关或者有多个标的资产的情形；树形法和有限差分法主要适用于期权持有者可以提前行使期权的美式期权或其他持有者需要在到期日之前做出某种决定的衍生产品。除了对产品定价，这里讨论的数值方法均可用于计算 Delta、Gamma、Vega 等希腊值。

这里讨论的基本数值方法可用于处理我们在实际中遇到的大多数问题，但有时我们需要将方法进行改进以解决特殊问题。我们将在第 26 章讨论这一点。

20.1 二叉树

我们在第 12 章中引入了二叉树方法。这一方法既可以用于对欧式期权定价，也可以用于对美式期权定价。在第 14 章、第 16 章和第 17 章中给出的布莱克-斯科尔斯-默顿模型及其推广形式给欧式期权提供了解析定价公式[⊖]。对于美式期权，不存在解析公式，二叉树最有用的地方是对美式期权定价[⊜]。

如第 12 章所述，在二叉树方法中，我们首先将期权的期限分成许多很小的时间区间，每个长度为 Δt。我们假定在每一个时间段里股票价格从开始的价格 S 变为两个新价格 Su 及 Sd 中的一个。这一模型见图 20-1。一般来讲，$u>1$，$d<1$。因此，S 到 Su 的变化被称为价格上涨变化，S 到 Sd 的变化被称为价格下跌变化。上涨变化的概率记为 p，价格下跌变化的概率为 $1-p$。

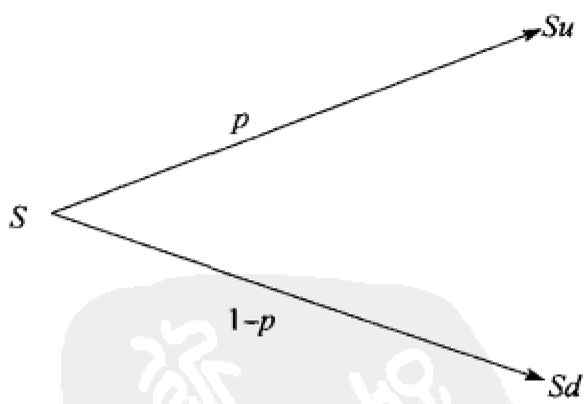


图 20-1 在二叉树模型中，在时间 Δt 后资产价格的变化

20.1.1 风险中性定价

在第 12 章及第 14 章中所讨论的风险中性定价说明，在对期权（或其他衍生产品）定价时，我们可以假定世界是风险中性的。这意味着为了定价的目的，我们可以采取以下方法。

⊖ 布莱克-斯科尔斯-默顿公式是基于与二叉树相同的假设。正如我们所期望的那样，当步数逐渐增大时，由二叉树给出的欧式期权价格收敛于由布莱克-斯科尔斯-默顿给出的价格。

⊜ 有人提出了求解美式期权的近似解析公式，其中最著名的方法为二次近似法。

- 假定所有交易证券的收益率期望均为无风险利率。
- 计算衍生产品收益的期望值，并以无风险利率贴现来对衍生产品定价。

以上描述的过程是采取树形定价的基础。

20.1.2 确定 p，u 及 d

参数 p，u 及 d 的选择必须保证股票价格在时间 Δt 内变化的均值与方差都给出正确的值。由于我们假定了风险中性世界，股票的收益率期望为无风险利率 r，如果资产提供收益率 q 的收入(比如股息)，那么资本增值部分的收益率期望必须是 $r-q$，这意味着在一个时间区间 Δt 末，资产价格的期望值为 $Se^{(r-q)\Delta t}$，式中 S 为资产在时间区间开始时的价格。为了保证二叉树与回报均值相吻合，我们有

$$Se^{(r-q)\Delta t} = pSu + (1-p)Sd$$

即

$$e^{(r-q)\Delta t} = pu + (1-p)d \tag{20-1}$$

一个变量 Q 的方差等于 $E(Q^2)-[E(Q)]^2$。将资产价格在 Δt 时间内的百分比变化记为 R，那么 $1+R$ 等于 u 的概率为 p，等于 d 的概率为 $1-p$。从式(20-1)可知 $1+R$ 的方差为

$$pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2(r-q)\Delta t}$$

因为加上一个常数并不改变变量的方差，因此 $1+R$ 的方差与 R 的方差是一样的。如 14.4 节所述，这个值等于 $\sigma^2\Delta t$。因此

$$pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2\Delta t$$

由式(20-1)得出，$e^{(r-q)\Delta t}(u+d) = pu^2 + (1-p)d^2 + ud$，因此

$$e^{(r-q)\Delta t}(u+d) - ud - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2\Delta t \tag{20-2}$$

式(20-1)及式(20-2)给出了决定 p、u 及 d 的两个条件，Cox、Ross 和 Rubinstein(CRR)选取的第三个条件为[㊀]

$$u = \frac{1}{d} \tag{20-3}$$

当忽略 Δt 的高阶项时，式(20-1)至式(20-3)的解为[㊁]

$$p = \frac{a-d}{u-d} \tag{20-4}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{20-5}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{20-6}$$

式中

$$a = e^{(r-q)\Delta t} \tag{20-7}$$

变量 a 有时被称为**增长因子**(growth factor)。注意，式(20-4)至式(20-7)与 12.9 节和 12.11 节中的结果相同。

20.1.3 资产价格的树形

图 20-2 展示了资产价格树形为 5 步时的完整结构。在时间 0，价格 S_0 为已知；在时刻 Δt，

㊀ 见 J. C. Cox，S. A. Ross and M. Rubinstein，"Option Pricing: A Simplified Approach，" *Journal of Financial Economics*，7 (October 1979)，229-64。

㊁ 为了说明这一点，我们注意到式(20-4)和式(20-7)严格满足式(20-1)和式(20-3)中的条件。指数函数 e^x 可被展开为 $1+x+x^2/2+\cdots$。当我们忽略 Δt 的高阶项时，式(20-5)意味着 $u=1+\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$，式(20-6)意味着 $d=1-\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$，再有 $e^{(r-q)\Delta t}=1+(r-q)\Delta t$ 和 $e^{2(r-q)\Delta t}=1+2(r-q)\Delta t$。将这些表达式代入，可以看到当忽略 Δt 的高阶项时，式(20-2)成立。

价格有两种可能的值：S_0u，S_0d；在时刻 $2\Delta t$，价格有三种可能的值：S_0u^2，S_0，S_0d^2；依此类推。在一般情形下，在时刻 $i\Delta t$，价格有取 $i+1$ 种值的可能，它们是

$$S_0u^jd^{i-j}, j = 0,1,\cdots,i$$

注意在图 20-2 中，在计算每一个节点上资产价格时，我们采用了关系式 $u=1/d$，例如，当 $j=2$ 和 $i=3$ 时的资产价格为 $S_0u^2d=S_0u$。还应注意，树中节点是重合的（recombine），也就是说资产价格先上涨后下跌与先下跌再上涨所得出的值是一样的。

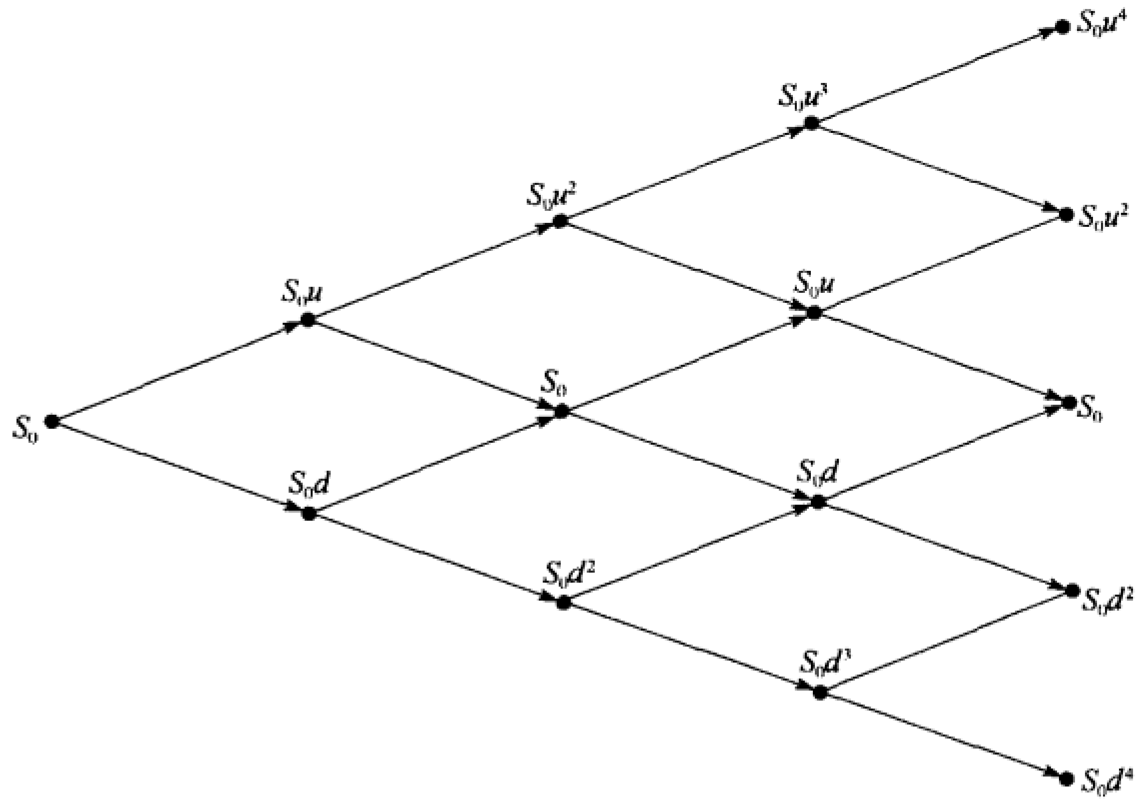


图 20-2 用于期权定价的树形

20.1.4 通过树形倒推计算

通过在时间 T（即树的末端）的期权价格由**反向归纳**（backwards induction）的方式可以对期权定价。期权在时刻 T 的价格是已知的，例如，看跌期权的价格为 $\max(K-S_T,\ 0)$，而看涨期权的价格为 $\max(S_T-K,\ 0)$，其中 S_T 为股票在时刻 T 的价格，K 为执行价格。因为我们假定世界为风险中性，在 $T-\Delta t$ 时刻每一个节点上的期权价值等于将 T 时刻期权价值的期望值以无风险利率 r 在时间区间 Δt 上进行贴现。类似地，在 $T-2\Delta t$ 时刻每一个节点上的期权价值可以将 $T-\Delta t$ 时刻期权价值的期望值以无风险利率进行贴现来求得，并以此类推。如果期权为美式期权，在二叉树的每个节点上我们需要检验在这一节点行使期权是否比在下一个时间区间后持有期权更有利。最后，以倒推的形式走过所有的节点，我们可以得出期权在 0 时刻的价格。

【例 20-1】 考虑一个无股息股票 5 个月期限的美式看跌期权，股票的当前价格为 50 美元，执行价格为 50 美元，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 40%。采用我们常用的符号，这意味着 $S_0=50$，$K=50$，$r=0.10$，$\sigma=0.40$，$T=0.4167$ 与 $q=0$。假如在构造二叉树时，我们将期权期限分为 5 个时间段，每段长度为 1 个月（$=0.0833$ 年）。采用式(20-4)至式(20-7)得出

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.1224, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.8909,$$

$$a = e^{r\Delta t} = 1.0084$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0.5073, 1-p = 0.4927$$

图 20-3 展示了由 DerivaGem 产生的二叉树。在每一个节点上有两个数值。上面的数值表示该节点所对应的股票价格；下面数值表示节点所对应的期权价值。股价上涨的概率总是等于 0.507 3，股价下跌的概率总是等于 0.492 7。

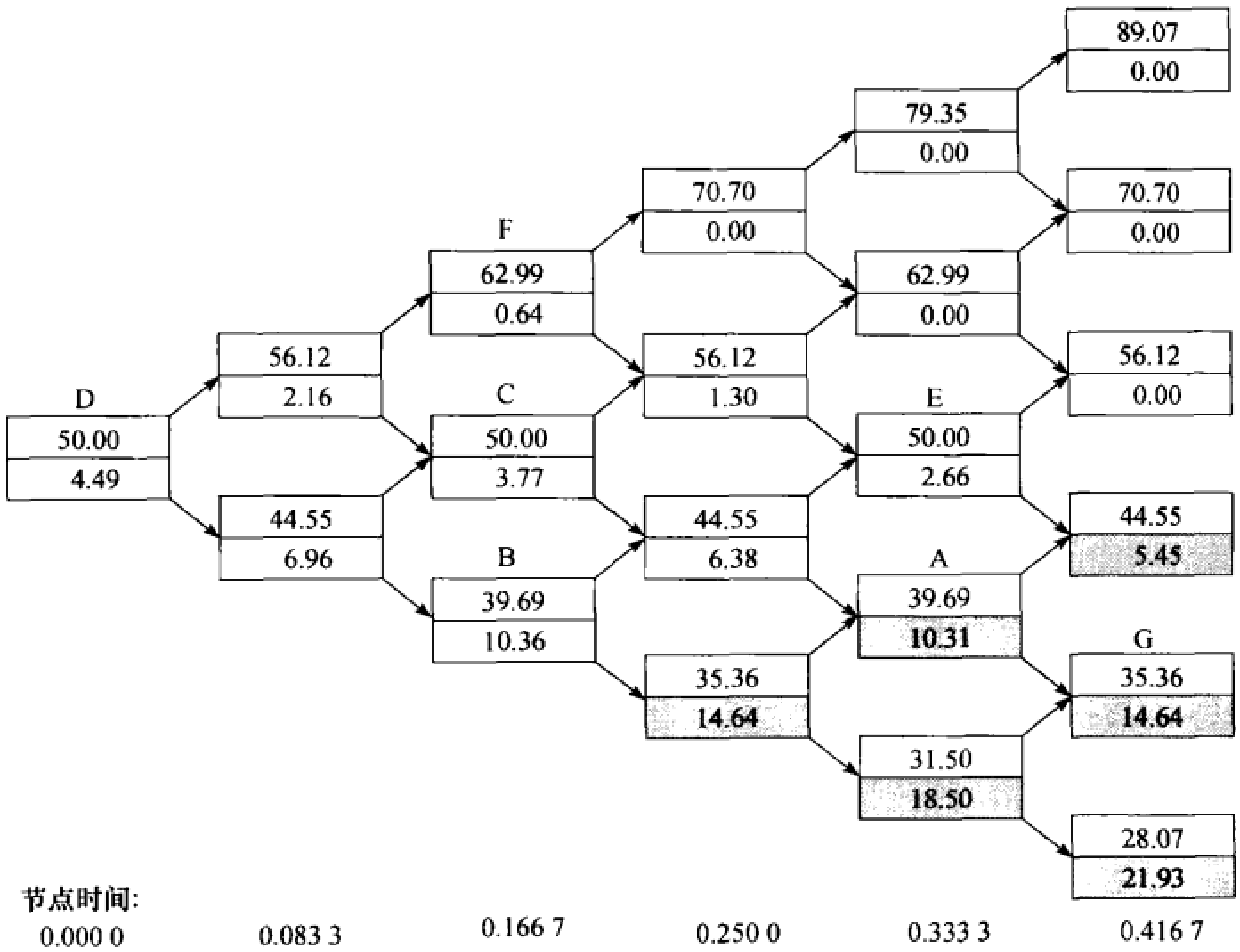


图 20-3 由 DerivaGem 生成的无股息股票看跌期权的二叉树

注：在每个节点上，上方数值＝标的资产价格；下方数值＝期权价格；阴影部分表示期权已被行使；行使价格＝50；每步的贴现因子＝0.991 7；时间步长 Δt＝0.083 3 年，即 30.42 天；每步的增长因子 a＝1.008 4；价格上涨概率 p＝0.507 3；价格上涨幅度 u＝1.122 4；价格下跌幅度 d＝0.890 9。

在 $i\Delta t$ 时刻($i=0, 1, \cdots, 5$)，股票在第 j 个节点($j=0, 1, \cdots, i$)上的价格为 $S_0u^jd^{i-j}$。例如，股票在节点 $A(i=4, j=1)$(即树的第四步从下面数第二个节点)上的价格为 $50\times1.1224\times0.8909^2=39.69$ 美元。在最后面节点上，期权价格为 $\max(K-S_T, 0)$。例如，期权在节点 G 上的价格为 $50-35.36=14.64$。期权在倒数第二步上的价格可由最后节点上的价格计算得出。首先我们假定在节点上不行使期权，这意味着期权价格等于在下一步节点上价格期望值的贴现值。例如，在节点 E 上，期权价格的计算式为

$$(0.5073\times0+0.4927\times5.45)e^{-0.10\times0.0833}=2.66$$

而在节点 A 上，期权价格的计算式为

$$(0.5073\times5.45+0.4927\times14.64)e^{-0.10\times0.0833}=9.90$$

然后，我们检验提前执行期权是否比持有期权更为有利。在节点 E 上，提前行使期权带来收益为 0，因为是股价及执行价格均为 50 美元，很显然我们应该等待，即持有期权，因此在节点 E 的期权价格为 2.66 美元。在节点 A 上，情形会有所不同。如在该节点行使期权，价值为 $50-39.69$，即 10.31 美元，这一价值大于 9.90 美元。如果股票价格到达节点 A，期权应该被行使，因此 A 点的期权价值为 10.31 美元。

在前面节点上，期权价值也可以采用类似的方式计算。注意，当期权处于实值状态时，提前行使并不一定为最佳。考虑节点 B，如果期权被行使，其价值为 $50-36.96=10.31$ 美元。但是，

如果期权没有被提前执行，其价格则为

$$(0.5073 \times 6.38 + 0.4927 \times 14.64)e^{-0.10 \times 0.0833} = 10.36 \text{美元}$$

因此，期权在这一节点不应该被行使，该节点期权正确的价格为 10.36 美元。

从树的最后向前倒推，我们得出在初始节点上期权价格为 4.49 美元。这一数量是对期权当前价格的估计。在实际中，我们应采用更小的时间步长 Δt 和更多的节点。DerivaGem 显示 30 步、50 步、100 步和 500 步二叉树所得的期权价格分别为 4.263 美元、4.272 美元、4.278 美元和 4.283 美元。

20.1.5 代数表达式

假定将一个美式期权的期限分成 N 个长度为 Δt 的时间区间。我们称在时间 $i\Delta t$ 的第 j 个节点为 (i, j) 节点，其中 $0 \leqslant i \leqslant N$，$0 \leqslant j \leqslant i$。令 $f_{i,j}$ 为期权在 (i, j) 节点上的值，标的资产在 (i, j) 节点上的价格为 $S_0 u^j d^{i-j}$。如果是看涨期权，它在时间 T（到期日）的值为 $\max(S_T - K, 0)$，因此

$$f_{N,j} = \max(S_0 u^j d^{N-j} - K, 0), \quad (j = 0, 1, \cdots, N)$$

如果是看跌期权，它在时间 T（到期日）的值为 $\max(K - S_T, 0)$，因此

$$f_{N,j} = \max(K - S_0 u^j d^{N-j}, 0), \quad (j = 0, 1, \cdots, N)$$

在 $i\Delta t$ 时，从 (i, j) 节点移动到 $(i+1)\Delta t$ 时刻，$(i+1, j+1)$ 节点的概率为 p；在 $i\Delta t$ 时刻从 (i, j) 节点移动到 $(i+1)\Delta t$ 时刻 $(i+1, j)$ 节点的概率为 $1-p$。假定期权没有被提前行使，由风险中性定价原理可以得出，对 $0 \leqslant i \leqslant N-1$ 和 $0 \leqslant j \leqslant i$，

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]$$

当考虑提前行使期权时，式中的 $f_{i,j}$ 必须同期权的内涵价值进行比较，因此对于看涨期权

$$f_{i,j} = \max\{S_0 u^j d^{i-j} - K, e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]\}$$

对于看跌期权

$$f_{i,j} = \max\{K - S_0 u^j d^{i-j}, e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]\}$$

注意，由于定价计算从 T 时刻开始并以倒推形式进行，所以在 $i\Delta t$ 时刻的期权价值不仅反映了在 $i\Delta t$ 时刻提前行使期权的可能性对于期权价值的影响，而且也反映了将来时刻提前行使期权对于期权价值的影响。

当 Δt 趋向于 0 时，我们可以取得美式期权的精确价值，在实际中，$N=30$ 的树形结构通常会给出一个合理的价格。图 20-4 显示了例 20-1 中期权价格的收敛性。这一图形是由 DerivaGem 软件的应用工具计算得出的。

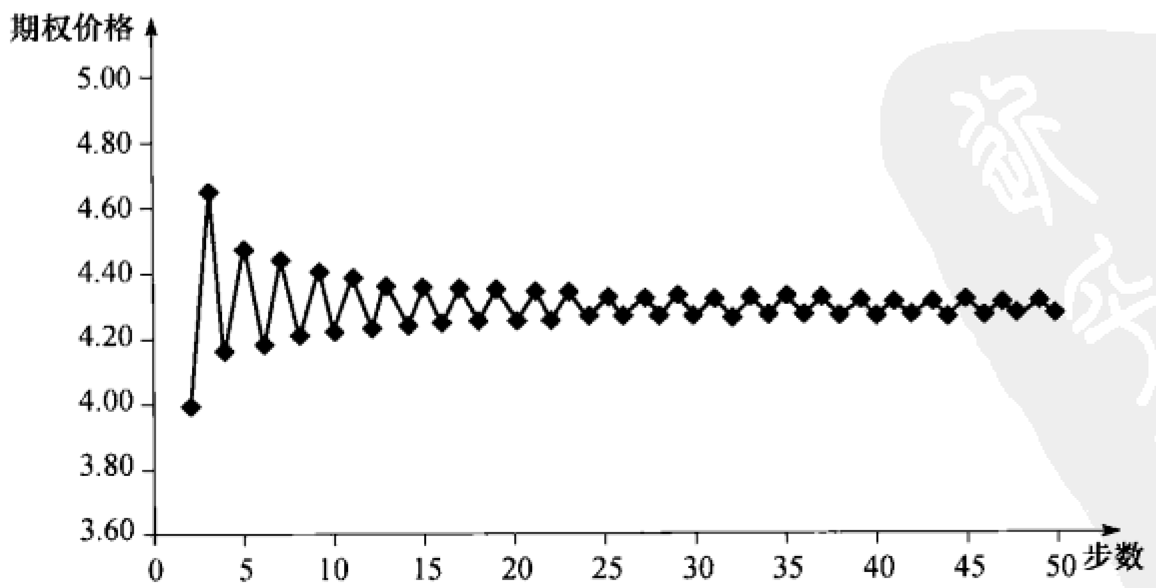


图 20-4 由 DerivaGem 软件计算的例 20-1 中期权价格的收敛性

20.1.6 估计 Delta 与其他希腊值

回忆之前的定义，期权的 Delta(Δ)为期权价格变化与标的股票价格变化的比率，即

$$\frac{\Delta f}{\Delta S}$$

式中 ΔS 为股票价格的微小变化，Δf 为相应期权价格的微小变化。在 Δt 时刻，当股票价格为 S_0u 时，期权价格估计值为 $f_{1,1}$；当股票价格为 S_0d 时，期权价格的估计值为 $f_{1,0}$。换句话讲，当 $\Delta S = S_0u - S_0d$ 时，我们有 $\Delta f = f_{1,1} - f_{1,0}$，因此在 Δt 的 Δ 的近似值为

$$\Delta = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{S_0u - S_0d} \tag{20-8}$$

为了确定 Gamma(Γ)，我们注意到在 $2\Delta t$ 时刻有两个 Δ 的估计。当股票价格为$(S_0u^2 + S_0)/2$ 时($2\Delta t$ 时刻的第二个与第三个节点的中间值)，Δ 为$(f_{2,2} - f_{2,1})/(S_0u^2 - S_0)$；当股票价格为$(S_0 + S_0d^2)/2$ 时($2\Delta t$ 时刻的第一个与第二个节点的中间值)，Δ 为$(f_{2,1} - f_{2,0})/(S_0 - S_0d^2)$。两个股票价格的差为 h，其中

$$h = 0.5 \times (S_0u^2 - S_0d^2)$$

Gamma 等于 Delta 的变化除以 h，即

$$\Gamma = \frac{[(f_{2,2} - f_{2,1})/(S_0u^2 - S_0)] - [(f_{2,1} - f_{2,0})/(S_0 - S_0d^2)]}{h} \tag{20-9}$$

这些计算给出了在 Δt 时刻 Delta 的估计值和 $2\Delta t$ 时刻 Gamma 的估计值。在实际中，这些估计值也用于作为 0 时刻 Delta 及 Gamma 的估计[⊖]。

从二叉树中可以进一步直接估计的对冲参数为 Theta(Θ)这一参数代表在其他条件不变时期权价格变化与时间变化的比率。如果资产价格是 S_0，期权在时刻 0 的值是 $f_{0,0}$，在时刻 $2\Delta t$ 的值是 $f_{2,1}$。Theta 的一个估计值为

$$\Theta = \frac{f_{2,1} - f_{0,0}}{2\Delta t} \tag{20-10}$$

Vega 的计算可以从对波动率做一微小变化而得出。当 σ 的变动量为 $\Delta\sigma$ 时，我们可以重新构造二叉树(Δt 应该不变)，并对期权重新定价。Vega 的估计值为

$$\mathcal{V} = \frac{f^* - f}{\Delta\sigma}$$

其中 f 及 f^* 分别为由最初的二叉树和重建的二叉树得出的期权价值。我们也可以采用类似的方法来进行计算 Rho。

【例 20-2】 再一次考虑例 20-1，由图 20-3 所示的二叉树得出 $f_{1,0} = 6.96$ 及 $f_{1,1} = 2.16$。式(20-8)给出的 Delta 估计值为

$$\frac{2.16 - 6.96}{56.12 - 44.55} = -0.41$$

利用式(20-9)，我们可以由在节点 B、C 及 F 的期权价值来估计期权的 Gamma

$$\{[(0.64 - 3.77)/(62.99 - 50.00)] - [(3.77 - 10.36)/(50.00 - 39.69)]\}/11.65 = 0.03$$

利用式(20-10)，可以由在节点 D 及 C 的期权价值来估算期权的 Theta 为每年

$$\frac{3.77 - 4.49}{0.1667} = -4.3$$

⊖ 如果我们要计算更精确的 Delta 及 Gamma，我们可以建立在 $-2\Delta t$ 开始的二叉树，并假定在那一刻股票价格为 S_0。对应于 0 时刻，我们也因此会得出 3 个对应于不同股价的期权价格。

即每日历天为 -0.012。当然，这些结果只是粗略的估计。当采用更小的时间步长时，结果会逐渐变得更精确。采用50步二叉树时，DerivaGem给出的Delta、Gamma及Theta的结果分别为 -0.414、0.034及 -0.0117。改变参数并重新计算期权价格，我们可以得出Vega和Rho的估计，其值分别为0.123和 -0.072。

20.2　采用二叉树来对股指、货币与期货期权定价

如在第12章、第16章和第17章解释的那样，当对股指、货币和期货上的期权定价时，可以将这些标的资产看做是提供已知收益率的资产。对于股指而言，收益率就是股指中股票组合的股息收益率；对于货币而言，收益率等于外币无风险利率；对于期货合约而言，收益率等于无风险利率。因而只要适当地选择式(20-7)中的 q 值，我们就可以对股指、货币和期货期权定价。

【例20-3】 考虑一个4个月期的股指期货的美式看涨期权，当前期货的价格为300，无风险利率为每年8%，股指的波动率为每年30%。为了构造二叉树，我们将期权期限分成4个长度为1个月的时间段。这时，$F_0=300$，$K=300$，$r=0.08$，$\sigma=0.3$，$T=0.3333$，和 $\Delta t=0.0833$。因为期货价格可被当成为一个支付连续股息收益率 r 的股票，在式(20-7)中应当将 q 取为 r。因此 $a=1$，其他构造二叉树的参数分别为

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=1.0905,\quad d=\frac{1}{u}=0.9170$$

$$p=\frac{a-d}{u-d}=0.4784,\quad 1-p=0.5216$$

二叉树如图20-5所示(节点上面的数值为期货价格，下面的数值为期权价格)。期权的估计值为19.16。当采用更多的步数时，我们可以取得更高的精度。例如，当采用50步二叉树时，DerivaGem得出的期权价格为20.18；当采用100步二叉树时，DerivaGem得出的期权价格为20.22。

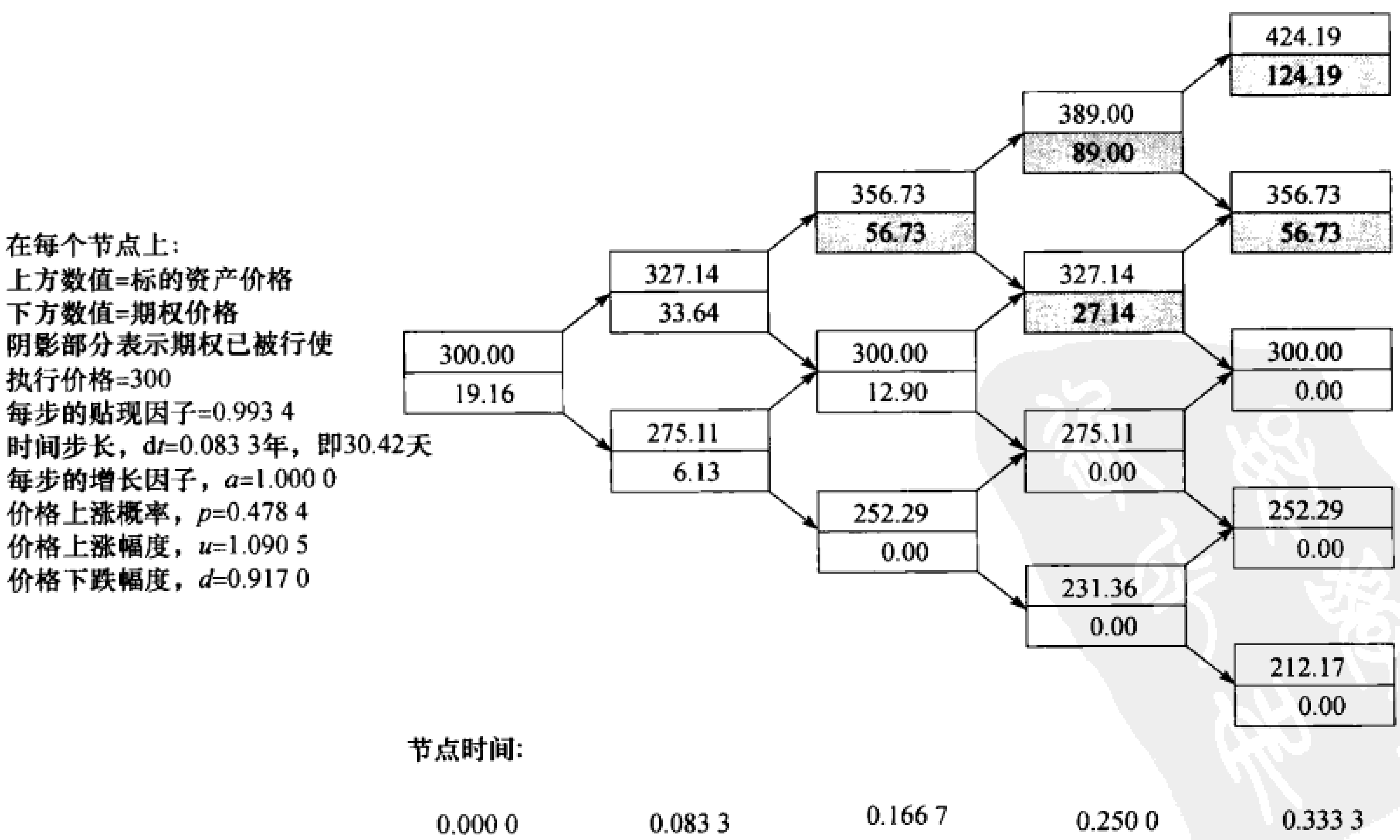


图20-5　DerivaGem产生的对于美式股指期货期权定价的二叉树

【例 20-4】　考虑一个 1 年期关于英镑的美式看跌期权。当前汇率为 1.61，执行价格为 1.6，美元无风险利率为每年 8%，英镑汇率为每年 9%，这里 $S_0=1.61$，$K=1.6$，$r=0.08$，$r_f=0.09$，$\sigma=0.12$ 和 $T=1.0$。为了构造二叉树，我们将期权期限分成 4 个长度为 3 个月的时间段，因此 $\Delta t=0.25$，这时 $q=r_f$，由式(20-7)得出

$$a = e^{(0.08-0.09)\times 0.25} = 0.9975$$

构造二叉树所用的其他参数分别为

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0618, \quad d = \frac{1}{u} = 0.9418$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0.4642, \quad 1-p = 0.5358$$

用 DerivaGem 产生的二叉树展示在图 20-6 中（节点上面的值代表汇率，下面的值代表期权价值）。期权估计值为 0.071 0 美元。采用 50 步二叉树，DerivaGem 计算的期权价格为 0.073 8；采用 100 步二叉树，DerivaGem 计算的期权价格为 0.073 8。

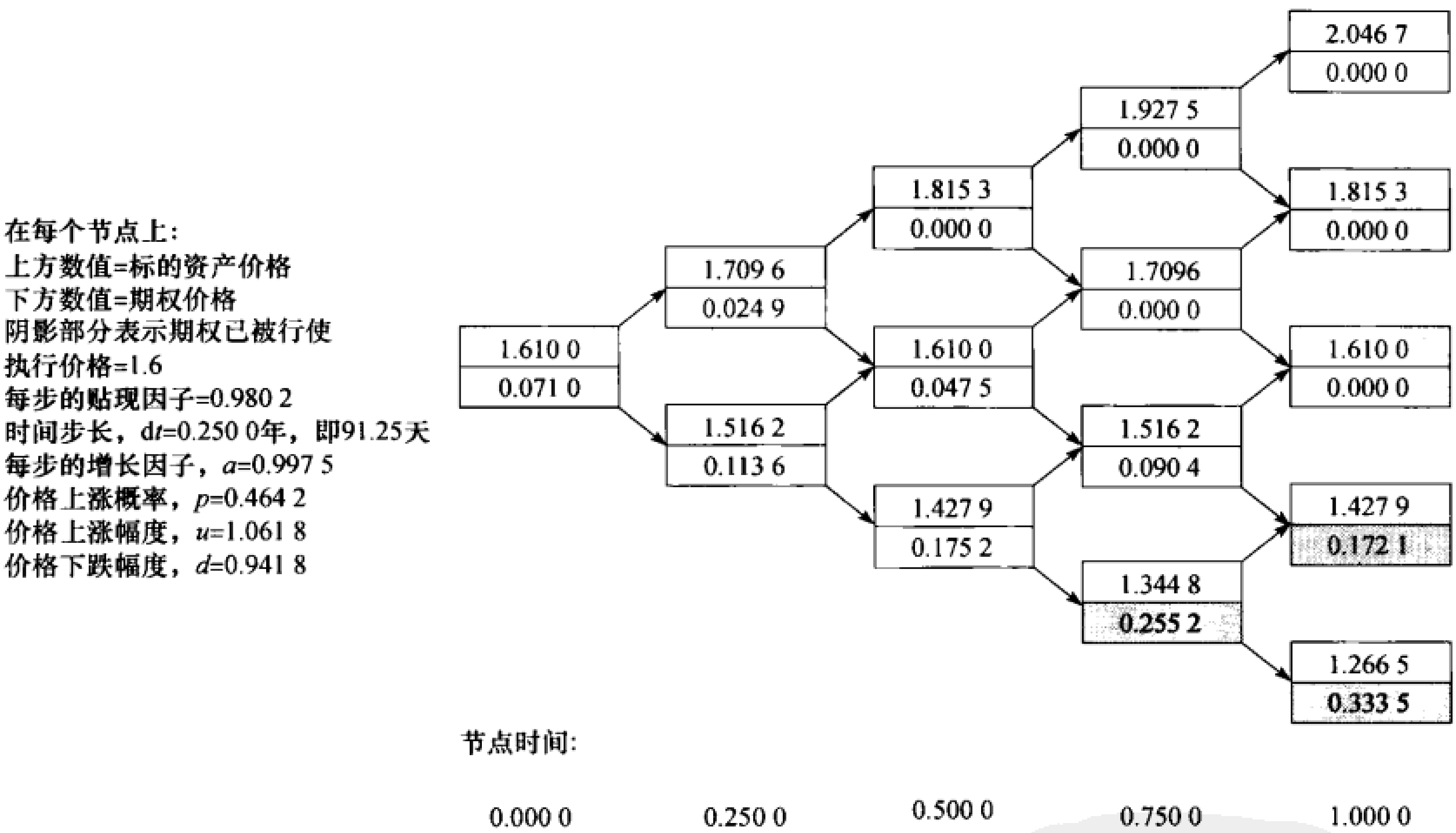


图 20-6　DerivaGem 产生的对于美式货币看跌期权定价的二叉树

20.3　对于支付股息股票的二叉树模型

我们现在考虑一个较为棘手的问题，即如何用二叉树来对支付股息的股票期权定价。像在第 14 章指出的那样，为了易于讨论，**股息**(dividend)一词是指在除息日由于股息而导致股票价格下跌的数量。

20.3.1　股息收益率是已知的情形

在考虑长期限股票期权时，有时为了方便而假定股票支付连续收益率为 q 的股息，对这种期权可以采用和对股指期权同样的方法来定价。

为了更精确，我们可以假设股息是离散支付的。假定股票只付一次股息，而且股息收益率

(即股息为股票价格的百分比)是已知的(见图20-7)。参数 u, d 和 p 与没有股息情形下一样。如果 $i\Delta t$ 是在除息日之前，二叉树上对应这一时间的节点上股票价格为

$$S_0u^jd^{i-j}\quad (j=0,1,\cdots,i)$$

如果 $i\Delta t$ 在除息日之后，那么相应节点上的股票价格为

$$S_0(1-\delta)u^jd^{i-j}\quad (j=0,1,\cdots,i)$$

其中 δ 为股息收益率。我们可以采用同样的办法来处理在期权有效期内有多个已知股息收益率的情形。如果 δ_i 为0时刻到 $i\Delta t$ 时刻之间的所有除息日的总股息收益率，那么 $i\Delta t$ 时刻节点上的股票价格为

$$S_0(1-\delta_i)u^jd^{i-j}$$

20.3.2 已知股息数量的情形

在某些情形下，尤其是当期权的期限很短时，最符合现实的做法是假设已知股息支付的数量而不是股息收益率。假设股票波动率 σ 为常数，二叉树的形状如图20-8所示。这时树将会不再重合，这意味着如果股票多次支付股息的话，所要估算的节点数量可能会变得很大。假设只有一次股息，而且除息日是介于 $k\Delta t$ 与 $(k+1)\Delta t$ 之间，股息数量为 D。当 $i\leqslant k$ 时，在 $i\Delta t$ 时刻节点上的股票价格为

$$S_0u^jd^{i-j}\quad (j=0,1,2,\cdots,i)$$

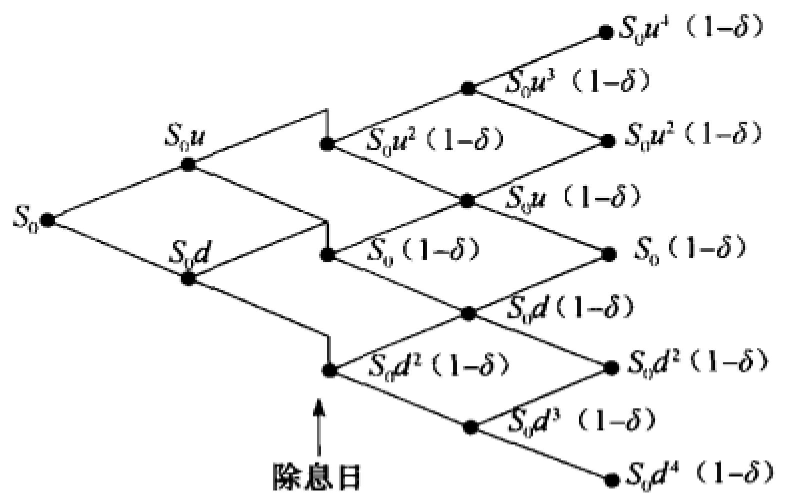


图20-7 当在某指定时刻支付一定股息收益率的股票的二叉树

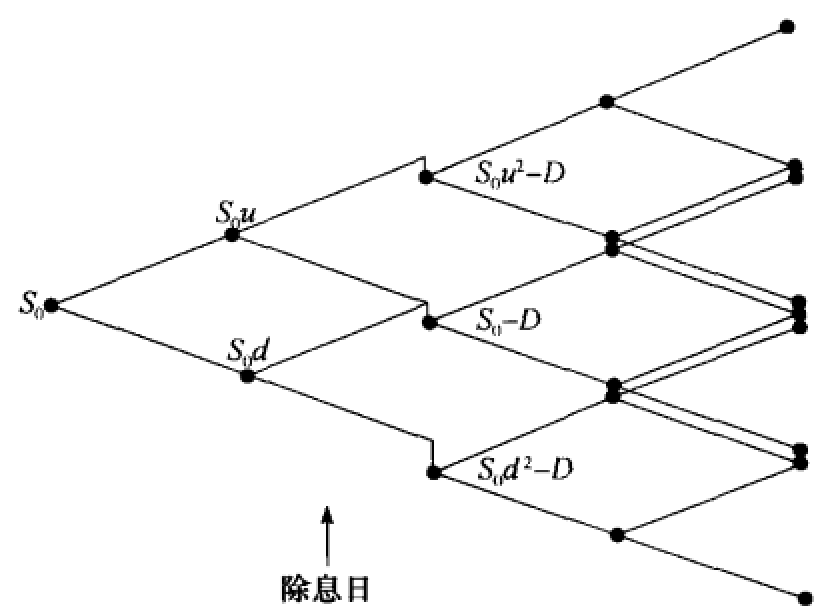


图20-8 当假设已知股息数量并且假设波动率为常数的股票的二叉树

这与以前所述的股价相同。当 $i=k+1$ 时，相应节点上的股票价格为

$$S_0u^jd^{i-j}-D\quad (j=0,1,2,\cdots,i)$$

当 $i=k+2$ 时，相应节点上的股票价格为

$$(S_0u^jd^{i-1-j}-D)u\quad 及\quad (S_0u^jd^{i-1-j}-D)d$$

其中，$j=0,1,2,\cdots,i-1$。因此，在 $i\Delta t$ 时刻总共有 $2i$ 个而不是 $i+1$ 个结点。当 $i=k+m$ 时，在 $i\Delta t$ 时刻总共有 $m(k+2)$ 个结点，而不是 $k+m+1$ 个结点。如果在期权期限内有多个除息日，那么节点数量会增长得更快。

为解决这一问题，我们可以像在14.12节中对欧式期权的分析那样来简化。假设股票价格含有两个部分：一部分为不确定，另一部分为期权有效期内的股息的贴现值。像以前那样，假定在期权有效期内只有一个除息日 τ，并且 $k\Delta t\leqslant\tau\leqslant(k+1)\Delta t$。在 $i\Delta t$ 时刻，股票的不确定部分价格 S^* 为

$$S^*=S,\quad 当\ i\Delta t>\tau$$

及

$$S^* = S - De^{-r(\tau - i\Delta t)} \quad \text{当 } i\Delta t \leqslant \tau$$

式中 D 为股息。令 σ^* 为 S^* 的波动率，并假设为常数[⊖]。参数 p，u 及 d 可由式(20-4)、式(20-5)、式(20-6)及式(20-7)来计算(用 σ^* 替代 σ)。这样我们可以采取通常的办法来构造模拟 S^* 的二叉树。在每个节点上把将来股息(如果有的话)的贴现值加回到股票价格上，我们可以将二叉树转化成模拟原股票价格 S 的二叉树。假定 S_0^* 为 S^* 在初始时的价格，在 $i\Delta t$ 时刻，若 $i\Delta t < \tau$，股票价格为

$$S_0^* u^j d^{i-j} + De^{-r(\tau - i\Delta t)} \quad (j = 0, 1, \cdots, i)$$

若 $i\Delta t > \tau$，股票价格为

$$S_0^* u^j d^{i-j} \quad (j = 0, 1, \cdots, i)$$

这种方法的优点是与 14.12 节欧式期权定价方法一致，而且该方法成功地将二叉树变成了重合状态，即在 $i\Delta t$ 时刻只有 $i+1$ 个节点。我们可以把这种方法推广到多次股息的情形。[⊜]

【例 20-5】 考虑一个期限为 5 个月的股票看跌期权，预计在期权有效期内股票将支付 2.06 美元股息。股票初始价格为 52 美元，执行价格为 50 美元，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 40%，股票除息日在 3.5 个月后。

我们首先构造关于 S^* 的二叉树，这里 S^* 等于原股票价格减去期权有效期内未来股息的贴现值。股息的贴现值为

$$2.06e^{-0.2917 \times 0.1} = 2.00$$

因此，S^* 的初始值为 50。假定 S^* 的波动率为每年 40%。图 20-3 给出了 S^* 的二叉树(S^* 的初始值与波动率与构成图 20-3 的股票价格的初始值及波动率相同)。在每个节点上加上股息的现值就可以得出关于股票价格 S 的二叉树，如图 20-9 所示。与图 20-3 一样，树上每个节点上涨的概率为 0.507 3，下跌的概率为 0.492 7。按通常的方式在二叉树上向后反推，即可得出期权价格，即 4.44 美元(利用 50 步二叉树时，DerivaGem 给出的期权值是 4.202，取 100 步时，给出的值是 4.212)。

20.3.3 控制变量技术

在对美式期权定价时，我们可以采用一种被称为**控制变量技术**(control variate technique)的方法[⊜]，这一方法用同一个树形来计算美式期权价值 f_A 及其相应的欧式期权价格 f_E。我们同时也采用布莱克-斯科尔斯-默顿模型来计算欧式期权价格 f_{BS}。假设由树形得出的欧式期权误差与树形所得出的美式期权误差是相同的。因此，美式期权的估计值为 $f_A + f_{BS} - f_E$。

为了说明这一方法，我们利用图 20-10 来对图 20-3 中的例子进行定价。在欧式期权的假设下，图 20-3 所得出价格为 4.38 美元。由布莱克-斯科尔斯-默顿模型计算出的欧式期权的真实价格为 4.08 美元，图 20-3 给出美式期权的估计值为 4.49 美元，因此由控制变量技术估计的美式期权价格为 4.49 + 4.08 − 4.32 = 4.25 美元。采用 100 步的二叉树可以得出对美式期权一个比较好的估计值为 4.278。因此在这一例子中，控制变量技术所得的结果比二叉树估计值(即 4.49)的精度确实有了显著的提高。

控制变量技术实际上是采用树形来计算欧式与美式期权的差值，而非美式期权本身的价格。我们在本章后面讨论蒙特卡罗法时，将给出控制变量技术的另一个应用。

⊖ 从理论上讲，σ^* 会稍微小于股票 S 波动率 σ。在实践中，从业人员使用隐含波动率结构从而使区分 σ 和 σ^* 变得没有必要。

⊜ 对于存在多次股息的长期限期权，我们不太容易预测这些股息，而且股息贴现值成了 S_0 的一个重要部分，此时进行已知股息收率的假设更为合适。

⊜ 见 J. C. Hull and A. White, "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23 (September 1988): 237-251。

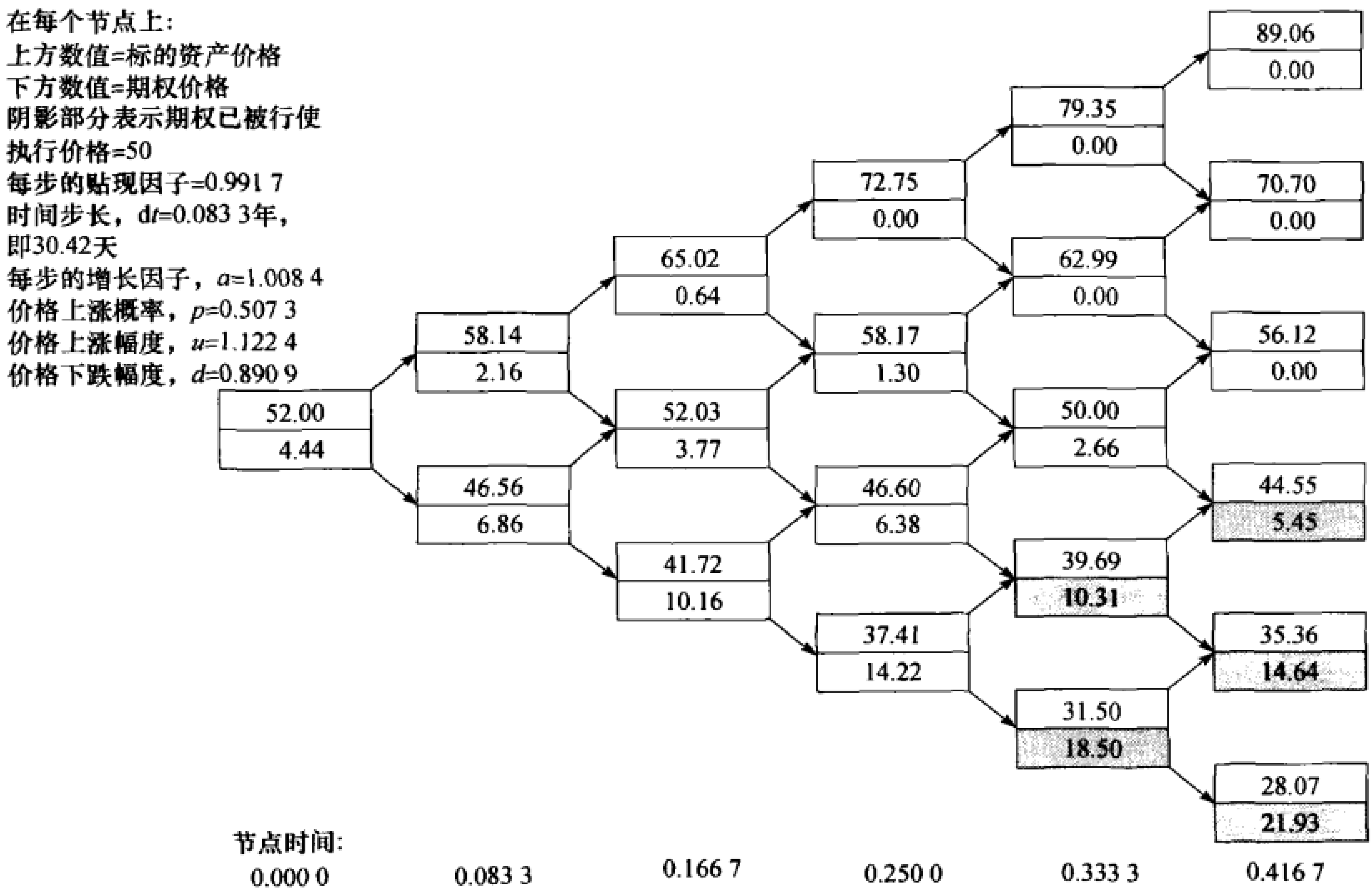


图 20-9　对于例 20-5 由 DerivaGem 产生的树形结构

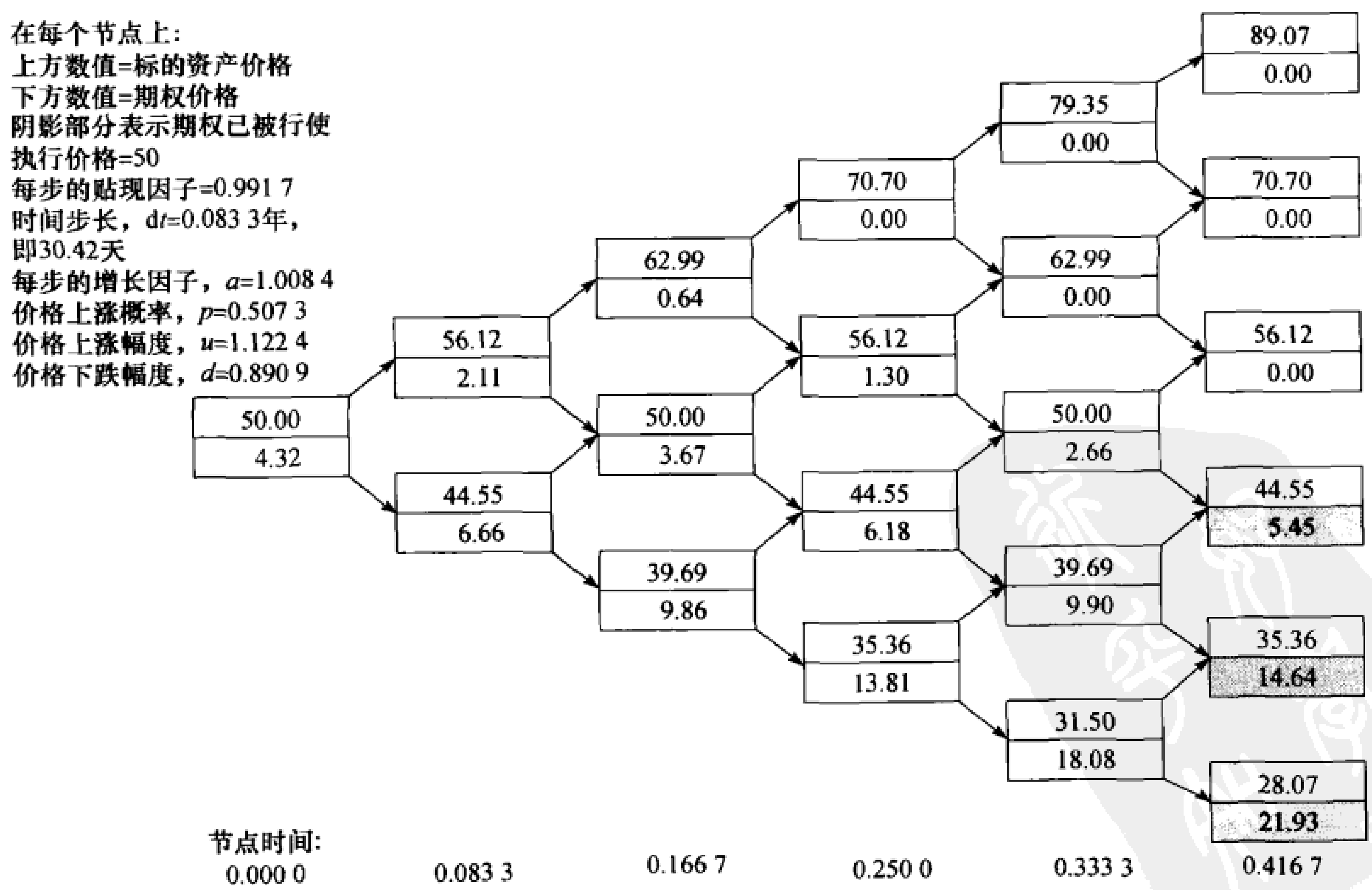


图 20-10　由 DerivaGem 生成的图 20-3 所示的欧式期权的树形结构

注：在每个节点上，上面数值为股票价格，下面的数值为期权价格。

20.4 构造树形的其他方法

考克斯、罗斯及鲁宾斯坦(CRR)方法并不是构造二叉树的唯一方法。我们可以令 $p=0.5$ 来代替式(20-2)和式(20-3)中 $u=1/d$ 这一假设。当忽略 Δt 的高阶项后，我们可以得出方程的解如下

$$u = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

这样即可以构造 $p=0.5$ 的树形来对股票、股指、外汇、期货的期权进行定价的二叉树。

这种构造树形的方法与考克斯、罗斯及鲁宾斯坦(CRR)的方法相比具有许多的优点。无论 σ 取什么值或步长是多少[⊖]，树的概率总是 $p=0.5$。缺点是在这种树形上如何计算 Delta、Gamma、Rho 并不明显，因为初始的股票价格不再是树形的中心。

【例 20-6】 某汇率 9 个月期限的美式期权的执行价格为 0.795 0。当前的汇率为0.790 0，国内无风险利率为每年 6%，外国无风险利率为每年 10%，汇率的波动率为 4%，这时 $S_0=0.79$，$K=0.795$，$r=0.06$，$r_f=0.10$，$\sigma=0.04$ 及 $T=0.75$。我们取 $\Delta t=0.25$(3 步)，而且二叉树上每个分支的概率为 0.5，因此

$$u = e^{(0.06-0.10-0.0016/2)\times 0.25+0.04\sqrt{0.25}} = 1.0098$$

$$d = e^{(0.06-0.10-0.0016/2)\times 0.25-0.04\sqrt{0.25}} = 0.9703$$

汇率二叉树如图 20-11 所示。由该二叉树得出的期权价格为 0.002 6。

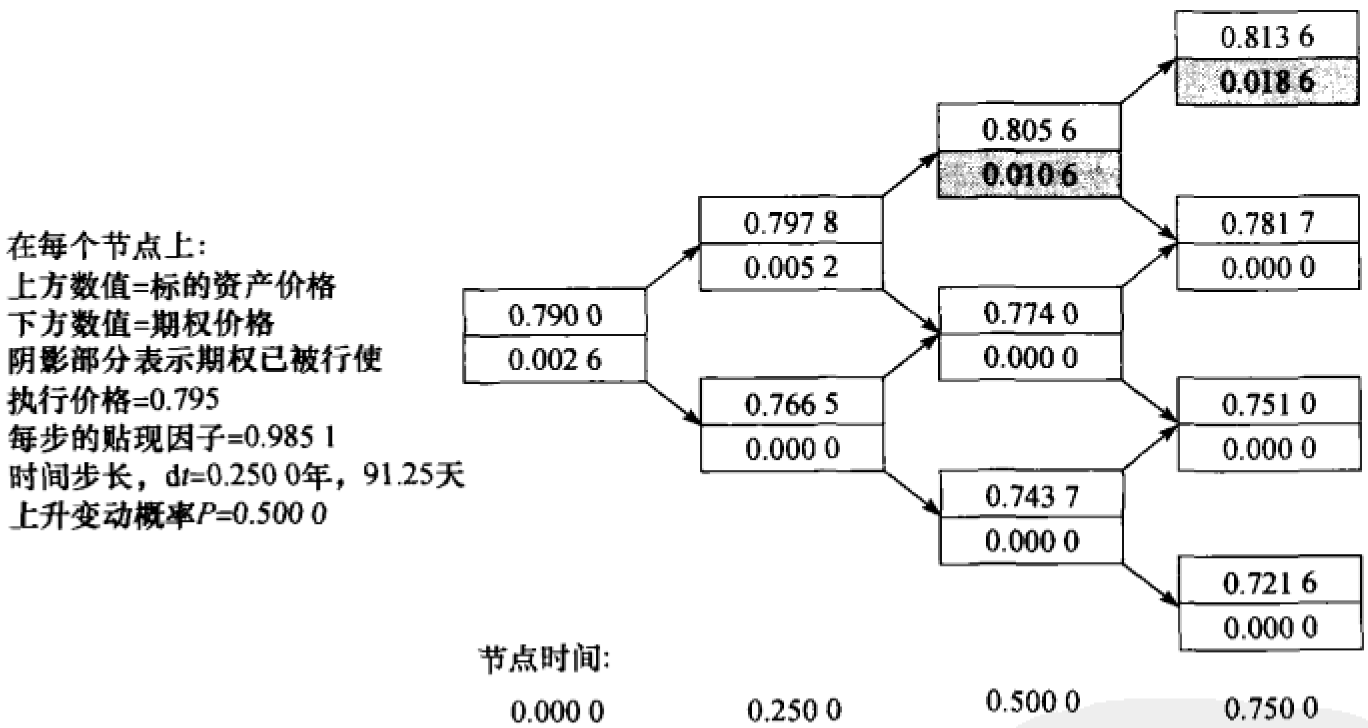


图 20-11 外汇上美式看涨期权定价二叉树，节点上面的数值为汇率，下面的数值为期权价格，所有的概率均为 0.5

三叉树

三叉树可用来替代二叉树。三叉树的一般形式见图 20-12。假定在树形的每个节点上价格变化为上升、取中间值、下降的概率分别为 p_u，p_m 和 p_d，树形的步长为 Δt。假定股票支付股息收益率 q，当我们忽略 Δt 的高阶项时，以下参数可以保证树形的均值和标准差与股票价格的均值和标准差相吻合

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}},\quad d = \frac{1}{u}$$

⊖ 当时间步骤很大，使得 $\sigma < \left|(r-q)\sqrt{\Delta t}\right|$ 时，考克斯、罗斯及鲁宾斯坦二叉树将会是负的概率。但这里描述的方法没有这些缺点。

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}, \quad p_m = \frac{2}{3}, \quad p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}$$

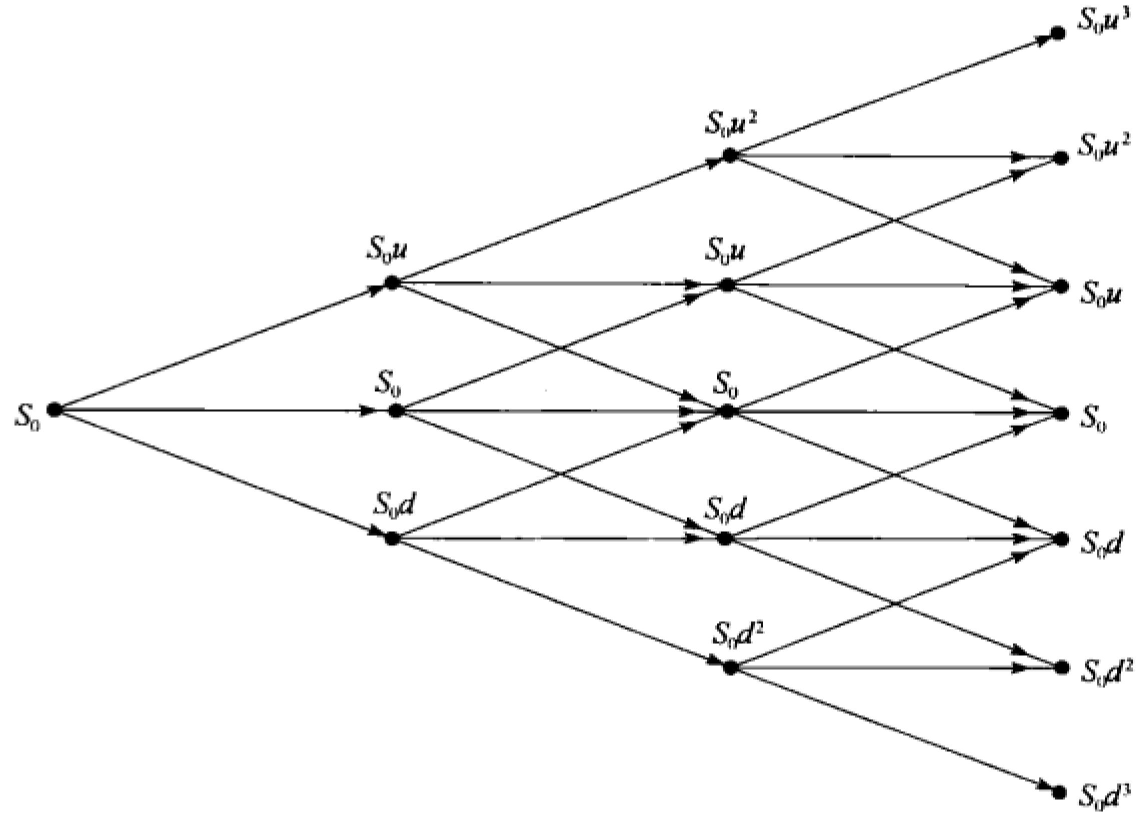


图 20-12 股票价格的三叉树

三叉树的计算过程与二叉树类似，计算由树尾倒推到树的起点。在每一个节点，我们需要计算行使期权的价值与继续持有期权的价值，继续持有期权的价值等于

$$e^{-r\Delta t}(p_u f_u + p_m f_m + p_d f_d)$$

式中 f_u、f_m 和 f_d 分别为在接下一步节点上对应于价格上升、取中间值和下降时的期权价格。可以证明，三叉树与 20.8 节讨论的显式差分方法等价。

Figlewski 和 Gao 提出了一种改进三叉树的方法，这一方法被称为**自适应网格模型**（adaptive mesh model）。在资产价格的重要区域，该模型自动由粗网格（Δt 较大）的树形产生细网格（Δt 较小）的树形[㊀]。当对一个一般的美式期权定价时，在期权接近满期时，在资产价格接近执行价格的区域中加入细网格是最有效的。

20.5 参数依赖于时间的情形

到目前为止，我们一直假定 r、q、r_f 和 σ 均为常数，在实际中，这些参数往往与时间有关，在时间 t 与 $t+\Delta t$ 之间，这些参数被设定为其远期价值[㊁]。

在 CRR 二叉树上，为了将 r 和 q（或 r_f）设定为时间的函数，在时间 t 的节点上设定

$$a = e^{[f(t)-g(t)]\Delta t} \tag{20-11}$$

其中 $f(t)$ 为介于 t 与 $t+\Delta t$ 的远期利率，$g(t)$ 为 q 介于 t 与 $t+\Delta t$ 的远期值。因为 u 和 d 与 a 无关，所以这一假设并不改变二叉树的形状。从时刻 t 节点上生出树叉的概率同以前一样[㊂]，即

$$p = \frac{e^{[f(t)-g(t)]\Delta t} - d}{u - d} \tag{20-12}$$

㊀ 见 S. Figlewski and B. Gao, "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, 53(1999): 313-351。

㊁ 远期收益率和远期方差率的计算方式与远期利率类似（方差率为波动率的平方）。

㊂ 对于足够大时间步数，这些概率永远为正。

$$1-p=\frac{u-e^{[f(t)-g(t)]\Delta t}}{u-d}$$

二叉树方法中的其他步骤和前面介绍的一样，唯一不同之处为从 $t+\Delta t$ 到 t 贴现时我们要用 $f(t)$。

具有挑战性的情形是 σ 为时间函数时建立二叉树。一种方法是使得时间步长与方差率成反比，树形上的 u 和 d 不变，这就保证了树的**再重合**(recombine)。假定 $\sigma(t)$ 为期限 t 的波动率，即 $\sigma^2(t)t$ 为到时间 t 的累计方差。定义 $V=\sigma(T)^2T$，其中 T 为树形的期限。定义 t_i 为第 i 步对应的时间。假定树形共有 N 步。我们可以选择 t_i 而保证 $\sigma(t_i)^2t_i=iV/N$。由此得出，对于任意 i 从时间 t_{i-1} 到时间 t_i 之间价格变化的方差为 V/N。

在三叉树中，我们可以采用一个一般过程来保证树形本身与利率和波动率保持吻合[见作者网页上的技术报告(Technical Note 9)]。

20.6 蒙特卡罗模拟法

我们现在讨论蒙特卡罗模拟法，该方法与二叉树法很不相同。业界事例 20-1 是关于如何在 Excel 中以蒙特卡罗随机抽样的思想来计算 π 的简单程序。

业界事例 20-1　利用蒙特卡罗方法计算 π

假定图 20-13 中的方块的每一个边的长度均为 1。假设你向这一方块随机地投掷梭标，并随后计算梭标落在圆圈中的比率。这样做，你会取得什么结果呢？方块的面积为 1.0，圆圈的半径为 0.5。圆圈的面积为 π 乘以半径的平方，即 $\pi/4$。因此，梭标落在圆圈的比率应等于 $\pi/4$。由此得出 π 的估计值应等于 4 乘以梭标落在圆圈的比率。

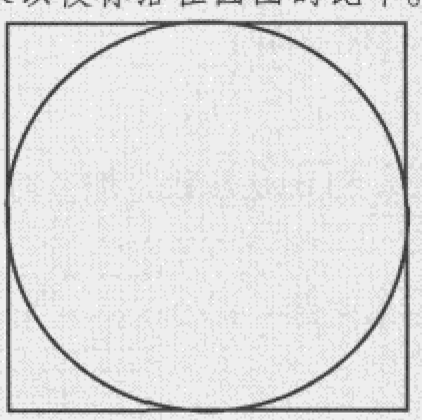


图　20-13

我们可以采用 Excel 计算表来模拟表 20-1 中的梭标投掷的情形。我们令计算表的元素 A1 和 B1 分别为 =RAND()。因此，A1 和 B1 为 0 ~ 1之间的随机数，这两个随机数分别定义了梭标落下的靠右以及靠上的位置，随后我们定义计算表的元素 C1 为

= IF((A1 − 0.5)^2 + (B1 − 0.5)^2 < 0.5^2,4,0)

当梭标落在圆圈内时，C1 =4；否则 C1 =0。

然后，我们令接下来的 99 行执行与第一行类似的指令(在 Excel 选用指令“select and drag”)。定义 C102 为 = AVERAGE(C1: C100)和 C103 为 = STDEV(C1: C100)，C102(在表 20-1 中为 3.04)是由 100 次随机抽样所计算出的 π 的估计值，C103 是估算值的标准差。由例 20-7 可以看出，从标准差出发，我们可以检测估计值的准确性。增大抽样次数会增加准确度，但模拟法的收敛准确值 3.141 59的速度很慢。

表 20-1　业界事例 20-1 中的计算表

	A	B	C
1	0.207	0.690	4
2	0.271	0.520	4
3	0.007	0.221	0
⋮	⋮	⋮	⋮
100	0.198	0.403	4
101			
102		平均数	3.04
103		标准差	1.69

在计算期权价格时，蒙特卡罗模拟采用了风险中性理论。在风险中性世界里，我们首先随机产生标的资产价格的路径，并由此来取得收益的期望值，然后我们再对其以无风险利率进行贴

现。考虑某个与市场变量 S 有关的衍生产品，该衍生产品在 T 时刻产生收益。假定利率为常数，我们可以进行以下过程来对衍生产品进行定价。

- 在风险中性世界里对变量 S 的路径抽样。
- 计算衍生产品的收益。
- 重复第一步和第二步以取得许多该衍生产品的收益的样本。
- 计算收益的均值，该均值即为衍生产品在风险中性世界里期收益期望值的估计值。
- 以无风险利率对衍生产品的收益期望值进行贴现，所得结果即为衍生产品价格的估计值。

假定在风险中性世界，标的市场变量服从以下过程

$$dS = \hat{\mu}Sdt + \sigma Sdz \tag{20-13}$$

式中 dz 是一个维纳过程，$\hat{\mu}$ 为标的变量在风险中性世界里的收益率期望，σ 为波动率[1]。为了模拟变量 S 的路径，我们可以将期权的期限分割成 N 个长度为 Δt 的小区间，并采用下式来对式(20-13)进行近似

$$S(t+\Delta t) - S(t) = \hat{\mu}S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{20-14}$$

式中 $S(t)$ 是 S 在 t 时刻的值，ε 是期望值为0，标准差为1.0的正态分布中的抽样。这可以使得我们从 S 的初始值计算出 S 在 Δt 时的值，并从 Δt 的值计算出 S 在 $2\Delta t$ 的值，等等。在13.3节里我们曾对这一过程进行过描述。每个模拟样本都需要通过对正态分布进行 N 次抽样来构造 S 的整个路径。

在实际中，对 $\ln S$ 进行抽样通常比对 S 进行抽样更为准确。由伊藤引理，$\ln S$ 服从的过程为

$$d\ln S = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz \tag{20-15}$$

因此

$$\ln S(t+\Delta t) - \ln S(t) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

其等价形式为

$$S(t+\Delta t) = S(t)\exp\left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right] \tag{20-16}$$

以上方程可用于产生 S 的路径。

对 $\ln S$ 而不是对 S 进行模拟的结果会更精确。而且，如果 $\hat{\mu}$ 和 σ 是常数，那么对于所有的期限 T[2]，

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}$$

因此

$$S(T) = S(0)\exp\left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}\right] \tag{20-17}$$

以上方程可用于计算在 T 时刻提供非标准收益的衍生产品的定价。如业界事例20-2所示，它也可用来检验布莱克-斯科尔斯-默顿公式。

蒙特卡罗法的主要优点在于既可用于当收益只依赖于标的变量 S 最终值的情形，又可用于收益依赖于标的变量 S 路径的情形（例如，该方法可用于收益依赖于 S 在 O 和 T 之间平均值的情

---

[1] 如果 S 为无股息股票的价格，那么 $\hat{\mu}=r$；如果 S 为汇率，那么 $\hat{\mu}=r-r_f$；等等。注意，如12.7节所述，风险中性世界的波动率等于现实世界的波动率。

[2] 与之相比，式(20-14)只有在 Δt 趋于0时才正确。

形）。衍生产品的收益可能发生在期限内的若干时间点，而不是全在期限的末尾。任何关于 S 的随机过程均可以采用这一方法。马上我们将要说明，这里所描述的过程可用于收益与若干标的变量有关的情形。蒙特卡罗法的缺点在于该方法的计算速度较为缓慢，并且当期权可以被提前行使时，这一方法不太容易应用[⊖]。

业界事例 20-2 在 Excel 上检验布莱克-斯科尔斯-默顿公式

对于欧式看涨期权，我们可以采用步数很大的二叉树模型来检验布莱克-斯科尔斯-默顿公式的正确性。另外一种检验布莱克-斯科尔斯-默顿公式的正确性的方法是蒙特卡罗模拟法。表 20-2 是一个 Excel 计算表，计算表的元素 C2，D2，E2，F2 和 G2 分别代表 S_0，K，r，σ 和 T。计算表的元素 D4，E4 和 F4 分别用于计算 d_1，d_2 和期权价格。

NORMSINV 可用于计算标准正态分布的逆分布函数，因此，NORMSINV(RAND()) 给出了一个服从标准正态分布的一个抽样。我们令 A1 为 =$C$2*EXP(($E$2 -$F$2*$F$2/2)*$G$2 +$F$2* NORMSINV(RAND())*SQRT($G$2))

以上计算给出了股票在 T 时刻的抽样值。我们在接下的 999 行进行同样的操作（采用 Excel 中的"select and drag"指令）。定义 B1002 为 = AVERAGE(B1: B1000)，B1003 为 STDEV(B1: B1000)。B1002（在计算表中为 4.98）即为期权价格的估计，这一估计与布莱克-斯科尔斯-默顿价格差价不大。由例 20-8 我们可以得出，B1003 可用于检测计算估计的准确性。

表 20-2 采用蒙特卡罗法来检验布莱克-斯科尔斯-默顿公式

	A	B	C	D	E	F	G
1	45.95	0	S_0	K	r	σ	T
2	54.49	4.38	50	50	0.05	0.3	0.5
3	50.09	0.09		d_1	d_2	BSM 价格	
4	47.46	0		0.223 9	0.011 8	4.817	
5	44.93	0					
⋮	⋮	⋮					
1000	68.27	17.82					
1001							
1002	均值：	4.98					
1003	标准差：	7.68					

20.6.1 多个标的变量的情形

13.5 节曾讨论相关随机过程考虑衍生产品收益与 n 个变量 $\theta_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 有关的情形。定义 s_i 为 θ_i 的波动率，$\hat{m}_i$ 为 θ_i 在风险中性世界里的增长率期望，ρ_{ik} 为 θ_i 与 θ_k 的**瞬时相关系数**（instantaneous correlation）[⊜]。与单个标的变量的情形相似，我们将期权的期限分割成 N 个长度为 Δt 的小的子时间。θ_i 随机过程的离散形式为

$$\theta_i(t+\Delta t)-\theta_i(t)=\hat{m}_i\theta_i(t)\Delta t+s_i\theta_i(t)\varepsilon_i\sqrt{\Delta t} \tag{20-18}$$

式中 ε_i 为正态分布变量的一个随机样本。ε_i 与 ε_k 的相关系数为 $\rho_{ik}(1\leqslant i;\ k\leqslant n)$。每一次路径的

⊖ 如第 26 章所述，一些研究人员已经提出了一些将蒙特卡罗模拟用于美式期权定价方法。

⊜ 注意，变量 S_i、$\hat{m}_i$ 和 ρ_{ik} 并不一定为常数；它们可以与 Q_i 有关。

抽样需要 N 个从多元正态分布中所提取关于 $\varepsilon_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的样本。然后代入式(20-18)后可产生 θ_i 的路径，由此我们可以计算衍生产品的样本值。

20.6.2 由正态分布中抽样

如业界事例 20-2 所示，Excel 中的指令 = NORMSINV(RAND())可以用来产生一元标准正态分布的随机样本。

当需要产生相关的二元相关正态随机变量 ε_1，ε_2 的随机样本时，我们可以采用如下步骤，我们可以像以上说明的那样首先生成两个服从正态分布并且相互独立的随机样本 x_1 和 x_2，然后采用以下关系式即可生成我们所需要的随机样本

$$\varepsilon_1 = x_1$$

$$\varepsilon_2 = \rho x_1 + x_2\sqrt{1-\rho^2}$$

式中 ρ 为相关系数。

现在考虑如何产生 n 元联合正态分布的随机抽样，这里变量 i 与变量 j 的相关系数为 ρ_{ij}。首先由一元标准正态分布生成 n 个相互独立的随机样本 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$，然后可以将所需要的随机样本 $\varepsilon_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 定义成

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \alpha_{11}x_1\\ \varepsilon_2 &= \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2\\ \varepsilon_3 &= \alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\alpha_{33}x_3\end{aligned}\right\}\tag{20-19}$$

等，选取系数 α_{ij} 使得这些变量有正确的相关系数和方差。这些系数可以通过递推方式来求得。令 $\alpha_{11}=1$；选择 α_{21}，使 $\alpha_{21}\alpha_{11}=\rho_{21}$；选择 α_{22} 使 $\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2=1$；选择 α_{31}，使 $\alpha_{31}\alpha_{11}=\rho_{31}$；选择 α_{32}，使 $\alpha_{31}\alpha_{21}+\alpha_{32}\alpha_{22}=\rho_{32}$；选择 α_{33}，使 $\alpha_{31}^2+\alpha_{32}^2+\alpha_{33}^2=1$；等等[⊖]。这里描述的过程被称为**乔里斯基分解**(Cholesky decomposition)。

20.6.3 模拟次数

蒙特卡罗法计算结果的精度与模拟的次数有关。在蒙特卡罗模拟法中，我们通常在计算收益贴现的期望值外，还要计算标准差。将期望值和标准差分别由 μ 和 ω 表示。变量 μ 即为衍生产品价值的估计，这一估计值的标准误差为

$$\frac{\omega}{\sqrt{M}}$$

式中 M 为模拟次数。衍生产品价格 f 的 95% 置信区间为

$$\mu-\frac{1.96\omega}{\sqrt{M}}<f<\mu+\frac{1.96\omega}{\sqrt{M}}$$

这说明衍生产品价格的不确定性与模拟次数的平方根成反比。如果想将精度提高一倍，我们必须将模拟次数提高 4 倍；如果想将精度提高 10 倍，必须将模拟次数提高 100 倍，等等。

【例 20-7】 在表 20-1 中，π 是 100 个数字的平均，标准差为 1.69。这时，$\omega=1.69$，$M=100$，因此计算结果的标准误差为 $1.69/\sqrt{100}=0.169$。计算表给出的关于 π 的 95% 置信区间为($3.04-1.96\times0.169$)至($3.04+1.96\times0.169$)，即 2.71 ~ 3.37(精确值 3.141 59 落在置信区间内)。

【例 20-8】 在表 20-2 中，期权价格是 1 000 个数字的平均值，标准差为 7.68。这时，$\omega=7.68$，

⊖ 如果关于 α 的方程没有实数解，那么相关性结构一定不具有内部一致性，22.7 节将进一步讨论这一点。

$M=1\,000$，因此计算结果的标准误差为 $7.68/\sqrt{1\,000}=0.24$。计算表给出的关于期权价格的95%置信区间为($4.68-1.96\times0.24$)至($4.68+1.96\times0.24$)，即 4.51 ~ 5.45(布莱克-斯科尔斯-默顿价格为4.817，落在置信区间内)。

20.6.4　通过树形取样

在实现蒙特卡罗法时，除了从假设标的变量所服从的随机过程中抽取样本外，我们也可以从 N 步二叉树中 2^N 个可能路径中来产生样本。假设在一个二叉树上向上移动的概率为 0.6。通过二叉树来抽取随机样本的程序如下：在每个节点，我们在 0 ~ 1 之间进行随机抽样，如果随机数介于 0 ~ 0.4 之间，我们选择向下的分支；如果随机数大于 0.4，我们选择向上的分支。一旦有了从最初的节点到树形末尾的完整路径，我们就可以计算收益，这样就完成了一次抽样。利用类似的程序可以得到更多的样本。按无风险利率贴现后的收益均值就是我们对衍生产品价格的估计。[⊖]

【例20-9】　假定图 20-3 所示的树形结构用于计算收益等于 $\max(S_{ave}-50,\ 0)$ 的期权价格，其中 S_{ave} 为今后 5 个月内股票的平均价格(股票的初始和最终价格也都被用来计算平均值)。这一期权被称为亚式期权。当进行了 10 次抽样后，一种可能的结果如表 20-3 所示。期权的价值等于平均收益以无风险利率贴现后的值。这时，收益平均值为 7.08 美元，无风险利率为 10%，因此期权价格为 $7.08e^{-0.1\times5/12}=6.79$(这里的讨论只是为了说明问题，在实际中，为了取得更加精确的结果，我们应采用更多的时间步数与更多次的模拟试验)。

表 20-3　由图 20-3 中二叉树并利用蒙特卡罗模拟来计算亚式期权的价格

抽样	路径	股票价格的平均值	期权收益
1	UUUUD	64.98	14.98
2	UUUDD	59.82	9.82
3	DDDUU	42.31	0.00
4	UUUUU	68.04	18.04
5	UUDDU	55.22	5.22
6	UDUUD	55.22	5.22
7	DDUDD	42.31	0.00
8	UUDDU	55.22	5.22
9	UUUDU	62.25	12.25
10	DDUUD	45.56	0.00
平均			7.08

注：收益等于平均价格高于 50 美元的数量(U 代表价格上涨；D 代表价格下跌)。

20.6.5　计算希腊值

我们可以采用蒙特卡罗法来计算第 18 章中讨论的希腊值。假定我们想计算 f 对于 x 的偏导数，其中 f 为衍生产品的价格，x 为标的变量的价格或某个参数。首先，我们可以采取一般的蒙特卡罗法来计算衍生产品的价格 $\hat{f}$，然后我们将 x 值增加 Δx，并采用与计算 $\hat{f}$ 类似的方式，我们可以得出一个衍生产品的新价格 $\hat{f}^*$。对冲参数可由以下方程来计算

$$\frac{\hat{f}^*-\hat{f}}{\Delta x}$$

为了减小标准误差，在计算 $\hat{f}$ 和 $\hat{f}^*$ 时，我们选用的时间区间的个数 N、所用的随机样本、模拟运算的次数 M 都必须相同。

20.6.6　应用

当衍生产品涉及 3 个或更多的随机变量时，蒙特卡罗法比其他数值方法的效率更高。这是因

⊖ 关于如何使得树形模拟的过程更加有效，见 D. Mintz, "Less is More," *Risk*, July 1997: 42-45。

为蒙特卡罗的运算量与随机变量的数量呈线性关系，而其他数值方法的运算量与随机变量的数量呈指数关系。蒙特卡罗法的一个优点是可以给出估计值的标准误差，另一个优点是可以处理复杂的收益形式以及复杂的随机过程。再有，蒙特卡罗法可用于收益为变量所遵循的整个路径的函数，而不只是变量最终值函数的情形。

20.7 方差缩减程序

假如像式(20-13)至式(20-18)所述的那样对衍生产品标的变量的随机过程进行模拟，在一般情况下，我们需要做很多次抽样才能使所估计的衍生产品值达到合理的精确度。这从计算时间上讲是非常昂贵的。在本节我们将介绍几种**方差缩减程序**(variance reduction procedure)，利用这些程序可以大大减少计算时间。

20.7.1 对偶变量技术

对偶变量技术(antithetic variable technique)指在每一次模拟抽样时计算衍生产品的两个值。第一个值f_1是按通常的方式计算得出的；第二个值f_2是通过改变所有标准正态分布样本的符号计算得出的(如果ε是用来计算f_1的一个抽样，那么$-\varepsilon$则是计算f_2时相应的抽样)。由此计算出的衍生产品的抽样值等于f_1和f_2的平均值。因为以上两个值中一个高于真实值时，另一个会低于真实值，反之亦然，从而会使得这一方法很有效。

定义$\bar{f}$为f_1和f_2的平均值

$$\bar{f}=\frac{f_1+f_2}{2}$$

衍生产品的价格为所有$\bar{f}$的平均值。如果$\bar{\omega}$为$\bar{f}$的标准差，M为模拟运算的次数(即计算的衍生产品价格的组数)，估计值的标准误差为$\bar{\omega}/\sqrt{M}$，以上的误差量一般会远远小于由$2M$个随机试验所对应的标准误差。

20.7.2 控制变量技术

在对美式期权定价时，我们已经给出了与树形结构并用的**控制变量技术**(control variate technique)的例子(见20.3节)。控制变量技术适用于有两个相似衍生产品A和B的情形。衍生产品A是我们想定价的证券；衍生产品B与A相似并有解析解。计算过程将利用同样的随机样本和Δt同时计算这两个产品的值。第一次模拟得到对于A的估计值f_A^*；第二次模拟得到对于B的估计值f_B^*。下式会给出一个对于A更好的估计

$$f_A=f_A^*-f_B^*+f_B \tag{20-20}$$

式中f_B是由解析公式算出的B的真实值。Hull和White在研究**随机波动率**(stochastic volatility)对于欧式期权价格影响时给出了一个控制变量技术的应用例子[⊖]，在这里，A为在随机波动率假设下的期权，B为在常数波动率假设下的期权。

20.7.3 重点抽样法

说明**重点抽样法**(important sampling)的最佳方法是通过实例。假设我们要为一个执行价格为K，期限为T的深度虚值欧式期权进行定价。如果我们采用通常的办法来对标的资产价格在T的

⊖ 见J. Hull and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42(June 1987): 281-300。

值进行抽样我们得出的大部分路径的终端值都是 0。因为 0 终端值对于期权价格的影响很小，这样做会浪费很多计算时间。因此，我们要尽量选取股票价格在到期日大于 K 的重要路径。

假定 F 是股票价格在到期日 T 的无条件概率分布函数，q 为在到期日股票价格大于 K 的概率，而且已知这一概率的解析式，那么 $G = F/q$ 即为股票价格在大于 K 时的条件概率分布。为了实施重点抽样法，我们在 G 而不是在 F 中进行抽样，期权价格的估计值等于收益贴现后的均值乘以 q。

20.7.4 间隔抽样法

当我们从概率分布中抽取具有代表性的值，而不是随机取值时，一般会得到更高的精确度。**间隔抽样法**(stratified sampling)属于这种方法。假定我们想从概率分布中得到 1 000 个样本，我们可以将分布分割成 1 000 个具有同样概率的区间，然后我们可以从这些小区间中选取具有代表性的数值(均值或中间值)。

对分成 n 个区间的标准正态分布情形，我们可以在第 i 个区间选取的代表值为

$$N^{-1}\left(\frac{i-0.5}{n}\right)$$

式中 N^{-1} 为累计正态分布函数的逆函数。例如，当 $n=4$ 时，4 个区间的代表值分别为 $N^{-1}(0.125)$、$N^{-1}(0.375)$、$N^{-1}(0.625)$、$N^{-1}(0.875)$。函数 N^{-1} 可采用 Excel 的 NORMSINV 函数来进行计算。

20.7.5 矩匹配法

矩匹配法(moment matching)是指对从标准正态分布中抽取的样本进行调整，以使得抽样与第一阶矩、第二阶矩以及其他可能的高阶矩相匹配。假定为了计算某一特定变量在一段时间内的变化而需要从均值为 0，标准差为 1.0 的标准正态分布中进行抽样。假定样本值为 $\varepsilon_i(1 \leqslant i \leqslant n)$。为了使得与前两阶矩相匹配，我们首先需要计算样本值的均值 m 和标准差 s，然后定义调整后的抽样 ε_i^* 如下

$$\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i - m}{s}$$

经调整的样本具有正确的均值 0 与正确的标准差 1.0。最后我们采用这些经调整后的样本进行计算。

矩匹配法会节省计算时间，但这种方法却加重了存储的负担，这是因为所有的样本值均要存储到模拟过程的最后阶段。矩匹配法也被称做**二次再抽样法**(quadratic resampling)，这一方法常常与对偶变量技术结合使用，因为对偶变量技术自动地使所有的奇数矩达到匹配，因此我们只需要在矩匹配法中使得第二阶矩和第四阶矩相匹配即可。

20.7.6 利用伪随机数

伪随机数序列[quasi-random sequency，也称为**低差异序列**(low-discrepancy sequence)]是由概率分布中得出的代表样本组成的序列[㊀]。读者可以在 Brotherton-Ratcliffe 以及 Press 等人的几篇文献中找到关于伪随机数序列的描述和应用[㊁]。伪随机数序列优点在于，由伪随机数序列所得出模

㊀ 伪随机这一术语是不恰当的，伪随机数列实际上具有确定性。

㊁ 见 R. Brotherton-Ratcliffe, "Monte Carlo Motoring," *Risk*, December 1994: 53 – 58; W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2nd edn. Cambridge University Press, 1992.

拟结果的标准差与$1/M$而不仅仅是$1/\sqrt{M}$成正比，这里的M代表模拟次数。

伪随机数模拟与间隔抽样法相似，其目的是寻求具有代表意义的标的变量的抽样值。在间隔抽样法中，我们假定事先已经知道确切的需要抽取样本的数量；伪随机数模拟过程则更加灵活。这种抽样的方式是可以不断地在已经存在的样本之间的间隔里加入更多的样本。因此，在模拟过程的每个阶段，样本点大体上分布于整个概率空间。

图 20-14 显示了由 Sobol 提议的方法所产生的二维伪随机数点[⊖]。我们可以看出，后来抽取的样本总是弥补前面样本所留下的空隙(gap)。

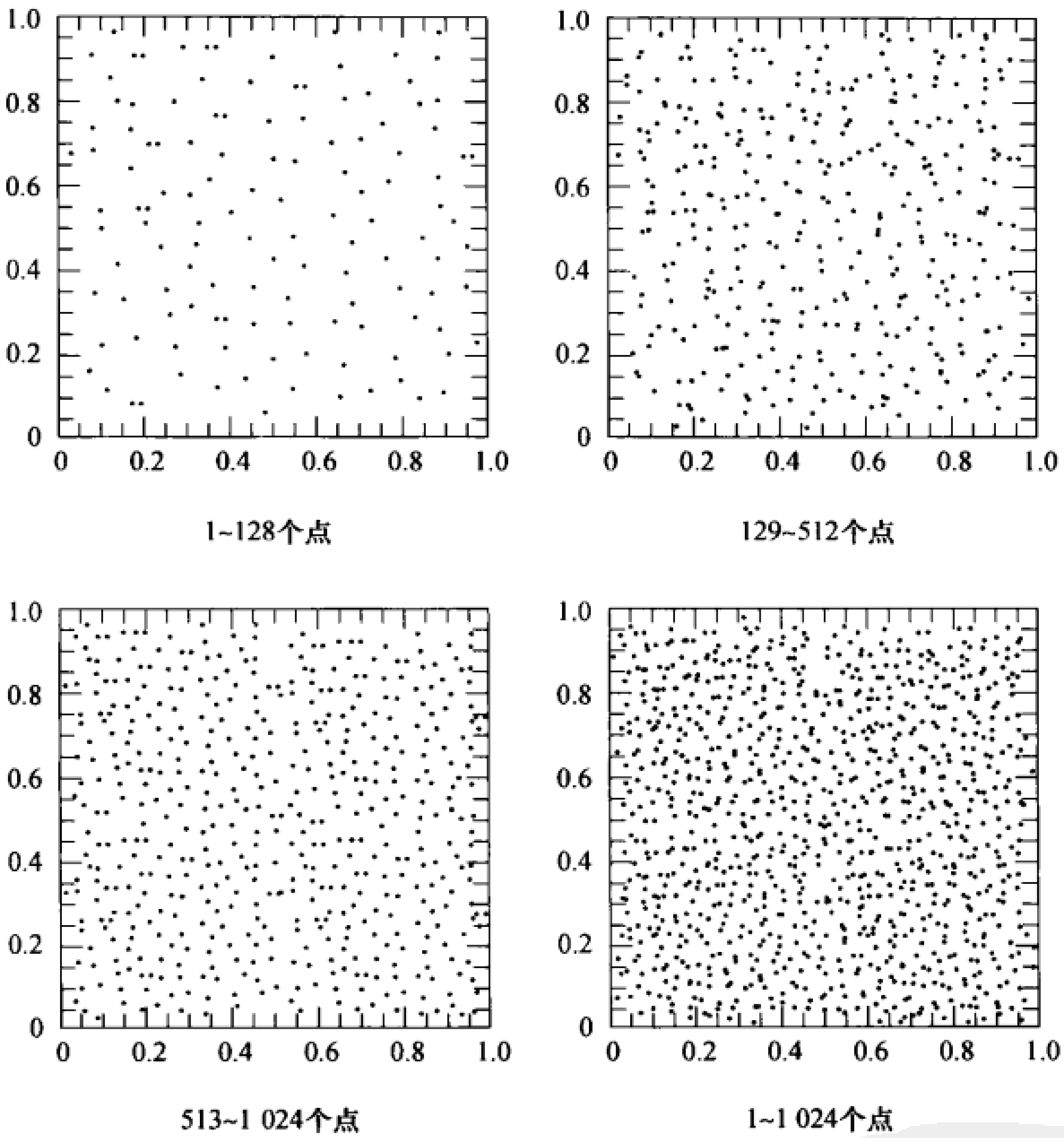


图 20-14 一个 Sobel 序列的前 1 024 个点

20.8 有限差分法

有限差分法(finite difference)通过求解衍生产品价格所满足的微分方程来达到定价的目的，在求解过程中，微分方程被一组差分方程所替代，我们可以通过迭代来求出差分方程的解。

为了说明这种方法，我们考虑如何用它来对一个股息收益率为q的股票的美式看跌期权进行定价。由式(16-6)可知，期权价格满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(r-q)S\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf \tag{20-21}$$

⊖ 见 I. M. Sobol，*USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*，7，4(1967)：86-112. 在 Press 等人(1992)的文章中有关于 Sobel 序列的描述，见上一页下注。

假定期权的期限为 T。我们将这一期限分成 N 个等间隔，长度为 $\Delta t = T/N$ 的时间区间。因此我们需要考虑 $N+1$ 个时间点

$$0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ \cdots,\ T$$

假定 S_{max} 为足够大的股票价格，一旦股票达到这一价格时，看跌期权的价值几乎为 0。我们定义 $\Delta S = S_{max}/M$，并同时考虑 $M+1$ 个股票价格

$$0,\ \Delta S,\ 2\Delta S,\ \cdots,\ S_{max}$$

我们在选取 S_{max} 时保证以上的股票价格中有一个刚好对应于股票的当前价格。

如图 20-15 所示，我们选取的股票价格和时间构成了一个共有 $(M+1)(N+1)$ 个点的网格。网格上的点 $(i,\ j)$ 对应于时间为 $i\Delta t$，股票价格为 $j\Delta S$。我们用变量 $f_{i,j}$ 代表 $(i,\ j)$ 点的期权价格。

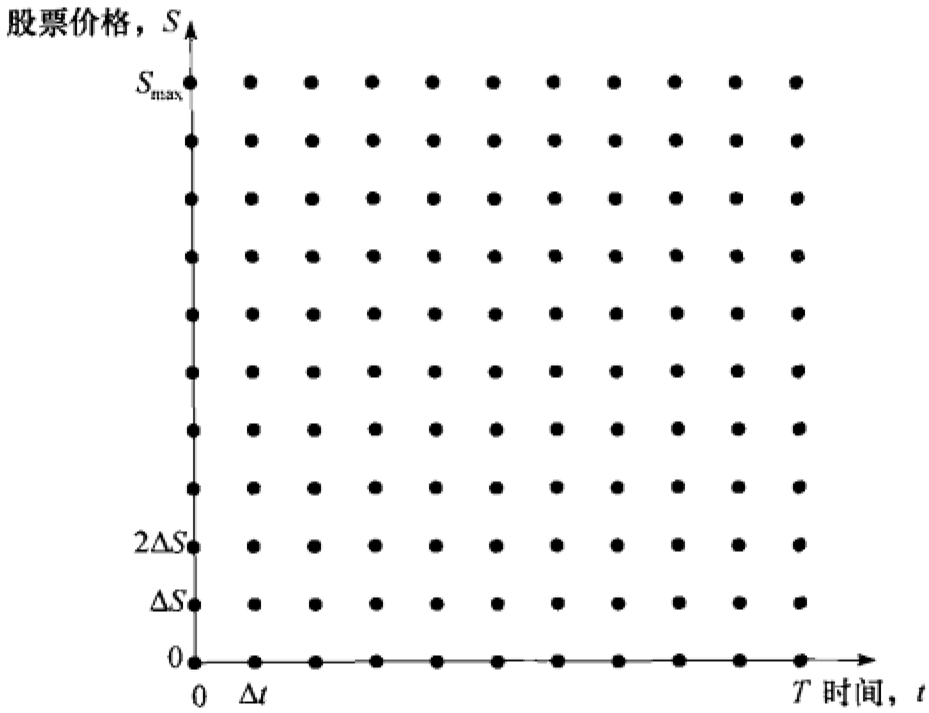


图 20-15　有限差分网格

20.8.1　隐式有限差分法

对于网格内部的点 $(i,\ j)$，$\partial f/\partial S$ 可近似为

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j}}{\Delta S} \tag{20-22}$$

或者

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{f_{i,j}-f_{i,j-1}}{\Delta S} \tag{20-23}$$

式(20-22)被称为**向前差分近似**(forward difference approximation)；式(20-23)被称为**向后差分近似**(backward difference approximation)。将以上两种差分方程平均，我们可以得出一个对称的差分方程

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta S} \tag{20-24}$$

对于 $\partial f/\partial t$，我们将采用向前差分近似使得 $i\Delta t$ 时刻的价值与 $(i+1)\Delta t$ 的价值发生关联

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t} \tag{20-25}$$

下面考虑 $\partial^2 f/\partial S^2$，$(i,\ j)$ 点的 $\partial f/\partial S$ 向后差分近似地由式(20-23)给出。在 $(i,\ j+1)$ 点的 $\partial f/\partial S$ 向后差分近似为

$$\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j}}{\Delta S}$$

因此在 $(i,\ j)$ 点，$\partial^2 f/\partial S^2$ 的有限差分近似为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=\frac{1}{\Delta S}\left(\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j}}{\Delta S}-\frac{f_{i,j}-f_{i,j-1}}{\Delta S}\right)$$

或者

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=\frac{f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-2f_{i,j}}{\Delta S^2} \tag{20-26}$$

将式(20-24)、式(20-25)和式(20-26)代入微分式(20-21)，并且注意到 $S=j\Delta S$，得出

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+(r-q)j\Delta S\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta S}+\frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta S^2\frac{f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-2f_{i,j}}{\Delta S^2}=rf_{i,j}$$

其中$j=1, 2, \cdots, M-1$，$i=0, 1, \cdots, N-1$。将方程进行整理，我们得出

$$a_jf_{i,j-1}+b_jf_{i,j}+c_jf_{i,j+1}=f_{i+1,j} \tag{20-27}$$

其中

$$a_j=\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t-\frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t$$

$$b_j=1+\sigma^2j^2\Delta t+r\Delta t$$

$$c_j=-\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t-\frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t$$

看跌期权在T时刻的价格为$\max(K-S_T, 0)$，其中S_T为股票在T时刻的价格，因此

$$f_{N,j}=\max(K-j\Delta S,0),\quad j=0,1,\cdots,M \tag{20-28}$$

当股票价格为0时，看跌期权的价格为K，因此

$$f_{i,0}=K,\quad i=0,1,\cdots,N \tag{20-29}$$

我们假定当$S=S_{max}$时，期权价格为0，因此

$$f_{i,M}=0,\quad i=0,1,\cdots,N \tag{20-30}$$

式(20-28)、式(20-29)和式(20-30)定义了期权价格在图20-15所示的网格三个边上的值，这三个边分别对应$S=0$，$S=S_{max}$和$t=T$。接下来，我们要采用式(20-27)来计算f在其他节点的取值。当$i=N-1$时，式(20-27)可写为

$$a_jf_{N-1,j-1}+b_jf_{N-1,j}+c_jf_{N-1,j+1}=f_{N,j} \tag{20-31}$$

其中$j=1, 2, \cdots, M-1$。由式(20-28)，我们已知式右端的取值。而且由式(20-29)和式(20-30)我们得出

$$f_{N-1,0}=K \tag{20-32}$$

$$f_{N-1,M}=0 \tag{20-33}$$

式(20-31)同时给出了关于$M-1$个未知量的$M-1$个方程，这些未知量为$f_{N-1,1}$，$f_{N-1,2}$，$\cdots$，$f_{N-1,M-1}$[⊖]。一旦以上未知量确定后，我们将$f_{N-1,j}$与$K-j\Delta S$进行比较。如果$f_{N-1,j}<K-j\Delta S$，那么在这一节点上行使期权为最优，这时我们将$f_{N-1,j}$设定为$K-j\Delta S$。在$T-2\Delta t$时刻上节点可用相似的方式处理，等等。最终，我们可以得出$f_{0,1}$，$f_{0,2}$，$f_{0,3}$，$\cdots$，$f_{0,M-1}$，其中的一个价格即为我们寻求的期权价格。

控制变量技术可与有限差分法并用，在定价过程中，一旦设定时间和标的资产的网格后，我们采用同样的网格来对一个类似的，但具有解析解的期权进行定价，然后我们利用式(20-20)。

【例20-10】 表20-4显示了由隐式方法求出的例20-1中美式看跌期权的数值解。在这里，参数M，N和ΔS分别等于20美元、10美元和5美元。因此，在定价过程中，我们将0美元和100美元之间分成了每5美元一个的价格区间，并同时将期权期限分成了每半个月一个的时间段。由这一网格得出的期权的价格为4.07美元，由同一网格给出的欧式期权的价格为3.91美元，布莱克-斯科尔斯给出的欧式期权的准确值为4.08美元。因此，由控制变量技术得出的美式期权价格的近似值为4.07+4.08−3.91=4.24美元。

⊖ 在求解过程中，我们并不需要对矩阵求逆。式(20-31)在$j=1$时的情形可将$f_{N-1,2}$来由$f_{N-1,1}$表达；在$j=2$时，将方程与$j=1$时的方程并用，可将$f_{N-1,3}$来由$f_{N-1,1}$表达，等等。在$j=M-2$时，将方程与以前的方程并用，可将$f_{N-1,M-1}$来由$f_{N-1,1}$表达。最终对应$j=M-1$的方程可用来对$f_{N-1,1}$求解，一旦$f_{N-1,1}$确定后，我们可以得出$f_{N-1,j}$。

表 20-4 采用隐式差分来计算例 20-1 中美式期权价格的网格

股票价格（美元）	距离到期日的时间(月)										
	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0
100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
95	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
90	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
85	0.09	0.07	0.05	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
80	0.16	0.12	0.09	0.07	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00
75	0.27	0.22	0.17	0.13	0.09	0.06	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00
70	0.47	0.39	0.32	0.25	0.18	0.13	0.08	0.04	0.02	0.00	0.00
65	0.82	0.71	0.60	0.49	0.38	0.28	0.19	0.11	0.05	0.02	0.00
60	1.42	1.27	1.11	0.95	0.78	0.62	0.45	0.30	0.16	0.05	0.00
55	2.43	2.24	2.05	1.83	1.61	1.36	1.09	0.81	0.51	0.22	0.00
50	4.07	3.88	3.67	3.45	3.19	2.91	2.57	2.17	1.66	0.99	0.00
45	6.58	6.44	6.29	6.13	5.96	5.77	5.57	5.36	5.17	5.02	5.00
40	10.15	10.10	10.05	10.01	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
35	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00
30	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
25	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00
20	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00
15	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00
10	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00
5	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00
0	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00

20.8.2 显式有限差分法

隐式差分方法的优点在于其可靠性，当 ΔS 和 Δt 趋于 0 时，由隐式差分方法得出的数值解总是收敛于微分方程的解[⊖]。隐式差分方法的一个缺点在于由 $f_{i+1,j}$ 的值计算 $f_{i,j}$ 时，我们必须同时对 $M-1$ 个方程求解。当假设 $\partial f/\partial S$ 和 $\partial^2 f/\partial S^2$ 的值在点$(i,\ j)$上的值与$(i+1,\ j)$上的值相等时，这一方法可以被简化。因此，式(20-24)和式(20-26)变为

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=\frac{f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}$$

差分方程变为

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+(r-q)j\Delta S\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta S^2\frac{f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}=rf_{i,j}$$

即

$$f_{i,j}=a_j^* f_{i+1,j-1}+b_j^* f_{i+1,j}+c_j^* f_{i+1,j+1} \tag{20-34}$$

其中

$$a_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t\right)$$

⊖ 有限差分法的一个通用的规则是当 ΔS 和 Δt 趋于 0 时，ΔS 应与 $\sqrt{\Delta t}$ 保持比例。

$$b_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t}(1 - \sigma^2 j^2 \Delta t)$$

$$c_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left(\frac{1}{2}(r - q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

这样我们就产生了所谓的**显式有限差分方法**(explicit finite difference method)[⊖]。图 20-16 显示了隐式差分与显式差分的区别。由式(20-27)定义的隐式差分给出了 $i\Delta t$ 时刻的 3 个不同的期权值(即 $f_{i,j-1}$，$f_{i,j}$ 和 $f_{i,j+1}$)与 $(i+1)\Delta t$ 时刻的 1 个期权值(即 $f_{i+1,j}$)之间的关系；由式(20-34)定义的显式差分给出了 $i\Delta t$ 时刻的 1 个不同的期权值(即 $f_{i,j}$)与 $(i+1)\Delta t$ 时刻的 3 个期权值(即 $f_{i+1,j-1}$，$f_{i+1,j}$ 和 $f_{i+1,j+1}$)之间的关系。

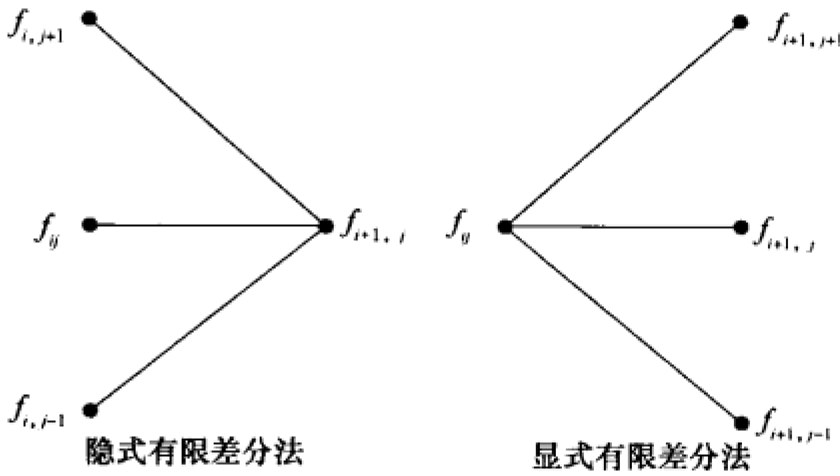


图 20-16　显式差分和隐式差分的区别

【例 20-11】　表 20-5 展示了显式有限差分为例 20-1 中的美式看跌期权定价得出的结果。同例 20-10 一样，参数 M，N 和 ΔS 分别等于 20 美元、10 美元和 5 美元。由网格所得出的期权价格为 4.26 美元[⊜]。

表 20-5　采用显式差分来计算例 20-1 中美式期权价格的网格

股票价格	距离到期日的时间(月)										
(美元)	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0
100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
95	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
90	-0.11	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
85	0.28	-0.05	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
80	-0.13	0.20	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
75	0.46	0.06	0.20	0.04	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
70	0.32	0.46	0.23	0.25	0.10	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
65	0.91	0.68	0.63	0.44	0.37	0.21	0.14	0.00	0.00	0.00	0.00
60	1.48	1.37	1.17	1.02	0.81	0.65	0.42	0.27	0.00	0.00	0.00
55	2.59	2.39	2.21	1.99	1.77	1.50	1.24	0.90	0.59	0.00	0.00
50	4.26	4.08	3.89	3.68	3.44	3.18	2.87	2.53	2.07	1.56	0.00
45	6.76	6.61	6.47	6.31	6.15	5.96	5.75	5.50	5.24	5.00	5.00
40	10.28	10.20	10.13	10.06	10.01	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
35	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00
30	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
25	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00
20	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00
15	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00
10	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00
5	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00
0	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00

⊖ 对于 $\partial f/\partial t$ 采用向后差分近似，而不是向前差分近似，我们同样可以得出显式有限差分法。

⊜ 稍后我们将给出造成网格左手边顶部的负数及其他不一致的部分的原因。

20.8.3 变量替换

如果利用几何布朗运动来描述标的资产价格，在应用有限差分法时以 $\ln S$ 为标的变量比以 S 为标的变量更有效。定义 $Z=\ln S$，式(20-21)变为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial Z}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}=rf$$

这时，为了给衍生产品定价，我们应该针对 Z 设定等距离网格，而不是针对 S 设定等距离网格。在隐式法中，微分方程变为

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta Z}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-2f_{i,j}}{\Delta Z^2}=rf_{i,j}$$

即

$$\alpha_j f_{i,j-1}+\beta_j f_{i,j}+\gamma_j f_{i,j+1}=f_{i+1,j} \tag{20-35}$$

式中

$$\alpha_j=\frac{\Delta t}{2\Delta Z}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$\beta_j=1+\frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2+r\Delta t$$

$$\gamma_j=-\frac{\Delta t}{2\Delta Z}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

在显式法中，差分方程为

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\Delta Z}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i+1,j}}{\Delta Z^2}=rf_{i,j}$$

即

$$\alpha_j^* f_{i+1,j-1}+\beta_j^* f_{i+1,j}+\gamma_j^* f_{i+1,j+1}=f_{i,j} \tag{20-36}$$

式中

$$\alpha_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left[-\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r-q-\sigma^2/2)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2\right] \tag{20-37}$$

$$\beta_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(1-\frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2\right) \tag{20-38}$$

$$\gamma_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left[\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r-q-\sigma^2/2)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2\right] \tag{20-39}$$

经过变量替换后，参数 α_j，β_j 和 γ_j 以及 α_j^*，β_j^* 和 γ_j^* 都有均独立于 j 的特性。在大多数情况下，$\Delta Z=\sigma\sqrt{3\Delta t}$是个很好的选择。

20.8.4 与三叉树的关系

显式有限差分法与三叉树法等价[⊖]，式(20-34)中参数 a_j^*，b_j^* 和 c_j^* 可被解释为

$-\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t$—— 在 Δt 时间后，股票价格由 $j\Delta S$ 跌至 $(j-1)\Delta S$ 的概率；

$1-\sigma^2j^2\Delta t$—— 在 Δt 时间后，股票价格 $j\Delta S$ 保持不变的概率；

⊖ 我们可以证明隐式与多叉树(multinomial tree)等价，在多叉树的每个节点上，股票总共有 $M+1$ 个价格变动。

$\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$—— 在 Δt 时间后，股票价格由 $j\Delta S$ 升至 $(j+1)\Delta S$ 的概率。

图 20-17 是对以上解释的说明。这三个概率的和等于 1。这些概率保证在 Δt 时间后，股票价格的预期的增长为 $(r-q)j\Delta S\Delta t=(r-q)S\Delta t$，这恰恰是股票价格在风险中性世界的增长值期望。当 Δt 很小时，这些概率同时也保证在 Δt 时段后，股票价格变动的方差为 $\sigma^2 j^2\Delta S^2\Delta t=\sigma^2 S^2\Delta t$，这恰恰对应于 S 所遵循的随机过程。f 在 $i\Delta t$ 时刻的价格是 $(i+1)\Delta t$ 时刻的 f 值在风险中性世界的期望值以无风险利率贴现计算得出。

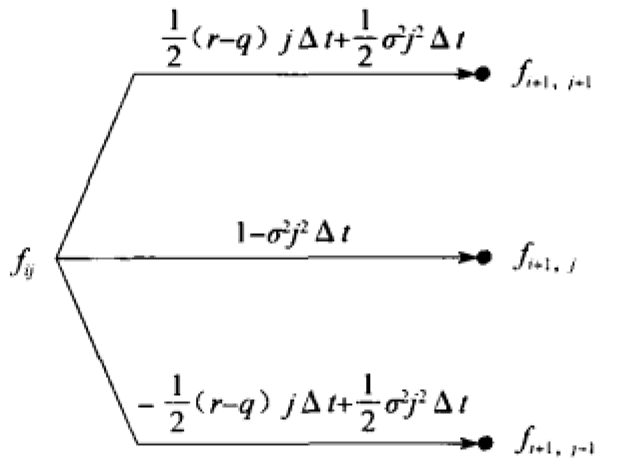


图 20-17 将显式差分法理解为三叉树

为了保证能够使用显式有限差分法，以下 3 个概率必须为正

$$-\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$$

$$1-\sigma^2 j^2\Delta t$$

$$\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$$

在例 20-11 中，当 $j\geqslant 13$ 时（即当 $S\geqslant 65$ 时），$1-\sigma^2 j^2\Delta t$ 为负。这解释了在表 20-5 的左上角负的期权价格和其他矛盾的原因。这个例子说明了显式差分法的主要问题：因为树形结构中的概率可能为负，由此得出的数值解不一定收敛于微分方程的解[⊖]。

当利用变量替换时[见式(20-36)至式(20-39)]，变量 $Z=\ln S$ 减少 ΔZ，保持不变，增加 ΔZ 的概率分别为

$$-\frac{\Delta t}{2\Delta Z}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$1-\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\sigma^2$$

$$\frac{\Delta t}{2\Delta Z}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

Z 的这些变化值分别对应于 $Se^{-\Delta Z}$、S 和 $Se^{\Delta Z}$ 的 S 的变化值。如果取 $\Delta Z=\sigma\sqrt{3\Delta t}$，我们得出的树形和概率与 20.4 节中的三叉树结果相同。

20.8.5 其他差分法

研究人员提出了许多种有限差分方法，其中有些方法中既包含显式有限差分的特性也包含隐式方法的特性。

在所谓的**跳格法**（hopscotch method）中，当从一个节点向另一个节点运动时，我们交替地使用隐式格式和显式格式，图 20-18 说明了这一方法。在每个时刻，我们首先按通常的显式在显式节点（E）完成计算，然后，我们可以不需要求解联立方程组就可以得到在隐式节点（I）上的数值解，这是因为已经得出了与隐式节点相邻的节点上的解。

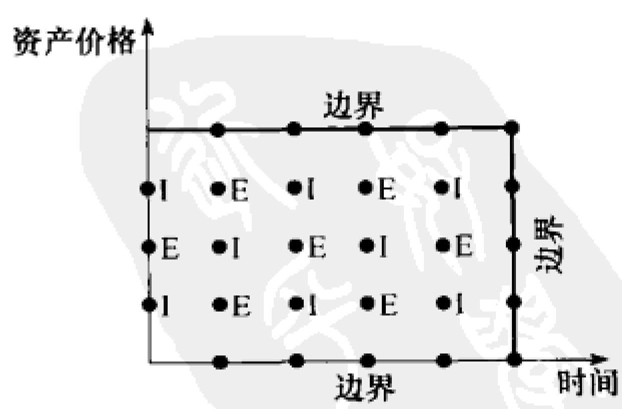


图 20-18 跳格差分法

注：I 代表隐式节点；E 代表显式节点。

Crank-Nicolson 法（Crank-Nicolson scheme）是隐式法与

⊖ J. Hull and A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25(March 1990): 87-100，提出了克服这一问题的方法。对这里所考虑的情况，只要构造关于 lnS，而不是 S 的网格，就可以保证收敛。

显式法的平均。对于隐式法，式(20-27)给出

$$f_{i,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1}$$

对于显式法，式(20-34)给出

$$f_{i-1,j} = a_j^* f_{i,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1}$$

Crank-Nicolson 法是以上两个方法的平均

$$f_{i,j} + f_{i-1,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1} + a_j^* f_{i,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1}$$

令

$$g_{i,j} = f_{i,j} - a_j^* f_{i,j-1} - b_j^* f_{i,j} - c_j^* f_{i,j+1}$$

我们得出

$$g_{i,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j}$$

这说明实施 Crank-Nicolson 法与实施隐式有限差分法很相似。Crank-Nicolson 法的优点在于它的收敛速度比显式法和隐式法都要快。

20.8.6 有限差分法的应用

有限差分法可用于适合树形方法的衍生产品定价问题。它们既可以处理欧式期权定价也可以处理美式期权定价，但这一方法很难用于衍生产品收益与标的变量历史价格有关的情形。有限差分可用于多标的变量的情形，但计算时间会大大增大，因为这时图 20-15 的网格会变成多维的形式。

在有限差分法中，计算希腊值的方法与树形法类似。Delta、Gamma 和 Theta 可以直接由 $f_{i,j}$ 在网格上的值得出。对于 Vega，我们需要让波动率有一个小的变化，然后再由同一个网格计算衍生产品的数值解。

小 结

对于不存在解析形式的衍生产品价格的情形，我们列举了 3 种数值法，包括树形法、蒙特卡罗模拟和有限差分法。

二叉树法假设在每个小的时间区间 Δt 内，股票价格或者按比例 u 上升，或按比率 d 下降。在选择 u 和 d 时，我们保证股票价格变化在风险中性世界里具有正确的期望值和标准差。衍生产品的价格可由二叉树的末端倒退计算得出。对于美式期权，在每个节点上的价格等于以下数值中的最大值：(a) 期权被立即行使后的价格，(b) 期权被再持有 Δt 时间的价格期望值的贴现。

蒙特卡罗模拟利用随机数来对衍生产品标的变量在风险中性世界里的不同路径进行模拟。对于每一个路径，我们均可以得出衍生产品收益值的贴现，贴现值的算术平均即为衍生产品价格的近似。

有限差分法将衍生产品价格所满足的微分方程转换为差分方程来求解。类似于树形法，计算衍生产品的价格从期限的最后时刻开始再倒推到期限的初始时刻。显式法在功能上与三叉树等价，隐式有限差分比显式有限差分更为复杂，但其优点在于用户为取得收敛性无需做出任何特殊处理。

在实际中，选择方法取决于被估价的衍生证券的特性以及用户对所得数值解的精度要求。蒙特卡罗模拟从衍生产品的期限开始运作到期限的结束，蒙特卡罗法一般只适用欧式期权，但能处理复杂的收益形式。当标的资产数量增加时，这一方法的相对效率较高。树形法和有限差分法的计算由期限的末端开始，倒退到期限的开始，因此这两个方法均既可用于欧式期权，也可用于美式期权。但对于最终的收益取决于标的变量历史值以及当前值的情形，应用树形法和有限差分法会很困难。并且当衍生产品包括 3 个或更多的标的变量时，树形法和有限差分法的计算量会很大。

推荐阅读

General

Clewlow, L., and C. Strickland, *Implementing Derivatives Models*. Chichester: Wiley, 1998.

Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2nd edn. Cambridge University Press, 1992.

On Tree Approaches

Cox, J. C, S. A. Ross, and M. Rubinstein. "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7 (October 1979): 229–64.

Figlewski, S., and B. Gao. "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, 53 (1999): 313–51.

Hull, J. C., and A. White, "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (September 1988): 237–51.

Rendleman, R., and B. Bartter, "Two State Option Pricing," *Journal of Finance*, 34 (1979): 1092–1110.

On Monte Carlo Simulation

Boyle, P. P., "Options: A Monte Carlo Approach," *Journal of Financial Economics*, 4 (1977): 323–38.

Boyle, P. P., M. Broadie, and P. Glasserman. "Monte Carlo Methods for Security Pricing," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 (1997): 1267–1322.

Broadie, M., P. Glasserman, and G. Jain. "Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices," *Journal of Derivatives*, 5 (Fall 1997): 25–44.

On Finite Difference Methods

Hull, J. C., and A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25 (March 1990): 87–100.

Wilmott, P., *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*. Chichester: Wiley, 1998.

练习题

20.1 在美式期权的希腊值 Delta、Gamma、Vega、Theta 和 Theta 中，哪一个可通过构造单一二叉树来估算？

20.2 计算一个 3 个月期限的美式看跌期权的价格，这里的标的股票不支付股息，其当前价格为 60 美元，执行价格为 60 美元，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 45%，构造时间段为 1 个月的二叉树来为这一期权定价。

20.3 解释当采用树形结构来对美式期权定价时，如何应用控制变量技术。

20.4 计算一个 9 个月期限的关于谷物期货的欧式看涨期权的价格，这里的谷物期货当前价格为 198 美分，执行价格为 200 美分，无风险利率为每年 8%，波动率为每年 30%，构造时间段为 3 个月的二叉树来为这一期权定价。

20.5 考虑一个期权，其最终收益等于股票最终价格高于在期限内股票平均价格的差额，这一期权能否用二叉树来定价？解释你的答案。

20.6 “对于支付股息的股票，股价的树形不重合；但从股价中减去股息的贴现值后，其树形重合。”解释这一论点。

20.7 说明在 20.4 节的注脚所示的情况下，应用 CRR 二叉树时，概率将出现负值。

20.8 采用 100 次的间隔抽样来改善业界事例 20-1 和表 20-1 中关于 π 的近似值的精度。

20.9 说明为什么蒙特卡罗模拟法不能容易地用于美式衍生产品的定价。

20.10 考虑一个 9 个月期限的关于某个无股息股票的美式看跌期权，期权执行价格为 49 美元，股票价格为 50 美元，无风险利率为每年 5%，波动率为每年 30%，采用一个三步二叉树来对期权进行定价。

20.11 采用一个三步树形来对一个 9 个月期限关于小麦期货的美式看涨期权进行定

价。期货的当前价格为400美分，执行价格为420美分，无风险利率为每年6%，波动率为每年35%。由二叉树估算期权的Delta。

20.12 一个3个月期限的某股票美式看涨期权的执行价格为20美元，股票价格为20美元，无风险利率为每年3%，波动率为每年25%，在1.5个月时，股票将支付2美元股息，采用三步二叉树来对期权定价。

20.13 一个1年期限的某无股息股票的美式看跌期权执行价格18美元，股票的当前价格为20美元，无风险利率为每年15%，股票价格的波动率为每年40%。采用DerivaGem软件并采用4步，步长为3个月的二叉树来为期权定价。展示树形结构，并验证树的最后一步以及倒数第二步的期权价格的正确性。采用DerivaGem来对相应的欧式期权定价。利用控制变量技术来提高美式期权近似值的精度。

20.14 考虑一个2个月期限的关于某股指的美式看跌期权，期权的执行价格为480，股指的当前水平为484，无风险利率为每年10%，股指股息的收益率为每年3%，股指的波动率为每年25%。将期权期限分为4个步长为半个月的区间，并采用树形结构来为这一期权估价。

20.15 当采用树形方法时，如何应用控制变量技术来改进美式期权的Delta的估计值?

20.16 假设采用蒙特卡罗模拟法为某无股息股票的欧式看涨期权定价，股价的波动率为随机。解释如何应用控制变量技术和对偶变量技术来改进计算效率？解释为什么同时应用控制变量技术和对偶变量技术时需要计算6个期权值?

20.17 说明当采用隐式有限差分法来对一个美式看涨期权定价时，式(20-27)至式(20-30)的变化情况。

20.18 考虑一个4个月期限的关于某无股息股票美式看跌期权，期权的执行价格为21美元，股票的当前价格为20美元，无风险利率为每年10%，波动率为每年30%。采用显式有限差分法来对期权定价，在计算中采用4美元的价格间隔和1个月的时间间隔。

20.19 黄铜的即期价格为每磅0.60美元。假定期货价格(每磅的美元数量)如表20-6所示。

表 20-6

3个月	0.59
6个月	0.57
9个月	0.54
12个月	0.50

黄铜价格的波动率为每年40%，无风险利率为每年6%。采用二叉树来对一个执行价格为0.60美元，期限为1年的美式看涨期权定价，在计算过程中将期限分成4个长度为3个月的时间区间(提示：如17.7节所示，在风险中性世界里，变量的远期价格等于将来价格的期望值)。

20.20 采用练习题20.19的二叉树来对以下证券定价：该证券在一年时的收益为x^2，其中x为黄铜价格。

20.21 在显式有限差分法中，在什么时候边界条件$S=0$和$S\rightarrow\infty$会影响衍生产品价格的估计值?

20.22 你应该如何采用对偶变量法来改善业界事例20-2和表20-2中欧式期权的近似值的精度?

20.23 一家公司发行了3年期的可转换债券，面值为25美元，证券持有者可在任何时刻将债券转换为两股公司的股票。当股票价格高于或等于18美元时，公司可提前赎回债券。假定公司将可能在最早的时刻强制转换债券，可转换债券所满足的边界条件是什么？假定利率为常数，你将如何利用有限差分法来对可转换债券定价？假定公司无违约风险。

20.24 样本i和样本j之间的相关系数为$\rho_{i,j}$，提供由标准正态分布中提取3个随机样本的公式。

作业题

20.25 考虑一美式看跌期权，期权持有者有权在1年时以每瑞士法郎0.80美元的价格卖出瑞士法郎并同时收入美元。瑞士法郎汇率的波动率为每年10%，美元的无风险利率为6%，瑞士法郎的无风险利率为3%，当前的汇率为0.81。采用一个三步二叉树来给这一看涨期权定价。利用你所构造的树形来估计期权的Delta。

20.26 一个1年期的关于白银期货的美式看跌期权执行价格为9美元。期货的当前价格为8.50美元，无风险利率为每年12%，期货波动率为每年25%。采用DerivaGem软件，并以步长为3个月的四步二叉树来对期权进行定价。显示树形结果并验证最后一步及倒数第二步节点上期权价格的正确性。采用DerivaGem来对相应的欧式期权定价，并采用控制变量技术来改善美式期权价格的精度。

20.27 一个6个月期限的美式看涨期权的标的股票将在第二个月末与第五个月末支付每股1美元的股息。股票的当前价格为30美元，执行价格为34美元，无风险利率为每年10%，对于无股息的股票部分的波动率为每年30%。采用DerivaGem软件，将期权期限分为100个时间区间来估计期权价格。将你的答案与布莱克近似模型(见14.12节)进行比较。

20.28 假定1英镑的当前价格为1.60美元，汇率波动率为15%，一个关于英镑的美式看涨期权的执行价格为1.62美元，期限为1年。美国和英国的无风险利率分别为每年6%及每年9%。采用显式有限差分法来对该期权定价。在定价中，在汇率0.80与2.40之间选用0.20的汇率间隔，时间间隔为3个月。

20.29 采用20.4节给出的另外一种构造树形结构的方法来对期权定价。

(a) 证明20.4节给出的二叉树与股票价格的对数在Δt时间段变化的均值和方差一致。

(b) 证明对20.4节中给出的三叉树，当Δt^2等高阶项被忽略时，与股票价格的对数在Δt时间区间的变化均值和方差一致。

(c) 采用20.4节中的另一种方式来构造三叉树，在某个节点，股票价格上升、取得中间值、下降的概率分别为1/6、2/3、1/6，假定价格由S分别变化为Su、Sm、Sd，其中$m^2 = ud$。在构造树形结构时，保证股票价格对数变化的均值和方差得以匹配。

20.30 软件DerivaGem的Application Builder功能可以让你检验由二叉树所得出的期权结果在步数增大时趋向于真解的收敛性(见表20-4及DerivaGem的应用实例A)。考虑关于某股指的看跌期权，股值水平为900，执行价格为900美元，无风险利率为5%，股息收益率为2%，期限为2年。

(a) 对于欧式期权和波动率等于20%的情形，生成类似于应用实例A中关于收敛性的结果。

(b) 对于美式期权和波动率等于20%的情形，生成类似于应用实例A中关于收敛性的结果。

(c) 波动率等于20%，采用控制变量技术，画出美式期权价格与二叉树步数之间函数关系的图形。

(d) 假定美式期权的市场价格为85美元。画出由二叉树估计的隐含波动率与二叉树步数之间函数关系的图形。

20.31 从例20-3的树形上估计Delta、Gamma和Theta。解释如何理解这些参数。

20.32 在例20-4中，在第9个月最下面的节点上提前行使期权的好处是多少？



第 21 章

风险价值度

在第 18 章，我们讨论了衡量衍生产品交易组合风险的不同测度，包括 Delta、Gamma 与 Vega。这些测度是为了描述由期权或其他资产所构成资产组合的不同风险。金融机构往往每一天都要对自己存在风险暴露的市场变量计算这些测度，而且有时计算过程会涉及成千上万个市场变量，每天的 Delta-Gamma-Vega 分析可能需要大量计算。这些风险测度对于金融机构的交易员来讲非常重要，但是对金融机构所面临的整体风险却没有提供任何描述。

风险价值度(Value at Risk，VaR)试图为高级管理人员提供一个囊括资产组合全部风险，并以单一数字来表达的风险度量。这一方法已经被银行的资产部、基金管理人员以及其他金融机构广泛采用。银行监管部门也采用 VaR 来确定银行因承担风险而需要的资本金。

在本章，我们将介绍 VaR 这一概念，并描述计算 VaR 的两种方法：**历史模拟法**(historical simulation approach)及**模型构建法**(model-building approach)。

21.1 VaR 测度

当考虑 VaR 测度时，分析员所关心的是以下形式的结论：

我有 $X\%$ 的把握，在今后的 N 天内损失不会大于 V。

这里的数量 V 就是交易组合的 VaR。VaR 是两个参数的函数：时间展望期(N 天)及置信度($X\%$)。这一数量说明在今后的 N 天内，只有 $100-X$ 的概率，损失才会超出这个数量。银行监管人员要求银行在计算市场风险的 VaR 时采用 $N=10$ 与 $X=99$(见业界事例 21-1)。

业界事例 21-1　银行监管人员如何应用 VaR

巴塞尔银行监管委员会(The Basel Committee on Bank Supervision)是一个世界范围的银行监管机构，这一委员会在瑞士的巴塞尔定期开会。在 1988 年，委员会颁布了巴塞尔协议 I。通过这一协议，世界上的监管机构对于银行的信用风险所需的资本金达成了共识。几年以后，巴塞尔委员会又颁布了 1996 年修正案(*The* 1996 *Amendment*)，此修正案在 1998 年得以实施。修正案要求银行在对于自身面临的信用风险持有资本金的同时，也要对自身面临的市场风险持有资本金。在修正案中，银行的交易业务账户和银行业务账户被区分开来。银行业务账户主要包括贷款等资产，对于这些资产，银行并不需要为了满足管理及财务要求而经常定期重新定价。银行交易账户包括一系列银行的日常交易产品(例如股票、债券、互换、远期合约、期权等)，银行的交易账户中的资产一般每天都要进行重新定价。

1996 修正案中采用了 VaR 来计算资本金，

修正案中要求 $N=10$ 及 $X=99$，这意味着只有1%的可能在今后10天的损失超出所计算出的VaR结果。银行的资本金等于某种因子 k 乘以VaR[包括特殊风险(specific risk)的调节项]，这里的因子由监管机构裁定，k 的值在银行与银行之间会有所不同。k 的最小值为3，当银行建立了较好的VaR检测系统时，k 接近于最小值3的可能性会很大。而对于没有建立完善的VaR系统的银行，k 的值会更高一些。在经过2007年的信用危机后，这些规则都进行了修改。

当展望期为 N 天，置信区间水平为 X%时，VaR对应于在今后 N 天内价值分布中的第$(100-X)$个分位数(在生成交易组合价格变化分布时，收益为正，亏损为负)。例如，当 $N=5$ 及 $X=97$ 时，VaR对应于交易组合在5天后价值变化分布中的第3个分位数。图21-1展示了当交易组合价值变化服从正态分布时的VaR。

VaR的概念比较容易理解，所以这一概念很容易吸引人们的注意力。应用VaR时，实际上是在问以下简单的问题："最坏情况会是怎么样?"这是所有高级管理人员都应该关心的问题，将各种对于不同种类市场变量的敏感度压缩成一个数字会使高级管理人员更容易接受。

如果我们将VaR看成一个描述交易组合风险的有用度量，一个有趣的问题是，VaR是否是风险度量中最好的一个？某些研究人员认为，VaR可能会使交易员选择具有图21-2中的分布特性的交易组合。图21-1与图21-2所示的交易组合具备同样的VaR，但图21-2所示的交易组合的风险要大得多，因为其潜在损失要大得多。

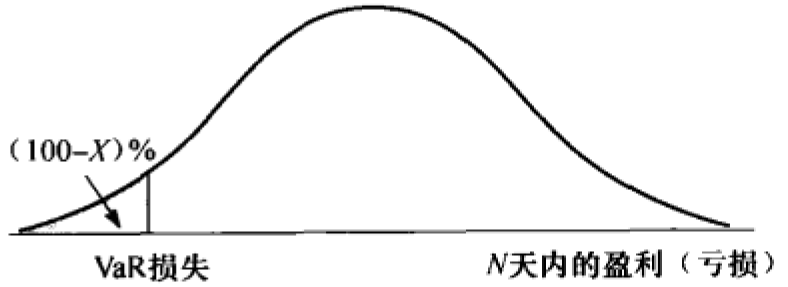


图21-1 由交易组合价值变化概率分布中计算VaR

注：置信度为X%。在图中，交易组合的收益为正，亏损为负。

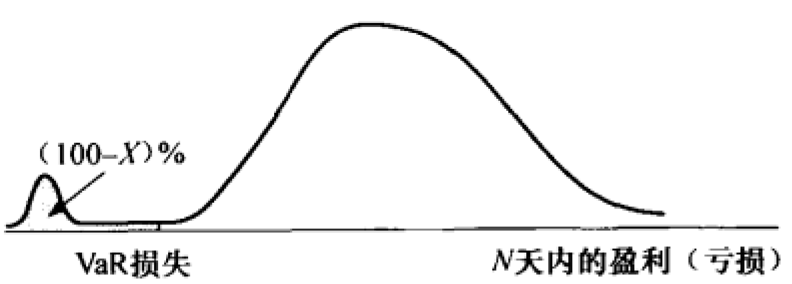


图21-2 图21-1的一种变形

注：VaR值相同，但损失可能会很大。

一种可以解决以上问题的测度为**预期亏损**(expected shortfall)测度。VaR测度的目的是为了描述损失会糟成什么样子，而预期亏损是以下问题的答案："当市场条件变糟而触发损失时，我们损失的期望值为多大?"预期亏损是指在今后 N 天，当损失在$(100-X)$分位数左侧的尾部时，损失的期望值。[⊖]例如，当 $X=99$ 且 $N=10$ 时，预期亏损是指在今后10天的损失在1%的左侧尾部时损失的期望值。

尽管VaR有些缺陷，但这一测度(而不是预期亏损)已经成为监管机构及风险管理人员用来检测风险最流行的工具。因此，我们将在本章主要讨论VaR的测定方式。

时间展望期

VaR含有两个参数，时间展望期 N(以天为计量)及置信区间 X。在实践中，风险管理人员总是先将 N 设定为1。这是因为当 N 大于1时，我们没有足够多的数据来估计市场的变化。一个较为常用的假设为

$$N\text{ 天 VaR} = 1\text{ 天 VaR} \times \sqrt{N}$$

⊖ 这一测度有时也被称为条件(conditional)风险价值度或尾部损失(tail loss)，这一概念最先由P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath, "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance*, 9(1999): 203–228。作者在这一文章中讨论了一个好的风险测度应具备的特性，并指出VaR不具备这些特性。更多讨论见约翰·赫尔的《风险管理与金融机构》第2版，机械工业出版社，2010年。

当交易组合价值在不同天之间的变化相互独立，并且服从期望值为 0 的正态分布时，以上公式正好成立。对于其他情形，这一公式只是一个近似式。

业界事例 21-1 曾经指出，监管机构要求银行市场风险监管资本至少为 10 天展望期的 99% VaR 的 3 倍。用这种方法算出了 10 天展望期的 99% VaR 后，我们就可以得出监管资本水平等于 $3\times\sqrt{10}=9.49$ 乘以一天展望期的 99% VaR。

21.2 历史模拟法

历史模拟法是计算 VaR 的一种流行方法。这种方法直接利用历史数据来预测将来可能发生的不同情形。假设我们采用过去 501 天的历史数据来计算某公司 1 天展望期 99% 的 VaR（在计算市场风险 VaR 时，这样的展望期与置信区间是常用的选择。在选取数据时，最普遍的是选择 501 组数据。下面我们将会看到，这对应于产生 500 个情形）。历史模拟法的第一步是选定影响交易组合的市场变量，这些变量一般是汇率、股价、利率等。所有的价格都应当以本国货币来计算。例如，对一家德国银行来说，市场变量可能会是以欧元计算的 S&P 500 指数。

然后我们需要收集这些变量在最近 501 天内的数据。这些数据为我们提供了从今天到明天市场变量可能发生的 500 种变化情形。我们将数据开始的第 1 天记为 0 天（day 0），数据开始的第 2 天记为 1 天（day 1），并依此类推。情形 1（scenario 1）为所有变量的百分比变化与其在第 0 天和第 1 天之间一样；情形 2（scenario 2）为所有变量的百分比变化与其在第 1 天和第 2 天之间一样；等等。对于每一个情形，我们可以计算从今天到明天之间的交易组合价值变化，并由此可以得出交易组合在一天内价值变化的概率分布，分布的 1% 分位数对应于 500 个计算数值的第 5 个最坏的价值变化[⊖]，VaR 的估计刚好是第一个百分比分位数所对应的损失。假定过去 500 天是对明天将发生情形的一个好的预测，那么公司会有 99% 的把握肯定，交易组合的损失会小于我们所估计的 VaR 值。

为了以代数形式表示计算过程，定义 v_i 为市场变量在第 i 天的值，并且假设今天是第 n 天。在历史模拟方法中，情形 i 假设了市场变量在明天的值为

$$v_n\frac{v_i}{v_{i-1}}$$

例解： 在 4 个股指上投资的组合

为了说明历史模拟法的计算过程，假设在 2008 年 9 月 25 日，某美国投资者拥有价值 1 000 万美元的以下 4 个指数上的投资：美国道琼斯工业平均指数、英国的富时 100 指数、法国的 CAC 40 指数和日本日经 225 指数。2008 年 9 月 25 日，投资在每个指数上的数量如表 21-1 所示。在网页[⊜] http://rotman.utoronto.ca/~hull/OFOD/VaRExample 的 Excel 计算表中有关于 4 个指数在前 501 天内的收盘价格历史数据、汇率以及计算 VaR 的一组完备数据。富时 100 指数、CAC 40 指数和日经 225 指数都是根据汇率按美元计算的。例如，在 2008 年 9 月 25 日，富时 100 指数为 5 197.00，当时的美元/英镑汇率是 1.847 2（即 1 英

表 21-1 计算 VaR 所用的投资组合

指数	组合价值（千美元）
道琼斯工业平均指数	4 000
富时 100 指数	3 000
CAC 40 指数	1 000
日经 225 指数	2 000
合计	10 000

⊖ 这里可以使用不同的方式，比如可以使用第 5 最大亏损、第 6 最大亏损，或两者之间的平均。在 Excel 的 PERCENTILE 函数中，如果共有 n 个观察值，而且 K 是整数，$K/(n-1)$ 百分比分位数是排列 $K+1$ 的观察值。其他百分比分位数是利用插值计算的。

⊜ 为了尽量简化，我们只考虑当 4 个指数都有交易的日子。这也是为什么在 501 个数据中包括 2006 年 8 月 7 日到 9 月 25 日。实际中，如果这里的分析是由美国的金融机构进行的，这时很可能会设法将不是美国假日的日子的数据补上。

镑值 1.847 2 美元)，而在 2006 年 8 月 10 日，富时 100 指数为 5 823.40，汇率是 1.891 8。当以美元度量时，如果将 2008 年 9 月 25 日的指数取为 5 197.00，那么在 2006 年 8 月 10 日，指数应当为

$$5\,823.40 \times \frac{1.891\,8}{1.847\,2} = 5\,964.00$$

经过汇率调整后，数据的一小部分在表 21-2 中给出。

表 21-2 经过利率调整后用于历史模拟的股指数据

天	日期	道琼斯工业平均指数	富时 100 指数	CAC 40 指数	日经 225 指数
0	2006 年 8 月 7 日	11 219.38	6 026.33	4 345.08	14 023.44
1	2006 年 8 月 8 日	11 173.59	6 007.08	4 347.99	14 300.91
2	2006 年 8 月 9 日	11 076.18	6 055.30	4 413.35	14 467.09
3	2006 年 8 月 10 日	11 124.37	5 964.00	4 333.90	14 413.32
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
499	2008 年 9 月 24 日	10 825.17	5 109.67	4 113.33	12 159.59
500	2008 年 9 月 25 日	11 022.06	5 197.00	4 226.81	12 006.53

当对股权资产投资估价时，2008 年 9 月 25 是个很有意思的日期。从 2007 年 8 月份开始的信用危机已经有一年时间了。在几个月内，股票价格一直在下跌，而波动率还在上涨。雷曼兄弟在 10 天前刚宣布破产。美国国会还没有通过 7 000 亿美元不良资产救助计划(Troubled Asset Relief Program，TARP)。

表 21-3 给出了 2008 年 9 月 26 日为产生各种情形所需要的市场变量值。情形 1(表 21-3 第 1 行)显示的是当假设从 2008 年 9 月 25 日到 26 日之间市场变量百分比变化与从 2006 年 8 月 7 日到 8 日之间相同时，这些变量在 2008 年 9 月 26 日的值；情形 2(表 21-3 第 2 行)显示的是当假设这些百分比变化与从 2006 年 8 月 8 日到 9 日之间相同时，市场变量在 2008 年 9 月 26 日的值；等等。一般情况下，情形 i 假设了这些指数在 2008 年 9 月 25 日到 26 日之间的百分比变化与第 $i-1$ 日到第 i 日之间相同($1 \leqslant i \leqslant 500$)。表 21-3 的 500 行代表所生成的 500 个情形。

表 21-3 利用表 21-2 中数据产生 2008 年 9 月 26 日的情形

情形	道琼斯工业平均指数	富时 100 指数	CAC 40 指数	日经 225 指数	组合价值(千美元)	损失(千美元)
1	10 977.08	5 180.40	4 229.64	12 244.10	10 014.334	-14.334
2	10 925.97	5 238.72	4 290.35	12 146.04	10 027.481	-27.481
3	11 070.01	5 118.64	4 150.71	11 961.91	9 946.736	53.264
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
499	10 831.43	5 079.84	4 125.61	12 115.90	9 857.465	142.535
500	11 222.53	5 285.82	4 343.42	11 855.40	10 126.439	-126.439

在 2008 年 9 月 25 日，道琼斯工业平均指数是 11 022。2006 年 8 月 8 日，其值是 11 173.59，这比在 2006 年 8 月 7 日的值 11 219.38 低。因此在情形 1 下，道琼斯工业平均指数的值为

$$11\,022.06 \times \frac{11\,173.59}{11\,219.38} = 10\,977.08$$

类似地，富时 100 指数、CAC 40 指数和日经 225 的值分别为 5 180.40，4 229.64 和12 244.10。因此在情形 1 下，组合的价值为(以千美元计)：

$$4\,000 \times \frac{10\,977.08}{11\,022.06} + 3\,000 \times \frac{5\,180.40}{5\,197.00} + 1\,000 \times \frac{4\,229.64}{4\,226.81} + 2\,000 \times \frac{12\,224.10}{12\,006.53} = 10\,014.334$$

因此，组合价值增长了 14 334。对其他情形可以进行类似的计算。图 21-3 显示了组合亏损的直方图(直方图里的方块表示亏损(以千美元计)在 450～550，350～450，250～350 之间等)。

然后，将 500 种不同情形下的亏损排序，表 21－4 给出了这些结果的一部分。最坏的是情形 494(其中假定的是指数的变化方式与雷曼兄弟宣布破产那天相同)。一天 99% 的 VaR 可以估计为第五个最坏的结果，即 253 385。

表 21-4 500 种情形下的亏损排序(由高到低)

情形	亏损
494	477.841
339	345.435
349	282.204
329	277.041
487	253.385
227	217.974
131	205.256
238	201.389
473	191.269
306	191.050
477	185.127
495	184.450
376	182.707
237	180.105
365	172.224
⋮	⋮

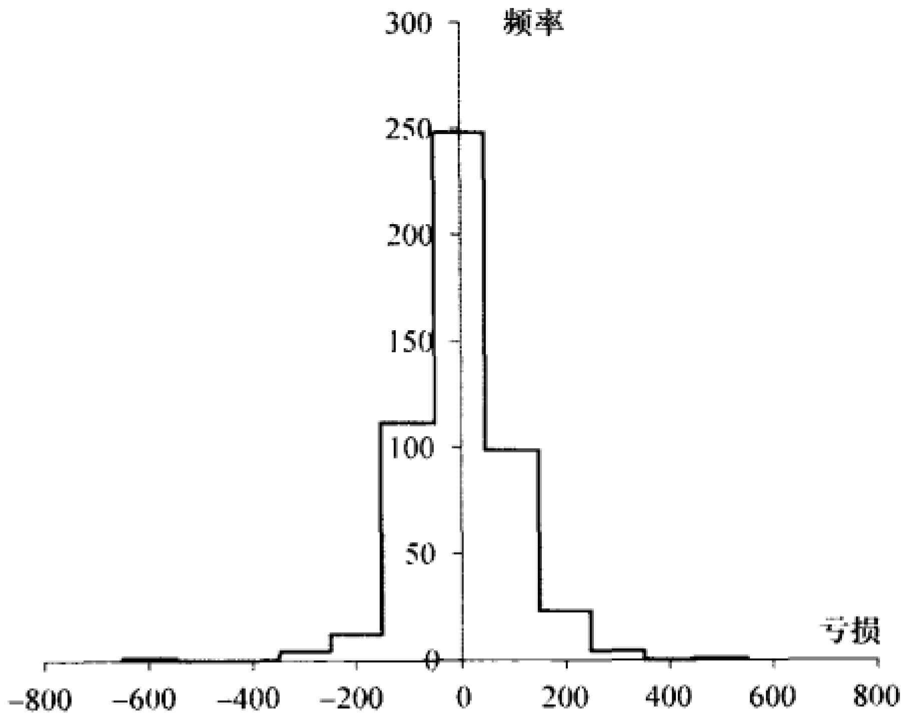


图 21-3 2008 年 9 月 25～26 日之间亏损情形直方图

在 21.1 节我们曾解释过，10 天 99% 的 VaR 通常是将 1 天 99% 的 VaR 乘以 $\sqrt{10}$，因此对我们所考虑的例子，10 天 99% 的 VaR 为

$$\sqrt{10} \times 253\,385 = 801\,274$$

即 801 274。

在我们的例子中，每天的 VaR 均要通过采用最近 501 天的数据来更新。例如，考虑 2008 年 9 月 26 日(第 501 天)的情况。所有市场变量都有新数据，因此我们可以计算交易组合新的市场价值，然后可以通过以上描述的过程来计算新的 VaR，在计算中我们采用 2006 年 8 月 8 日到 2008 年 9 月 26 日的市场变量数据(由此我们可以产生 501 个市场变量百分比变化的观察值，2006 年 8 月 7 日(即 0 天)的数据将不再使用)。类似地，在下一个交易日，2008 年 9 月 29 日(在 502 天)，我们可以采用 2006 年 8 月 9 日到 2008 年 9 月 29 日(即 2 天至 502 天)的数据来计算 VaR，等等。

在实际中，一家金融机构的组合当然要比我们这里所考虑的例子复杂得多，组合往往由几千甚至几万个头寸所组成，其中一些比较典型的产品包括远期合约、期权及其他衍生产品。在每一天，金融机构都会假设在下一个交易日里组合不变的情况下计算 VaR。但如果在这一天内银行的交易使得组合的风险增长(降低)，那么在一般情况下，10 天 99% 的 VaR 与前一日相比也将会增长(降低)。

在 VaR 计算中常常需要考虑几百个甚至几千个市场变量。在计算组合价值时，就利率而言，一般情况下银行需要许多不同货币下的国债以及 LIBOR/互换零息利率期限结构，而这些期限结构就是由所考虑的市场变量计算出来的(见第 4 章有关零息利率期限结构的计算)。银行存在风险暴露的每个零息利率曲线都可能会涉及多至 10 个市场变量。

21.3 模型构建法

除了历史模拟法外，**模型构建法**(model-building)是另一种计算 VaR 的方法。在介绍细节之前，我们首先说明以下关于波动率计量的单位问题。

21.3.1 日波动率

对于期权定价，波动率度量单位往往是“年波动率”，当采用模型构建法计算 VaR 时，我们对于资产波动率的度量单位往往是“日波动率”。

期权定价中的年波动率与计算 VaR 时日波动率的转换关系是什么呢？定义 σ_{year} 为年波动率，σ_{day} 为日波动率，假定一年总共有 252 个交易日，式(14-2)给出了一年资产以连续复利计算的收益标准差或者为 σ_{year}，或者为 $\sigma_{\text{day}}\sqrt{252}$，因此

$$\sigma_{\text{year}} = \sigma_{\text{day}}\sqrt{252}$$

或

$$\sigma_{\text{day}} = \frac{\sigma_{\text{year}}}{\sqrt{252}}$$

这一方程显示，日波动率大约是年波动率的 6%。

如 14.4 节所述，σ_{day} 大约等于资产每日价格百分比变化的标准差，在计算 VaR 的过程中，我们这里的近似式为恒等式。因此，我们将资产价格(或其他市场变量)的日波动率定义为资产价格在一天内的百分比变化的标准差。

我们在接下来的讨论中假设已经取得了对于日波动率以及相关系数的估计，后面会讨论如何估计这些参数。

21.3.2 单一资产情形

我们现在考虑当交易组合只包含一个价值为 1 000 万美元的微软公司股票资产时的简单情形下，如何用模型构建法来计算 VaR，在计算中我们选择 $N = 10$ 天和 $X = 99\%$，这里我们是在寻求在 10 天展望期内在 99% 置信水平下，损失不能超出的数量。在计算过程中我们首先将展望期选定为一天。

假定微软公司股票的波动率为每天 2%(对应于年波动率为 32%)，因为交易头寸的数量为 1 000万美元，交易组合每天价值变化的标准差为 1 000 万美元的 2%，即 200 000 美元。

在模型构建法中，通常假设在展望期上市场价格变化的期望值为 0。这一假设虽然不是完全正确，但比较合理。同标准差相比，市场变量在一个较小区间内价格变化的期望值与标准差比较，相对较小。例如，假设微软公司的年收益是 20%，在一天内，回报率的期望大约是 0.20/252 = 0.08%，与此对应每天价格变化的标准差是 2%。考虑 10 天的展望期，预期收益为 0.08% × 10 即 0.8%，而 10 天所对应的收益标准差为 $2\% \times \sqrt{10}$，即大约 6.3%。

截止到目前，我们得出了微软公司股票在一天内价格变化的标准差为 200 000 美元，并且(在近似意义上)每天价格变化的均值为 0。我们假定价格的变化服从正态分布[⊖]。因为 $N(-2.33) = 0.01$，我们得出在正态分布下，价格下跌大于 2.33 倍标准差的概率为 1%，另外一种等价的说法是，在正态分布下，我们有 99% 的把握肯定价格下跌不会超过 2.33 倍的标准差，因此，我们得出 1 000 万美元微软股票的一天展望期的 99% VaR 等于

⊖ 为了保证与第 14 章期权定价的假设一致，我们可以假定微软股票价格在第二天的分布为对数正态(lognormal)，因为一天展望期的时间太短，在这里对数正态假设与我们以前所做的正态的假设几乎没有什么区别。

$$2.33 \times 200\,000 = 466\,000 \text{ 美元}$$

假定微软股票在天与天之间变化相互独立，因此 N 天的 VaR 等于一天的 VaR 乘以 $\sqrt{N}$，10 天的 99% VaR 等于

$$466\,000 \times \sqrt{10} = 1\,473\,621 \text{ 美元}$$

接下来我们考虑价值为500万美元的美国电话电报公司(AT&T)股票投资。假定，AT&T 股票日波动率为1%(对应的年波动率大约为16%)，采用与微软股票类似的计算，我们得出 AT&T 在一天内价格变化的标准差为

$$5\,000\,000 \times 0.01 = 50\,000$$

假定价格的变化为正态分布，一天展望期的99% VaR 等于

$$50\,000 \times 2.33 = 116\,500 \text{ 美元}$$

10 天展望期的99% VaR 等于

$$116\,500 \times \sqrt{10} = 368\,405 \text{ 美元}$$

21.3.3 两个资产的情形

现在我们考虑1 000 万美元微软股票与500 万美元 AT&T 股票所构成的交易组合。我们假定微软与 AT&T 的股票价格变化服从二元正态分布，分布的相关系数为0.3。如果变量 X 与 Y 的标准差分别为 σ_X 及 σ_Y，相关系数为 ρ，由统计学中一个标准结果可以得出，$X+Y$ 的标准差为

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y}$$

在应用这一结果时，我们令 X 为微软股票价格在一天内的价格变化，令 Y 为 AT&T 股票价格在一天内价格变化，那么

$$\sigma_X = 200\,000 \quad \text{及} \quad \sigma_Y = 50\,000$$

因此，由两种股票所组成的交易组合的标准差为

$$\sqrt{200\,000^2 + 50\,000^2 + 2 \times 0.3 \times 20\,000 \times 50\,000} = 220\,227$$

变化服从正态分布，假定其均值为0，因此一天展望期的99% VaR 等于

$$220\,227 \times 2.33 = 513\,129$$

10 天展望期99%的 VaR 等于 $\sqrt{10}$乘以以上数量，即1 622 657。

21.3.4 风险分散的益处

我们以上考虑的例子满足以下性质：

- 由单一微软股票组成的交易组合的10 天展望期的99% VaR 等于1 473 621 美元。
- 由单一 AT&T 股票组成的交易组合10 天展望期的99% VaR 等于368 405 美元。
- 由微软及 AT&T 两种股票组成的交易组合的10 天展望期的99% VaR 等于1 622 657 美元。

即

$$(1\,473\,621 + 368\,405) - 1\,622\,657 = 219\,369 \text{ 美元}$$

代表风险分散的收益。如果微软及 AT&T 的相关系数等于1，由微软及 AT&T 共同组成的交易组合的 VaR 等于微软的 VaR 加上 AT&T 的 VaR，小于1 的相关系数会造成部分风险被分散化解(diversified away)。[⊖]

21.4 线性模型

以上讨论的例子是采用线性模型计算 VaR 的特例。假定我们持有的交易组合价值为 P 中含有

⊖ Harry Markowitz 是研究交易组合风险分散收益的先驱之一，他在1990 年获得诺贝尔奖，见 H. Markowitz, "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, 7, 1(March 1952): 77-91。

n 个不同资产，在资产 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 上投资资金为 α_i。定义 Δx_i 为资产 i 在一天内的回报，在一天内所产生的变化为 $\alpha_i\Delta x_i$。我们有关系式

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i \tag{21-1}$$

式中 ΔP 为整个交易组合在一天内的价值变化。

在前一节所示例子中，第一项资产为价值 1 000 万美元的微软股票，第二项资产为价值 500 万美元的 AT&T 股票，因此 $\alpha_1=10$，$\alpha_2=5$（按百万美元计）及

$$\Delta P = 10\Delta x_1 + 5\Delta x_2$$

如果我们假定式(21-1)中的 Δx_i 服从多元正态分布，那么 ΔP 也服从正态分布。为了计算 VaR，我们只需要计算出 ΔP 的期望值及标准差。由 21.3 节里每项 Δx_i 的期望值都为 0 的假设出发，我们得出 ΔP 的期望值也为 0。

为了计算 ΔP 的标准差，我们假定 σ_i 为第 i 项资产的日波动率，ρ_{ij} 为资产 i 及资产 j 的相关系数，这意味着 Δx_i 的标准差为 σ_i，Δx_i 及 Δx_j 的相关系数为 ρ_{ij}，将 ΔP 的方差记为 σ_P^2，我们有

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\alpha_i\alpha_j\sigma_i\sigma_j \tag{21-2}$$

这一方程也可以被写成

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i} \rho_{ij}\alpha_i\alpha_j\sigma_i\sigma_j$$

N 天内变化的标准差为 $\sigma_P\sqrt{N}$，因此 N 天展望期的 99% VaR 等于 $2.33\sigma_P\sqrt{N}$。

组合在一天的回报率是 $\Delta P/P$，由式(21-2)得出其方差为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}w_iw_j\sigma_i\sigma_j$$

其中 $w_i=\alpha_i/P$ 是组合在第 i 项资产上的投资比重。组合管理人员在使用式(21-2)时使用的正是这种形式。

在 21.3 节所示例子中，$\sigma_1=0.02$，$\sigma_2=0.01$ 及 $\rho_{12}=0.3$，在前面我们曾指出 $\alpha_1=10$ 及 $\alpha_2=5$，因此

$$\sigma_P^2 = 10^2\times 0.02^2 + 5^2\times 0.01^2 + 2\times 10\times 5\times 0.3\times 0.02\times 0.01 = 0.048\,5$$

即 $\sigma_P=0.220$，这一数量为交易组合每天价值变化的标准差（以百万美元计），10 天展望期的99% VaR 等于 $2.33\times 0.220\times\sqrt{10}=162.3$ 万美元，这与 21.3 节所计算出的数值完全一致。

21.4.1 相关系数与协方差矩阵

相关系数矩阵里的第 i 行和第 j 列元素 ρ_{ij} 是变量 i 和变量 j 之间的相关系数，其形式如表 21-5 所示。因为一个变量与其自身总是有完美的相关性，所以相关系数的对角线元素总是 1。另外，因为 $\rho_{ij}=\rho_{ji}$，所以相关系数矩阵是对称的。相关系数矩阵与变量的日标准差相结合，利用式(21-2)我们可以计算组合的方差。

表 21-5 相关系数矩阵：ρ_{ij} 是变量 i 和变量 j 之间的相关系数

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13}\cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23}\cdots & \rho_{2n} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1\cdots & \rho_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3}\cdots & 1 \end{bmatrix}$$

除了使用相关系数与波动率外，人们常常使用方差和协方差。变量 i 的日方差 var_i 是日波动

率的平方

$$\mathrm{var}_i = \sigma_i^2$$

变量 i 与变量 j 之间的协方差是变量 i 的日波动率，变量 j 的日波动率，以及 i 和 j 之间相关系数的乘积：

$$\mathrm{cov}_{ij} = \sigma_i \sigma_i \sigma_{ij}$$

计算组合方差的式(21－2)可以写成

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}_{ij} \alpha_i \alpha_j \tag{21-3}$$

协方差矩阵(covariance matrix)的第 i 行和第 j 列元素是变量 i 和变量 j 之间的协方差，变量与自身的协方差等于其方差，因此矩阵中的对角线元素为变量的方差(见表 21-6)。协方差矩阵有时也被称为**方差-协方差矩阵**(variance-covariance matrix)(与相关系数矩阵一样，协方差矩阵是对称的)。使用矩阵符号，上面所给的组合方差可以写成

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} C \boldsymbol{\alpha}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是列向量，第 i 个元素是 α_i，C 是方差-协方差矩阵，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的对置(transpose)。

表 21-6 方差-协方差矩阵：cov_{ij} 是变量 i 和 j 之间的协方差，对角线元素为方差 $\mathrm{cov}_{ii} = \mathrm{var}_i$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{var}_1 & \mathrm{cov}_{12} & \mathrm{cov}_{13} & \cdots & \mathrm{cov}_{1n} \\ \mathrm{cov}_{21} & \mathrm{var}_2 & \mathrm{cov}_{23} & \cdots & \mathrm{cov}_{1n} \\ \mathrm{cov}_{31} & \mathrm{cov}_{32} & \mathrm{var}_3 & \cdots & \mathrm{cov}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{cov}_{n1} & \mathrm{cov}_{n2} & \mathrm{cov}_{n3} & \cdots & \mathrm{var}_n \end{bmatrix}$$

方差与协方差通常是通过历史数据计算的。在 22.8 节我们将通过 21.2 节的 4 个股指作为例子来说明如何计算这些值。

21.4.2 如何处理利率

在模型构建法中，我们不可能将每一个债券以及公司所面临的每一种利率风险都定义为一个单独的市场变量。在建立模型时，我们必须进行简化。一种方式是假定收益率曲线的变化为平行移动，由此我们只需要定义一个市场变量，即平行移动的大小。可以采用以下方程来计算证券组合价值变化

$$\Delta P = -DP\Delta y$$

式中 P 为组合的价值，ΔP 为组合在一天内的变化，D 为组合的修正久期，Δy 为收益率在一天内的变化。

通常来讲，这一方法的准确性不够好。市场上采用的简化方式是选择以下标准期限的零息债券的价格作为市场变量：1 月、3 月、6 月、1 年、2 年、5 年、7 年、10 年及 30 年。在计算 VaR 时，组合中产品的现金流要被映射成标准期限上的现金流。考虑头寸为 100 万的国库券，期限为 1.2 年，债券的券息为 6%，券息每半年复利一次，这一债券在 0.2 年、0.7 年及 1.2 年发放券息，并在 1.2 年债券偿还本金。此债券可以作为以下三个零息债券的组合：0.2 年面值为 30 000 美元、期限为 0.7 年面值为 30 000 美元以及期限为 1.2 年面值为 1 030 000 美元。在映射过程中，0.2 年的头寸被等价的 1 个月和 3 个月头寸取代，0.7 年的头寸被等价的 6 个月和 1 年头寸取代，1.2 年的头寸被等价的 1 年和 2 年头寸取代。因此，我们持有的 1.2 年期的带息债券分别被映射为 1 个月、3 个月、6 个月、1 年及 2 年的无券息债券。

这里描述的过程被称为**现金流映射**(cash-flow mapping)。注意在历史模拟法中，没有必要进

行现金流映射，这是因为我们在考虑每一个情形时，可以计算完整的利率期限结构。

21.4.3　线性模型的应用

线性模型最简单的应用是交易组合里没有衍生产品的情形。假设组合由股票、债券、外汇或商品所组成，这时，交易组合价格的变化同构成交易组合的资产价格百分比变化呈线性关系。注意，为了计算 VaR，所有变量都应以本国货币为单位。例如，美国的一些规模较大的银行所考虑的市场变量可能包括由美元计量的日经 225 指数或由美元计量的 10 年期英国政府零息债券等。

线性模型能够处理的衍生产品包括标的资产(变量)为汇率的远期合约。假如，远期合约的期限为 T，这一合约可以被理解成期限为 T 的外国零息债券同期限为 T 的本国零息债券的交换。为了计算 VaR，我们将远期合约处理为外国债券的长头寸与本国债券短头寸的组合，而每一个债券都可以通过现金流映射来处理。

接下来让我们考虑利率互换。如第 7 章所述，利率互换可以被理解成浮动利息债券与固定利息债券的交换。固定券息债券是一般的带息债券，浮动券息债券在下一个付息日后的价格等于面值，因此浮动券息债券可以被当成期限等于下一个付息日的零息债券。所以，利率互换可以被转换为债券的头寸与短头寸的组合，从而可以采用一般的现金流映射来处理。

21.4.4　线性模型与期权

我们现在考虑如何将线性模型用于期权产品，首先假设交易组合是由股票的期权所组成，标的资产的当前价格为 S，期权 Delta 为 δ[⊖](由第 18 章的计算方式求得)，因为 δ 为交易组合价格变化与 S 变化的比率，我们有以下近似式

$$\delta = \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

即

$$\Delta P = \delta \Delta S \tag{21-4}$$

式中 ΔS 为股票在一天内的价格变化，ΔP 是交易组合一天的价值变化，定义 Δx 为股票价格在一天内的百分比变化，因此

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$$

ΔP 与 Δx 有以下近似关系式

$$\Delta P = S\delta\Delta x$$

当交易组合包含几种不同标的资产的期权时，我们可以推导出 ΔP 与 Δx_i 之间的近似关系式

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i \delta_i \Delta x_i \tag{21-5}$$

式中 S_i 为第 i 个市场变量的价格，δ_i 为交易组合关于第 i 个变量的 Delta。类似于式(21-1)的近似关系式为

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$$

其中 $\alpha_i = S_i\delta_i$，至此我们可以利用式(21-2)或式(21-3)来计算 ΔP 的标准差。

【例 21-1】 假定一交易组合是由标的资产为微软股票与 AT&T 股票的期权所组成，微软期权

⊖ 通常我们将交易组合 Delta 及 Gamma 分别计为 Δ 及 Γ，在这一节以及今后的一节里，我们将采用小写字母 δ 及 γ，这样做的原因是避免过多采用符号 Δ。

的 Delta 为1 000，AT&T 期权的 Delta 为 20 000，微软股票的价格为 120，AT&T 的股票价格为 30。由式(21-5)，我们得出以下近似式

$$\Delta P = 120 \times 1\,000 \times \Delta x_1 + 30 \times 20\,000 \times \Delta x_2$$

即

$$\Delta P = 120\,000 \times \Delta x_1 + 600\,000 \times \Delta x_2$$

式中，Δx_1 与 Δx_2 分别为微软及 AT&T 股票的日收益率，ΔP 为股票收益率所触发交易组合一天的价值变化(这一交易组合等价于 120 000 美元的微软投资与600 000 美元的 AT&T 投资的组合)。假定微软价格日波动率为 2%，AT&T 价格日波动率为 1%，微软价格变化与 AT&T 价格变化的相关系数为 0.3，我们得出 ΔP 的标准差(以千元计)为

$$\sqrt{(120 \times 0.02)^2 + (600 \times 0.01)^2 + 2 \times 120 \times 0.02 \times 600 \times 0.01 \times 0.3} = 7.099$$

因为 $N(-1.65) = 0.05$，5 天展望期的 95% VaR 等于 $1.65 \times \sqrt{5} \times 7\,099 = 26\,193$ 美元。

21.5　二次模型

当交易组合中含有期权产品时，线性模型只是一个近似，因为它不考虑交易组合的 Gamma 项。如第 18 章所述，Delta 定义为交易组合价值变化随标的市场变量价格变化的比率，Gamma 定义为交易组合 Delta 随标的市场变量价格变化的比率。Gamma 是为了测量交易组合价值与市场变量价格关系式中的曲率。

图 21-4 展示了非零的 Gamma 对于交易组合价值概率分布的影响，当 Gamma 为正时，概率分布通常具有**正偏性**(positively skewed)；而 Gamma 为负时，概率分布通常具有**负偏性**(negatively skewed)。图 21-5 和图 21-6 解释了产生这一现象的原因。图 21-5 显示一期权长头寸价格同标的资产的关系。一个看涨期权长头寸是具有正 Gamma 期权的例子，该图说明当标的资产价格在一天内的概率分布为正态时，相应期权价格的概率分布具有正偏性态[⊖]。图 21-6 显示一期权短头寸价格同标的资产的关系。期权短头寸的 Gamma 为负，这时我们看到当标的资产价格在一天内的概率分布为正态分布时，相应期权价格的概率分布具有负偏性。

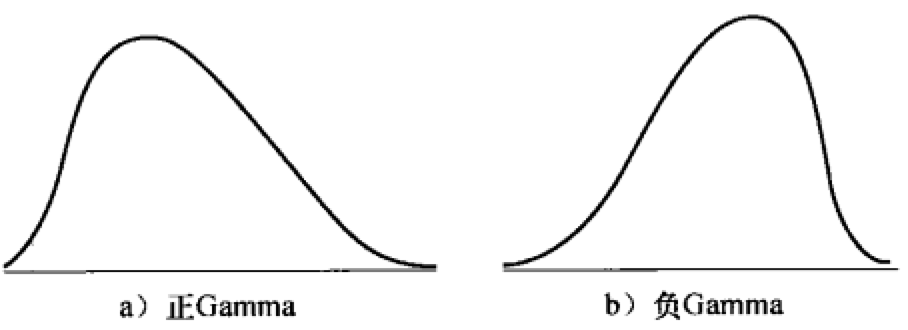


图 21-4　交易组合价值的概率分布

一个投资组合的 VaR 关键取决于投资组合价值分布左端的尾部。例如，当置信水平为 99% 时，分布左端尾部小于 VaR 的数量占整体分布的 1%，图 21-4a 及图 25-5 显示，具有正 Gamma 的交易组合同正态分布相比，左端分布较为瘦小，在 ΔP 为正态分布的假设下得出的 VaR 会偏高。类似地，由图 21-4b 及图 21-6 显示，具有负 Gamma 的交易组合同正态分布相比，左端分布较为肥大，在 ΔP 为正态分布的假设下得出 VaR 会偏低。

为了提供一个比线性模型更为精确的 VaR 估计，我们可以在 ΔP 与 Δx_i 关系式中既考虑 Delta 又考虑 Gamma。考虑一个只依赖单一资产价格 S 的交易组合，假定 δ 和 γ 为交易组合的 Delta 和 Gamma。由附录 18A 得出，对式(21-4)的一个改进是[⊖]

⊖ 如 21.3 节页下注所述，在计算 VaR 时，我们可以用正态分布作为对数正态分布的近似。

⊖ 由附录 18A 的泰勒级数展开式，以下方程是关于 ΔP 的近似式。

$$\Delta P = \Theta \Delta t + \delta \Delta S + \frac{1}{2}\gamma(\Delta S)^2$$

其中忽略阶数高于 Δt 的项。在实际中，$\Theta \Delta t$ 非常小，也常常被忽略。

$$\Delta P = \delta \Delta S + \frac{1}{2}\gamma (\Delta S)^2$$

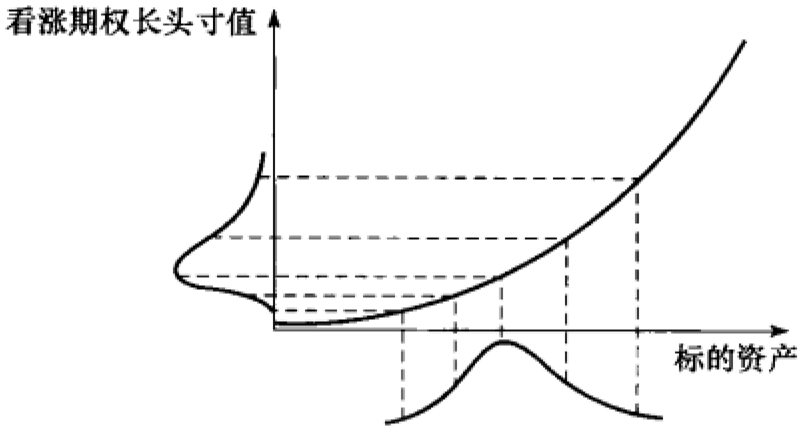


图 21-5 具有正态分布的标的资产概率分布与长头寸期权的概率分布的对应关系

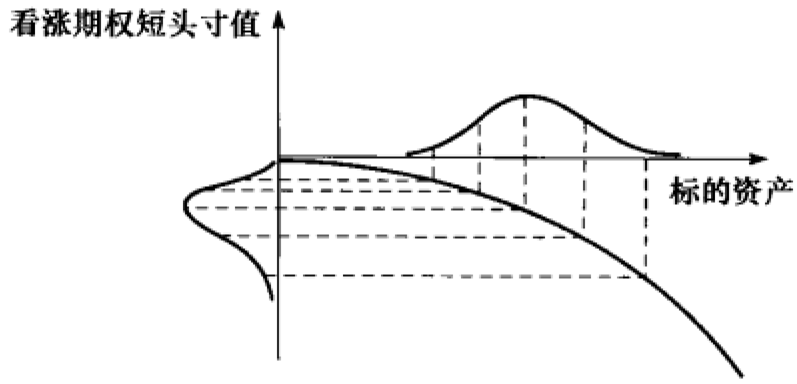


图 21-6 具有正态分布的标的资产概率分布与短头寸期权的概率分布的对应关系

令

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$$

由此得出

$$\Delta P = S\delta \Delta x + \frac{1}{2}S^2\gamma (\Delta x)^2 \tag{21-6}$$

假定交易组合价值与 n 个市场变量有关，并且组合中每一个产品只依赖于一个变量，式(21-6)变为

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i\delta_i\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}S_i^2\gamma_i (\Delta x_i)^2$$

式中 S_i 是第 i 个市场变量的值，δ_i 和 γ_i 为交易组合关于第 i 个变量的 Delta 和 Gamma。当组合的资产依赖于不止一个市场变量时，以上方程变为以下更为一般的形式

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i\delta_i\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}S_iS_j\gamma_{ij}\Delta x_i\Delta x_j \tag{21-7}$$

其中 γ_{ij} 为交叉 Gamma 项，其定义为

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_i \partial S_j}$$

与式(21-1)相比，式(21-7)不是十分易于应用，但这一方程可用来计算 ΔP 的**矩**(moment)。由这些矩，我们可以利用统计学中的 Cornish-Fisher 展开来计算概率分布的分位数[㊀]。

21.6 蒙特卡罗模拟

作为对以上讨论方法的补充，我们可以在实施模型构建法时利用蒙特卡罗模拟法产生 ΔP 的概率分布。假如我们想计算交易组合展望期为 1 天的 VaR，过程如下：

- 利用市场变量的当前值，按通常方式对交易组合进行定价。
- 由 Δx_i 服从的多元正态分布中进行一次抽样[㊁]。
- 由 Δx_i 的样本计算在交易日末的市场变量值。

㊀ 作者网页的技术报告(Technical Note 10)给出了计算矩的细节，并且讨论了 Cornish-Fisher 展开的应用。当只有单一变量时，$E(\Delta P) = 0.5S^2\gamma\sigma^2$，$E(\Delta P^2) = S^2\delta^2\sigma^2 + 0.75S^4\gamma^2\sigma^4$，以及 $E(\Delta P^3) = 4.5S^4\delta^2\gamma\sigma^4 + 1.875S^6\gamma^3\sigma^6$，其中 S 为标的变量的值，σ 为每天的波动率。DerivaGem 软件中应用工具 E(应用实例 E)对于这一情形实施了 Cornish-Fisher 展开。

㊁ 在第 20 章里，我们曾讨论过如何进行抽样。

- 利用新产生的市场变量对交易组合按通常方式重新定价。
- 将第四步产生的数值减去第一步的数值，由此产生 ΔP 的一个样本。
- 多次重复第二步至第五步，我们可以建立 ΔP 的概率分布。

ΔP 的概率分布中的某个分位数就是我们需求的 VaR。例如，假如我们由以上方法计算出 ΔP 的5 000个不同的样本值，由此我们得出，一天展望期的99% VaR 对应于样本数值的第50个结果最坏的值；一天展望期的95% VaR 为第250个结果最坏的值，等等[1]。N 天展望期的 VaR 等于一天展望期的 VaR 乘以 $\sqrt{N}$[2]。

蒙特卡罗方法的弱点是计算速度缓慢，其原因是公司的交易组合(由成百上千的资产所组成)要被定价很多次[3]。一种加速计算的方法是用式(21-7)来描述的 ΔP 与 Δx_i 的关系，在蒙特卡罗方法中我们可以由第二步直接跳到第五步，这么做可以避免对交易组合完全重新定价，这一方法有时被称为**局部模拟方法**(partial simulation approach)。当使用历史模拟法时，也可以采取类似的做法。

21.7　不同方法的比较

我们讨论了两种计算 VaR 的方法：历史模拟法与模型构建法。模型构建法的优点是计算速度快，并且这一方法可以与第22章将讨论的波动率更新法较为容易地结合起来。模型构建法的主要缺点在于市场变量为多元正态分布的假设。在实践中，市场变量每天变化分布的尾部往往与正态分布有很大差别(例如，见表19-1)。

历史模拟法的优点是由历史数据可以决定市场变量的联合分布，它也避免了现金流映射过程。历史模拟法的主要缺点是其计算速度较慢，并且不太容易与波动率更新法结合使用[4]。

模型构建法的一个缺点是对于具有较低 Delta 的交易组合，它所给出的结果的精度较差(见作业题21.21)。

21.8　压力测试与回顾测试

除计算 VaR 外，许多公司也对其资产组合进行所谓的**压力测试**(stress testing)，其目的是检验资产组合在过去10~20年所出现的某些极端市场条件下的表现。

例如，为了检测美国市场股票价格极端变化对于交易组合价值的影响，一家公司可能会假设市场变量的百分比变化与1987年10月19日市场变量的百分比变化相同(在1987年10月19日这一天，S&P 500变化等于其标准差的22.3倍)。如果这一情形被认为太极端的话，这家公司也许会选择1988年1月8日的情形(这一天 S&P 500变化等于其标准差的6.8倍)。为了检验英国利率的极端变化对于交易组合的影响，一家公司可能会假设市场变量的百分比变化与1992年4月10日的市场变量的百分比变化相同(在这一天10年政府债券收益率变化等于其标准差的7.7倍)。

在压力测试中所用的情形有时会由公司高管制定，有时用到的一种技巧是要求公司高管定期见面，集体研讨在当前经济背景和全球不定性状况下，市场可能出现的极端情形。

有些极端情形在现实中确实会出现，但在所假设的概率分布下几乎不可能产生。一天的市场

---

[1] 就像在历史模拟法中那样，极值理论可以用来对尾部分布进行光滑处理，在处理之后我们可以得出极端分位的一个估计。

[2] 当交易组合包含期权时，N 天展望期的 VaR 等于一天展望期的 VaR 乘以 $\sqrt{N}$ 这一假设只是一个近似，但这种近似已被大多数实际操作采用。

[3] F. Jamishidan及 Y. Zhu 提出了限制重新定价次数的方法，参考"Scenario simulation model: theory and methodology," *Finance and Stochastics*, 1(1997): 43-67。

[4] 关于如何将历史模拟法与波动率更新算法的并用，参见 J. Hull and A. White, "Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk," *Journal of Risk* 1, No. 1(1998): 5-19。

变化超出 5 个标准差就是这样一种极端事件。在正态分布的假设下，这种事件是每 7 000 年才可能发生一次，而在实际生活中，这种情形并不是那么罕见，一天的市场变化为 5 个标准差的事件每 10 年会发生 1 ~2 次。

在 2007 年和 2008 年的信用危机后，监管部门提议计算**压力状态下的 VaR**(stressed VaR)。这是基于当市场变量在一定压力市场条件下(比如像 2008 年)，由历史模拟法所产生的 VaR。

不管采用什么样的方法来计算 VaR，一个重要的现实检验为**回顾测试**(back testing)。假定我们计算一天的 99% VaR，在回顾测试中，我们要找出交易组合的每天损失有多少次超出了一天的 99% VaR。如果超出了一天的 99% VaR 的天数大约占整体天数的 1%，应该对 VaR 模型表现感到欣慰。但是如果超出了一天的 99% VaR 的天数占整体天数的比例很大，比如为 7%，此时我们有理由对计算方法产生怀疑。

21.9 主成分分析法

一种可用来分析高度相关市场变量风险的方法是**主成分分析法**(principal component analysis)，这种方法以市场变量的历史变化数据为依据，并试图从中找出解释这些变化的主要成分或因素。

我们可以通过一个例子来更好地解释这一方法。我们考虑的市场变量是期限为 3 个月至 30 年的 10 个不同的美国国债利率，表 21-7 与表 21-8 给出了 Frye 的计算结果[㊀]。在计算中，Frey 采用了 1989 ~ 1995 年间的 1 543 天的观测数据。表 21-7 中第一列显示利率期限，其他列显示出描述利率变化的 10 个因子(主要成分)。第一个因子对应于利率曲线变化的平行移动，这一因子为表中的 PC1，一个单位的 PC1 对应的 3 个月利率增加量为 0.21 基点，6 个月利率的增加量为 0.26 个基点，并依此类推。第二个因子 PC2 对应于收益率曲线的**扭动**(twist)或曲线坡度的变化，3 个月和 2 年利率变化为同一方向，3 年和 30 年利率变化为另一方向。第三个因子 PC3 对应于**利率曲线弓伸**(bowing)现象，对应于这一因子，短期及长期利率朝同一方向移动，而中期利率会朝另一相反方向移动。对应于某一因子的利率变动被称为**因子载荷**(factor loading)，在我们的例子中，对于 3 个月期的第一个因子载荷为 0.21[㊁]。

表 21-7 美国国债数据的因子载荷

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10
3 个月	0.21	-0.57	0.50	0.47	-0.39	-0.02	0.01	0.00	0.01	0.00
6 个月	0.26	-0.49	0.23	-0.37	0.70	0.01	-0.04	-0.02	-0.01	0.00
12 个月	0.32	-0.32	-0.37	-0.58	-0.52	-0.23	-0.04	-0.05	0.00	0.01
2 年	0.35	-0.10	-0.38	0.17	0.04	0.59	0.56	0.12	-0.12	-0.05
3 年	0.36	0.02	-0.30	0.27	0.07	0.24	-0.79	0.00	-0.09	-0.00
4 年	0.36	0.14	-0.12	0.25	0.16	-0.63	0.15	0.55	-0.14	-0.08
5 年	0.36	0.17	-0.04	0.14	0.08	-0.10	0.09	-0.26	0.71	0.48
7 年	0.34	0.27	0.15	0.01	0.00	-0.12	0.13	-0.54	0.00	-0.68
10 年	0.31	0.30	0.28	-0.10	-0.06	0.01	0.03	-0.23	-0.63	0.52
30 年	0.25	0.33	0.46	-0.34	-0.18	0.33	-0.09	0.52	0.26	-0.13

㊀ 参考 J. Frye, "Principals of Risk: Finding VAR through Factor-Based Interest Rate Scenarios," in *VAR: Understanding and Applying Value at Risk*, pp. 275-88. London: Risk Publications, 1997。

㊁ 因子载荷有一性质：所有载荷因子的平方和为 1。

表 21-8　因子得分的标准差(基点)

PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10
17.49	6.05	3.10	2.17	1.97	1.69	1.27	1.24	0.80	0.79

因为有 10 个利率变量以及 10 个因子，通过对一线性十元方程求解，我们可以将任意一天的利率变化表达为变化因子的线性组合，任意一天利率变化对应某一因子的系数也被称为这一天利率变化的**因子得分**(factor score)。

因子的重要性是通过因子得分的方差来反映的，我们将例子中的因子得分的标准差在表 21-8 中按其重要性排列。表 21-8 的数字表示为基点数(即 0.000 1)。第一因子的一个标准差对应于 3 个月期的利率变化为 $0.21 \times 17.49 = 3.67$ 个基点；6 个月期的利率变化为 $0.26 \times 17.49 = 4.55$ 个基点，等等。

有关如何确定因子的详细内容将不在本章涉及，因子的选择标准是确保因子得分相互无关，了解这一点对我们已经足够了。在我们的例子中，第一因子得分(平行移动数量)与第二因子得分(扭动数量)在 1 543 个观察日内相互独立。因子得分的方差(也就是标准差的平方)具有以下性质：其和相加等于整个数据的方差。由表 21-8 得出，数据的整体方差(也就是 3 个月期的观察值的方差，6 个月期的观察值方差等)为

$$17.49^2 + 6.05^2 + 3.10^2 + \cdots + 0.79^2 = 367.9$$

由此可以看到第一个因子解释了 $17.49^2/367.9 = 83.1\%$ 的原始数据的变化；前两个因子解释了 $(17.49^2 + 6.05^2)/367.9 = 91.3\%$ 的数据变化；第三个因子又进一步解释了 2.6% 的数据变化。这说明，大部分利率变化中的风险可以由前两个或前三个因子来解释。这意味着我们可以将利率产品组合的风险同这些主要因子联系起来，因此我们并不需要考虑整个 10 个不同的利率。我们在图 21-7 中画出了表 21-7 给出的三个最重要的因子[⊖]。

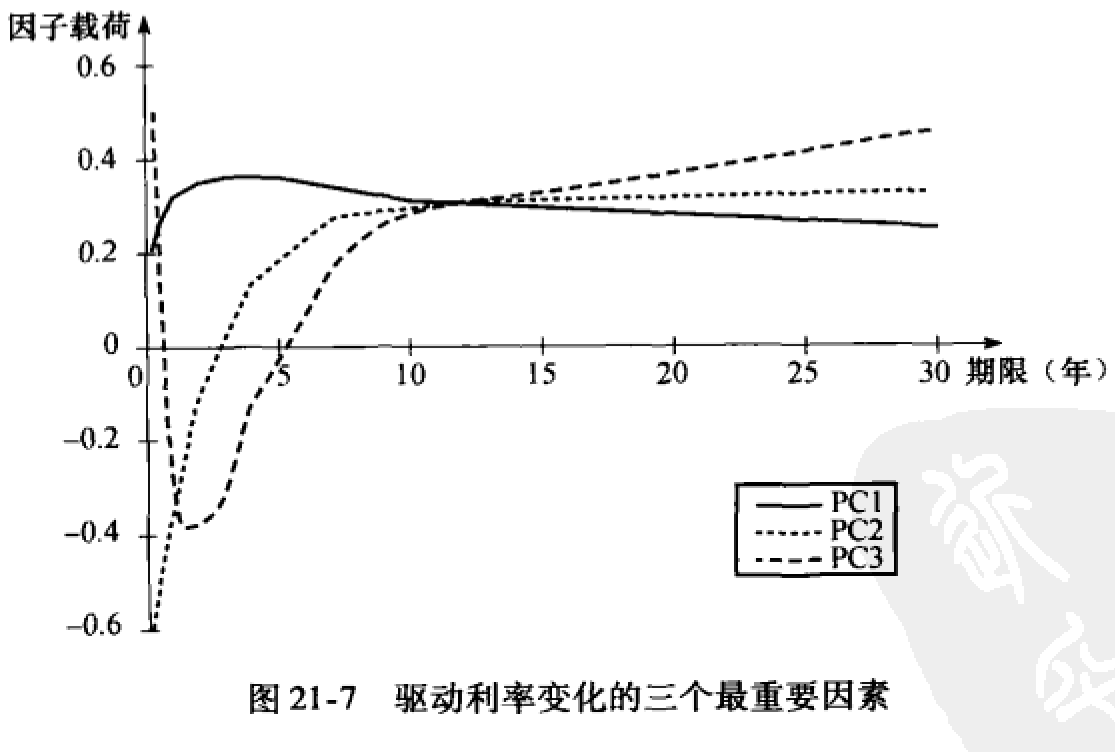


图 21-7　驱动利率变化的三个最重要因素

应用主成分分析法来计算 VaR

为了说明如何应用主成分分析法来计算 VaR，假定我们拥有一交易组合，其对于利率变化的敏感度如表 21-9 所示。一年期利率变化一个基点会触发组合价值增加 1 000 万，两年利率变化一

⊖ 将主成分分析法应用于任何一个国家的任意一收益曲线所得出的主要因子的含义和解释整体风险的数量与这里陈述的结论基本相同。

个基点会触发组合价值增加400万等。如果采用前两个因子来描述利率变化(如前所述，这两个因子解释了90%的利率变化)，应用表21-7中的数据，我们算出对于第一因子的敏感度(对于每一因子得分的一个基点变动所触发的以百万美元为单位的变动数量)为

$$10 \times 0.32 + 4 \times 0.35 - 8 \times 0.36 - 7 \times 0.36 + 2 \times 0.36 = -0.08$$

对于第二因子的敏感度为

$$10 \times (-0.32) + 4 \times (-0.10) - 8 \times 0.02 - 7 \times 0.14 + 2 \times 0.17 = -4.40$$

假定f_1及f_2为因子得分(以基点数为计量)，交易组合价值变化的一个很好的估计值为

$$\Delta P = -0.08f_1 - 4.40f_2$$

因子得分相互独立，表21-8给出了前两个因子的标准差，因此ΔP的标准差为

$$\sqrt{0.08^2 \times 17.49^2 + 4.40^2 \times 6.05^2} = 26.66$$

一天展望期的99% VaR等于26.66×2.33=62.12。注意，表21-9的数据显示交易组合对于第一因子的敏感性较低，而对于第二因子的敏感性较大，只采用第一因子(见练习题21.13)进行计算会大大低估VaR。因为在21.4节讨论的久期方法也只考虑了收益曲线的平行移动，所以久期方法也会大大低估VaR。

表21-9 与一个基点利率变化相对应的交易组合价值变化(以百万美元计)

1年期利率	2年期利率	3年期利率	4年期利率	5年期利率
+10	+4	-8	-7	+2

从理论上讲，除了对利率变量，主成分分析法也可用于其他市场变量。假定一家金融机构对于若干股指有风险暴露，主成分分析法可用来识别描述股指变化的因子，并且我们可以将最重要的因子来取代股指进行VaR的计算。主成分分析法的有效性取决于市场变量之间的相关性。

如本章前面所述，VaR的计算往往是将交易组合的真实变化与市场变量的百分比变化(Δx_i)结合起来。因此，为了计算VaR，对于市场变量的百分比变化而不是其真实变化进行主成分分析也许更为合理。

小 结

风险价值度(VaR)的计算是为了使管理人员在管理过程中对以下问题有一个好的认识"有X%的把握，在今后的N天，我们的损失不会超出V"，这里的变量V就是所谓的VaR，X%为置信度，N天为展望期。

一种计算VaR的方法为历史模拟法。在这一方法中，需要构造一段期限内市场变量每天变化的数据库，模拟计算的第一个抽样假定市场变量的百分比变化等于数据库所覆盖的第一天数据的百分比变化；计算中的第二个抽样假定市场变量的百分比变化等于数据库所覆盖的第二天数据的百分比变化；依此类推。对于任给的样本，我们可以计算出交易组合的变化值ΔP，最后由ΔP的概率分布的分位数中我们可以求得交易组合的VaR。

另外一种计算VaR的方法为模型构建法。以下两个条件满足时，该方法的应用较为简便：

- 资产组合价格变化(ΔP)同市场变量的百分比变化呈线性关系。
- 市场变量的百分比变化服从多元正态分布。

ΔP的分布也为正态，ΔP的方差与市场变量的波动率以及相关系数之间存在某种解析关系。从正态分布的性质出发，我们可以计算出VaR。

当资产组合中包括期权时，ΔP与市场变量的百分比变化不呈线性关系。当已知资产组合的Gamma时，我们可以推导一个ΔP与市场变量百分比变化之间的近似二次关系，然后可以利用蒙特卡罗模拟来估计VaR。

在第22章，我们将讨论如何对波动率及相关系数进行检测和估计。

推荐阅读

Artzner P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance*, 9 (1999): 203–28.

Basak, S., and A. Shapiro. "Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices," *Review of Financial Studies*, 14, 2 (2001): 371–405.

Beder, T. "VaR: Seductive but Dangerous," *Financial Analysts Journal*, 51, 5 (1995): 12–24.

Boudoukh, J., M. Richardson, and R. Whitelaw. "The Best of Both Worlds," *Risk*, May 1998: 64–67.

Dowd, K. *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*. New York: Wiley, 1998.

Duffie, D., and J. Pan. "An Overview of Value at Risk," *Journal of Derivatives*, 4, 3 (Spring 1997): 7–49.

Embrechts, P., C. Kluppelberg, and T. Mikosch. *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*. New York: Springer, 1997.

Frye, J. "Principals of Risk: Finding VAR through Factor-Based Interest Rate Scenarios" in *VAR: Understanding and Applying Value at Risk*, pp. 275–88. London: Risk Publications, 1997.

Hendricks, D. "Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data,"*Economic Policy Review*, Federal Reserve Bank of New York, 2 (April 1996): 39–69.

Hopper, G. "Value at Risk: A New Methodology for Measuring Portfolio Risk," *Business Review*, Federal Reserve Bank of Philadelphia, July/August 1996: 19–29.

Hua P., and P. Wilmott, "Crash Courses," *Risk*, June 1997: 64–67.

Hull, J.C., and A. White. "Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed," *Journal of Derivatives*, 5 (Spring 1998): 9–19.

Hull, J.C., and A. White. "Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk," *Journal of Risk*, 1, 1 (1998): 5–19.

Jackson, P., D.J. Maude, and W. Perraudin. "Bank Capital and Value at Risk." *Journal of Derivatives*, 4, 3 (Spring 1997): 73–90.

Jamshidian, F., and Y. Zhu. "Scenario Simulation Model: Theory and Methodology," *Finance and Stochastics*, 1 (1997): 43–67.

Jorion, P. *Value at Risk*, 3rd edn. New York: McGraw-Hill, 2007.

Longin, F.M. "Beyond the VaR," *Journal of Derivatives*, 8, 4 (Summer 2001): 36–48.

Marshall, C., and M. Siegel. "Value at Risk: Implementing a Risk Measurement Standard," *Journal of Derivatives* 4, 3 (Spring 1997): 91–111.

McNeil, A.J. "Extreme Value Theory for Risk Managers," in *Internal Modeling and CAD II*, London: Risk Books, 1999. See also: www.math.ethz.ch/~mcneil.

Neftci, S. "Value at Risk Calculations, Extreme Events and Tail Estimation," *Journal of Derivatives*, 7, 3 (Spring 2000): 23–38.

Rich, D. "Second Generation VaR and Risk-Adjusted Return on Capital," *Journal of Derivatives*, 10, 4 (Summer 2003): 51–61.

练习题

21.1 假定某交易组合由价值为100 000美元的资产A与价值为100 000美元的资产B组成，假定两项资产的日波动率均为1%，两项投资收益的相关系数为0.3，交易组合5天展望期的99% VaR为多少？

21.2 当利用模型构建法来计算VaR时，描述3种处理利率产品的不同方法。当采用历史模拟法时，你将如何对产品进行处理。

21.3 一家金融机构拥有一个标的变量为USD/GBP的汇率期权交易组合，交易组合的Delta为56.0，当前的汇率为1.5，推导交易组合价值变化与汇率变化之间的近

似线性关系式，如果汇率在一天内的波动率为 0.7%，10 天展望期的 99% VaR 为多少？

21.4 假定在练习题 21.3 中的交易组合 Gamma 为 16.2，这里已知的 Gamma 将如何影响交易组合价值变化与汇率百分比变化的关系式？

21.5 假定交易组合的每天价值变化同由 PCA 所计算出的两个因子呈很好的线性关系，交易组合对于第一个因子的 Delta 为 6，对于第二个因子的 Delta 为 -4，两个因子的标准差分别为 20 与 8，交易组合 5 天展望期的 90% VaR 为多少？

21.6 假定某公司的资产组合中含有股票、债券、汇率产品及商品，资产组合中不含衍生产品。解释以下两种计算 VaR 的方法的假设：(a) 线性模型，(b) 历史模拟法。

21.7 解释在计算 VaR 时，如何将利率互换的现金流映射成一个具有标准期限的零息债券的线性组合。

21.8 解释 VaR 与预期亏损的区别。

21.9 解释为什么线性模型对包含期权交易组合的 VaR 仅仅是提供了一个近似估计。

21.10 假定在过去的某一时间，某家公司进入一项以 150 万美元买入 100 万英镑的远期合约，这一远期合约在 6 个月后到期，6 个月零券息英国债券的日波动率为 0.06%（价格在转换成美元后），6 个月期限零券息美元债券的波动率为 0.05%，两个债券收益的相关系数为 0.8，当前的汇率为 1.53，计算远期合约一天（以美元计算）变化的标准差。10 天展望期的 99% VaR 是多少？在计算中假定英镑与美元 6 月期的利率为 5%，这里的利率为连续复利利率。

21.11 表 21-9 所对应的例子中假定了两个因子。当你分别假定有一个因子和三个因子时，计算结果会分别有什么样的变化？

21.12 一家银行拥有某一标的资产上的期权交易组合，期权组合的 Delta 为 -30，Gamma 为 -5，解释应如何理解这些数字？资产价格为 20，价格变化的日波动率为 1%，采用二次模型来计算交易组合价值变化的前 3 阶矩，采用 DerivaGem 软件中应用工具应用实例 E 来计算 VaR。

21.13 假设练习题 21.12 中交易组合对应于年波动率 1% 的变化的 Vega 为 -2，推导交易组合一天内的价值变化与 Delta、Gamma 及 Vega 的关系式。无须详细计算，大致解释如何应用这一模型来计算 VaR。

21.14 在 21.2 节，对于 4 个指数的例子，我们计算出组合的 1 天展望期 99% VaR 值为253 385美元。通过网页 www. rotman. utoronto. ca/~hull/OFOD/VaRExample 里的计算表，计算 1 天 95% VaR 和 1 天 97% VaR。

21.15 当 21.2 节中的 4 个参数组合在 4 个参数上的投资比重都一样时，利用第 21.2 里的基本方法与练习题 21.14 中的计算表计算 1 天 99% VaR。

作业题

21.16 一家公司持有债券交易组合的价值为 600 万美元，交易组合的修正久期为 5.2 年，假定利率曲线的变化只有平行移动形式，并且利率曲线变动的标准差为 0.09(利率以百分比计)，利用久期模型来估测 20 天展望期的 90% VaR，详细解释这里的 VaR 计算方式的缺点，给出两种更为准确的计算方法。

21.17 某交易组合构成为价值为 300 000 美元的黄金投资与价值为 500 000 美元的白银投资，假定以上两种资产变化日波动率分别为 1.8% 与 1.2%，并且两资产收益的相关系数为 0.6，交易组合 10 天展望期的 97.5% VaR 为多少？投资分散效应所减少的 VaR 数量为多少？

21.18 考虑对于某标的资产的期权交易组合，

假定交易组合的Delta为12，标的资产价格为10美元，标的资产每天价格变化的波动率为2%，由Delta来估计交易组合一天展望期95% VaR。接下来，假定交易组合的Gamma为-2.6，推导交易组合价值变化同标的资产价格每天变化的二次关系式。你将如何应用这一关系式来进行蒙特卡罗模拟。

21.19 一家公司持有2年期及3年期债券的长头寸及5年期债券的短头寸，每一个债券投资的面值为100美元，债券每年支付5%券息，计算公司投资对于1年、2年、3年、4年及5年利率的风险暴露头寸，采用表21-7及表21-8数据及以下不同的有关利率假设来计算20天展望期的95% VaR，利率变动分别由一个因子、两个因子和三个因子来解释。在计算中假定零息利率收益是水平的，为5%。

21.20 一家银行卖出了标的资产为某股票的看涨期权，同时银行又卖出了标的资产为另一家股票的看跌期权，看涨期权的标的资产股票价格为50，期权执行价格为51，标的资产变化波动率为每年28%，有效期为9个月；看跌期权的标的资产股票价格为20，执行价格为19，标的资产变化年波动率为25%，期权的到期日期为1年，两种股票均不支付股息，无风险利率是每年6%，两种股票收益的相关系数为0.4。采用以下方式计算10天展望期的99% VaR。

(a)只采用Delta。

(b)采用局部模拟法。

(c)采用整体模拟法。

21.21 风险管理人员的一个普遍的抱怨是，当资产组合的Delta接近于0时，模型构建法(无论是线性模型或二次模型)的结果都不是很好，采用DerivaGem软件应用工具中的应用实例E进行验证(对于不同的期权头寸，调整标的产品头寸来使得Delta为0)，并解释你的结果。

21.22 假设在21.2节所考虑的组合如下(以千美元计)：道琼斯工业指数上数量为3 000，富时指数上为3 000，CAC 40指数上为1 000，日经225上为3 000。利用前面所提到的工作表计算与在21.2节所得1天99% VaR结果的差。



第 22 章

估计波动率和相关系数

本章我们将解释如何从历史数据来估计当前和未来的波动率和相关系数。本章的内容与利用模型构建法计算风险价值度并与衍生产品定价有关系。在计算风险价值度时，我们对当前波动率和相关系数最感兴趣，这是因为我们是对交易组合在一个较短时间内的变化进行估计；在计算衍生产品价格时，我们往往需要对衍生产品整个期限内的波动率和相关系数进行预测。

本章将考虑一些名称很令人瞠目的波动率估计方法。例如，指数加权移动平均(exponentially weighted moving average，EWMA)、自回归条件异方差(auto-regressive conditional heteroscedasticity，ARCH)以及广义自回归异方差(generalized auto-regressive conditional heteroscedasticity，GARCH)等。这些方法的一个显著特点是它们都假设波动率和相关系数均不为常数。在某些时间段内波动率变化可能相对很低，而在其他时间段内变化可能相对很高。这些方法试图跟踪波动率随时间的变化。

22.1 估计波动率

定义 σ_n 为第 $n-1$ 天所估计的市场变量在第 n 天的波动率，第 n 天波动率的平方 σ_n^2 为**方差率**(variance rate)，在 14.4 节我们曾描述了如何从历史数据来估计 σ_n 的标准方法。假定市场变量在 i 天末的价格为 S_i。变量 u_i 定义为在第 i 天连续复利收益率(第 $i-1$ 天末至第 i 天末的收益)：

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

利用 u_i 在最近 m 天的观察数据所计算出的每天方差率 σ_n^2 的无偏估计为

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i}-\bar{u})^2 \tag{22-1}$$

其中 $\bar{u}$ 为 u_i 的平均值

$$\bar{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}$$

为了监测日方差率的变化，式(22-1)通常会有一些变动：

- u_i 被定义为市场变量在第 $i-1$ 天末与第 i 天末的价格百分比变化[1]

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \tag{22-2}$$

- $\bar{u}$ 被假设为零[2]。

---

[1] 这与 21.3 节计算 VaR 时所定义的波动率一致。

[2] 如 21.3 节解释的那样，这种假设对于方差估计的影响不大，这是因为每一天市场变化期望值远远小于市场变化的标准差。

- $m-1$ 被 m 代替[1]。

以上三个变化对计算结果影响不大，但这些变化会使得方差公式简化成

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}^2 \tag{22-3}$$

式中 u_i 由式(22-2)给出[2]。

加权权重的格式

在式(22-3)中，u_{n-1}^2，u_{n-2}^2，…，u_{n-m}^2中的所有项都有相同的权重。我们的目标是估计当前波动率 σ_n 的水平，因此将较大的权重用在最近的数据更有意义。一种这样的模型为

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2 \tag{22-4}$$

变量 α_i 为第 i 天以前观察值所对应的权重，α 取正值。当选择这些变量时，如果 $i>j$，则 $\alpha_i<\alpha_j$，也就是我们将较少的权重给予较旧的数据。权重之和必须为 1，即

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

对于式(22-4)可以做一推广。假定存在某一长期平均方差，并且应当给予该方差一定权重，这将导致以下形式的模型

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2 \tag{22-5}$$

其中 V_L 为长期方差率，γ 为 V_L 所对应的权重，因为权重之和仍为 1，我们有

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

此模型就是最先由 Engle 提出的 ARCH(m)模型。[3]在这一模型中，方差的估计值是基于长期平均方差以及 m 个观察值，观察数据越陈旧所对应的权重就越小。令 $\omega=\gamma V_L$，我们可以将式(22-5)写成

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2 \tag{22-6}$$

在接下的两节中我们将讨论两种测算波动率的重要方法，这两种方法均采用了式(22-4)及式(22-5)中的想法。

22.2　指数加权移动平均模型

指数加权移动平均模型(EWMA)是式(22-4)的一个特殊形式，其中权重 α_i 随着时间以指数速度递减，具体地讲，$\alpha_{i+1}=\lambda\alpha_i$，其中 λ 是介于 0 与 1 之间的某一常数。

在以上特殊假设下，更新波动率公式被简化为

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2 \tag{22-7}$$

一个变量第 n 天的波动率估计值(在第 $n-1$ 天估算)σ_n 由第 $n-1$ 天波动率估计值 σ_{n-1}(在第 $n-2$ 天估算)和变量在最近一天变化百分比 u_{n-1}决定。

为了说明式(22-7)的权重以指数速度下降，我们将式(22-7)所算出的 σ_{n-1}^2代入公式中

---

[1] 用 m 来代替 $m-1$ 将波动率从无偏差估计变成了极大似然估计。本章后面的内容将讨论极大似然估计。

[2] 注意，这一章中的变量 u 所起的作用与第 21 章中的 Δx 作用一样，这两个变量均为每天变量的百分比变化。对于 u 来讲，其下标代表关于同一市场变量，不同天数的观察值；对于 Δx 来讲，其下标代表在同一天，不同变量的取值。类似地，这两章中的 σ 下标含义也不同，在本章下标代表天数；在第 20 章，下标代表不同的市场变量。

[3] 见 R. Engle, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation," *Econometrica*, 50 (1982), 987-1008。

$$\sigma_n^2 = \lambda[\lambda\sigma_{n-2}^2 + (1-\lambda)u_{n-2}^2] + (1-\lambda)u_{n-1}^2$$

即

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2) + \lambda^2\sigma_{n-2}^2$$

代入 σ_{n-2}^2项，进一步得出

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2) + \lambda^3\sigma_{n-3}^2$$

重复计算，得出

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}u_{n-i}^2 + \lambda^m\sigma_{n-m}^2$$

当 m 很大时，$\lambda^m\sigma_{n-m}^2$项数量小到可以忽略，所以当 $\alpha_i = (1-\lambda)\lambda^{i-1}$时，式(22-7)与式(22-4)等价，对应于 u_i 的权重以 λ 速度随时间向前推移而递减，每一项权重是前一项权重与 λ 的乘积。

【例 22-1】 假如 λ 为 0.90，对应于第 $n-1$ 天由市场变量所估测的日波动率为 1%。在第 $n-1$天，市场变量增加了 2%，这意味着 $\sigma_{n-1}^2 = 0.01^2 = 0.0001$ 以及 $u_{n-1}^2 = 0.02^2 = 0.0004$，由式(22-7)，我们得出

$$\sigma_n^2 = 0.9 \times 0.0001 + 0.1 \times 0.0004 = 0.00013$$

因此，第 n 天波动率 σ_n 的估计为 $\sqrt{0.00013}$，即每天 1.14%。注意 u_{n-1}^2的期望值为 σ_{n-1}^2，也就是 0.0001，这一例子中的 u_{n-1}^2所对应的实际值比期望值要大，因此我们对于波动率的估计会逐渐增加。当 u_{n-1}^2的实际数值小于期望值时，我们对于波动率的估计值将会减小。

EWMA 方法的诱人之处是其仅需要相对较少的数据。对于任一时刻，我们只需要记忆对当前波动率的估计以及市场变量的最新观察值。当我们得到市场变量最新观察值后，就可以计算当天价格的变化的百分比，然后利用式(22-7)就可以更新方差估计。旧的方差估计与旧的市场变量可以被舍弃。

EWMA 方法的出发点是对波动率变化进行跟踪监测，假定市场变量在 $n-1$ 天有一较大的变化，即 u_{n-1}^2很大，由式(22-7)可以看出，这时对当前变化率的估计将会增加。数值 λ 决定了日波动率估计对于最新市场价格百分比变化的反应。在计算 σ_n 时，一个较低的 λ 将会给 u_{n-1}^2一个较大的权重，此时每天所估计的波动率本身也会很大。一个较大的 λ(接近于 1.0)将会使日波动率的估计对每天百分比变化所提供的信息有较慢的反应。

由摩根大通最先引入，在 1994 年发表的 RiskMetric 数据中采用 $\lambda = 0.94$ 时的 EWMA 模型来更新对日波动率的估计。摩根大通发现对应于许多市场变量，这一选定的 λ 所对应的方差预测与实际方差非常接近[㊀]，这里的实际方差是在连续前 25 天内所观察的 u_i^2 数值的等权平均值。

22.3 GARCH(1，1)模型

我们现在讨论由 Bollerslev 于 1986 年提出的 GARCH(1，1)模型[㊁]，GARCH(1，1)模型与 EWMA 模型的不同就好比式(22-4)与式(22-5)的不同。在 GARCH(1，1)中，σ_n^2是由长期平均方差 V_L 以及 u_{n-1}和 σ_{n-1}计算得出，GARCH(1，1)表达式为

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2 \tag{22-8}$$

式中 γ 为对应于 V_L 的权重，α 为对应于 u_{n-1}^2的权重，β 为对应于 σ_{n-1}^2的权重。因为权重之和为 1.0，我们有

㊀ 见 J. P. Morgan，*Risk Metrics Monitor*，Fourth Quarter，1995。本章我们采用另一方法(极大似然估计)来估计参数。

㊁ 见 T. Bollerslev，"Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity，"*Journal of Econometrics*，31(1986)：307-327。

$$\gamma + \alpha + \beta = 1$$

EWMA 模型是 GARCH(1, 1)模型对应于 $\gamma=0$，$\alpha=1-\lambda$ 及 $\beta=\lambda$ 的特例。

GARCH(1, 1)模型的(1, 1)表示 σ_n^2 是由最近的 u^2 的观察值以及最新的方差率估计而得出。在更广义的 GARCH(p, q)模型中，σ_n^2 是最近的 p 个 u^2 观察值及 q 个最新方差率估计而得出的[⊖]，GARCH(1, 1)是最流行的 GARCH 模型。

令 $\omega=\gamma V_L$，我们可以将 GARCH(1, 1)模型写成

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2 \tag{22-9}$$

在估计模型的参数时，通常会采用这种形式，一旦 ω、α 和 β 被估算，我们可由 $\gamma=1-\alpha-\beta$ 来计算 γ，长期方差 $V_L=\omega/\gamma$。为了保证 GARCH(1, 1)模型的稳定，我们需要 $\alpha+\beta<1$，否则对应于长期方差的权重会为负值。

【例 22-2】 假设某一由每天观测数据估算出的 GARCH(1, 1)模型为

$$\sigma_n^2 = 0.000\,002 + 0.13u_{n-1}^2 + 0.86\sigma_{n-1}^2$$

这对应于 $\alpha=0.13$，$\beta=0.86$ 以及 $\omega=0.000\,002$。这时 $\gamma=1-\alpha-\beta=0.01$。由 $\omega=\gamma V_L$，我们得出 $V_L=0.000\,2$。换句话讲，由模型隐含出的长期每天方差平均为0.0002，对应的波动率为 $\sqrt{0.000\,2}=0.014$，即每天 1.4%。

假设对应于 $n-1$ 天的日波动率估算值为 1.6%，因此 $\sigma_{n-1}^2=0.016^2=0.000\,256$，又假设 $n-1$ 天市场价格降低 1%，即 $u_{n-1}^2=0.01^2=0.000\,1$，因此

$$\sigma_n^2 = 0.000\,002 + 0.13\times0.000\,1 + 0.86\times0.000\,256 = 0.000\,235\,16$$

对于波动率的最新估计为 $\sqrt{0.000\,235\,16}=0.0153$，即每天 1.53%。

22.3.1 权重

将 σ_{n-1}^2 代入式(22-9)，我们可得

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta(\omega + \alpha u_{n-2}^2 + \beta\sigma_{n-2}^2)$$

即

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \beta^2\sigma_{n-2}^2$$

代入 σ_{n-2}^2，我们得到

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \beta^2\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \alpha\beta^2 u_{n-3}^2 + \beta^3\sigma_{n-3}^2$$

以这种形式继续下去，我们可以看到对应于 u_{n-i}^2 的权重为 $\alpha\beta^{i-1}$，权重以 β 指数速度下降，参数 β 可被解释为衰减率(decay rate)，这与 EWMA 中的 λ 系数近似，在决定最新方差时，此系数决定了不同 u 的重要性。例如，$\beta=0.9$ 说明 u_{n-2}^2 的重要性只是 u_{n-1}^2 的 90%；u_{n-3}^2 只是 u_{n-1}^2 重要性的 81%，等等。GARCH(1, 1)与 EWMA 模型类似，其不同之处是除了对过去的 u^2 权重按指数下降的同时，对于长期平均浮动率赋予了一定的权重。

22.3.2 均值回归

随着时间的变化，GARCH(1, 1)模型中的方差率会被拉回到其长期平均水平 V_L，对应于 V_L

⊖ 有人已经提出有关公司非对称信息的 GARCH 模型，在这些模型设计中 σ_n 与 u_{n-1} 的符号有关。可以讲，这种模型对应于股票价格而言，比 GARCH(1, 1)更合适。如第 19 章所述，股票的波动率常常与价格有反向关系，因此一个符号为负的 u_{n-1} 比一个符号为正的 u_{n-1} 对于 σ_n 的影响更大。关于处理非对称信息的模型，读者可参考 D. Nelson，"Conditional Heteroscedasticity and Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59(1990), 347-370 以及 R. F. Engle and V. Ng，"Measuring and Testing the Impact of News on Volatility," *Journal of Finance*, 48(1993): 1749-1778。

的权重为$\gamma=1-\alpha-\beta$。GARCH(1，1)模型与以下关于V的随机过程等价

$$\mathrm{d}V=a(V_L-V)\mathrm{d}t+\xi V\mathrm{d}z$$

其中时间是以天数为计量，$a=1-\alpha-\beta$，以及$\xi=\alpha\sqrt{2}$(见练习题22.14)，以上模型具有均值回归的特性。方差以速度a被拉回到V_L。当$V>V_L$时，方差的漂移项为负；当$V<V_L$时，方差的漂移项为正。模型在漂移率上附加了波动率ξ。第26章将进一步讨论这一模型。

22.4 模型选择

在实际中，方差值常常会被拉到长期平均值水平，这种现象被称为**均值回归**(mean reversion)。GARCH(1，1)模型有均值回归的特性，而EWMA没有均值回归特性，从理论上讲，GARCH(1，1)比EWMA更具有诱人之处。

在22.5节，我们将讨论如何估计GARCH(1，1)中ω、α、β等最佳匹配(best fit)参数，当参数ω为零时，GARCH(1，1)退化为EWMA，在某些场合，最佳匹配参数ω为负，对应的GARCH(1，1)模型不稳定，此时采用EWMA模型更为合理。

22.5 极大似然估计法

我们现在讨论如何由历史数据来估计以上所讨论模型中的参数，这里将要讨论的方法被称为**极大似然方法**(maximum likelihood method)。在参数估计过程中这一方法会涉及选择合适的参数以使得数据发生的**几率**(likelihood)达到最大。

为了阐明这种方法，我们引用一个简单例子。我们随机地抽取某一天内10只股票的价格，我们发现其中一只股票价格在这一天价格下跌了，而其他9只股票的价格没变或有所增加。这时，股票价格下跌的概率最好估计为多少？一种自然的答案是0.1，让我们看一下这一结果是否就是极大似然估计所给出的结果。

将股票价格下跌的概率计为p，对应只有一只股票价格下降，而其他股票价格不下降的概率为$p(1-p)^9$。应用极大似然估计方法，最好的估计值p会使得$p(1-p)^9$取得最大值。将以上表达式对p求导，并令导数为0，我们得出$\hat{p}=0.1$时会使得表达式取得最大值，这说明极大似然估计值为0.1，正如我们所期望的那样。

22.5.1 估计常数方差

在下一个有关极大似然方法的例子中，我们考虑如何由服从正态分布，并且用期望值为0的变量X的m个观察值来估计这一变量的方差。我们假定观察值为u_1，u_2，…，u_m。将方差记为v。将观察值出现在$X=u_i$的概率定义成X的概率密度函数在u_i的取值，即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(\frac{-u_i^2}{2v}\right)$$

m个观察值正好为u_1，u_2，…，u_m的概率为

$$\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(\frac{-u_i^2}{2v}\right)\right]\tag{22-10}$$

应用最大似然方法，v的最好估计使得以上表达式达到最大值。

以上表达式的最大化与其对应的对数最大化等价，对式(22-10)取对数并且忽略常数项，我们得出被最大化的目标函数为

$$\sum_{i=1}^{m}\left[-\ln(v)-\frac{u_i^2}{v}\right]\tag{22-11}$$

或

$$-m\ln(v)-\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^2}{v}$$

将以上表达式对 v 求导，并令导数为 0，我们可以看到 v 的极大似然估计为

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}u_i^2$$

22.5.2　估计 GARCH(1，1)模型中的参数

我们现在考虑如何用极大似然方法来估计 GARCH(1，1)或其他更新波动率方法中的参数，定义 $v_i=\sigma_i^2$ 为第 i 天的方差的估计，在给定方差的条件下，u_i 的概率分布为正态。与上面类似，我们得出最佳参数应使得以下表达式最大化

$$\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi v_i}}\exp\left(\frac{-u_i^2}{2v_i}\right)\right]$$

取对数后，得出以上表达式最大化与以下表达式最大化等价

$$\sum_{i=1}^{m}\left[-\ln(v_i)-\frac{u_i^2}{v_i}\right] \tag{22-12}$$

除了 v 被代替为 v_i，这一表达式与式(22-11)相同，我们可以采用迭代法来求取使得式(22-12)达到最大化的解。

表 22-1 中所示的计算表给出 GARCH(1，1)模型中的参数估算过程，该表分析了 2005 年 7 月 18 日至 2010 年 8 月 13 日的 S&P 500 的数据[⊖]，表中的数字是对 GARCH(1，1)模型里 3 个参数 ω、α 和 β 的估计，表中第一列对应于日期，第二列对应天数，第三列显示 S&P 500 结束时的 S_i，第四列显示了由第 $i-1$ 天结束时至第 i 天结束时 S&P 500 的百分比变化，即 $u_i=(S_i-S_{i-1})/S_{i-1}$，在第五列是对在第$i-1$ 所做的对第 i 天的方差率的估计，$v_i=\sigma_i^2$。在第三天开始，我们将方差设

表 22-1　估计 S&P 500 在 2005 年 7 月 18 日至 2010 年 8 月 13 日 GARCH(1，1)模型中的参数

日　期	*Day i*	S_i	u_i	$v_i=\sigma_i^2$	$-\ln(v_i)-u_i^2/v_i$
2005 年 7 月 18 日	1	1221.13			
2005 年 7 月 19 日	2	1229.35	0.006 731		
2005 年 7 月 20 日	3	1 235.20	0.004 759	0.000 045 31	9.502 2
2005 年 7 月 21 日	4	1 227.04	−0.006 606	0.000 044 47	9.039 3
2005 年 7 月 22 日	5	1 233.68	0.005 411	0.000 045 46	9.354 5
2005 年 7 月 25 日	6	1 229.03	−0.003 769	0.000 045 17	9.690 6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2010 年 8 月 11 日	1 277	1 089.47	−0.028 179	0.000 118 34	2.332 2
2010 年 8 月 12 日	1 278	1 083.61	−0.005 379	0.000 175 27	8.484 1
2010 年 8 月 13 日	1 279	1 079.25	−0.004 024	0.000 163 27	8.620 9
					10 228.234 9

估计 GARCH 模型中的参数
$\omega=0.000\,001\,347$　$\alpha=0.083\,39$　$\beta=0.910\,1$

⊖ 这些数据可从 www. rotman. utoronto. ca/~hull/data 上下载。

为 u_2^2，在接下去的每一天，我们采用式(22-9)来估计方差，第六列为似然性测度 $-\ln(v_i)-u_i^2/v_i$，第五列及第六列中的数据是基于当前参数 ω，α 及 β 的最新估计，我们的目标是如何选取 ω，α 及 β 以使得第六列中数值的和达到最大值，这一过程涉及迭代搜索过程[⊖]。

在我们的例子中，参数的最优解为

$$\omega = 0.000\,001\,366,\quad \alpha = 0.083\,394,\quad \beta = 0.910\,116$$

式(22-12)的最大值为 10 228.234 9。在表 22-1 中所显示的数字对应于参数 ω，α 及 β 的最终迭代解。

在我们的例子中，长期方差 V_L 为

$$\frac{\omega}{1-\alpha-\beta} = \frac{0.000\,001\,366}{0.006\,490} = 0.000\,207\,5$$

长期波动率为 $\sqrt{0.000\,207\,5}$，也就是每天 1.44%。

图 22-1 和图 22-2 显示了 S&P 500 指数与其 GARCH(1，1)波动率在数据所包括的 5 年内的变化。在大多数时间，波动率小于 2%。但是在金融危机期间波动率经历了高达每天 5% 的情形(这个期间的高波动率也表现在 VIX 指数上，见 14.11 节)。

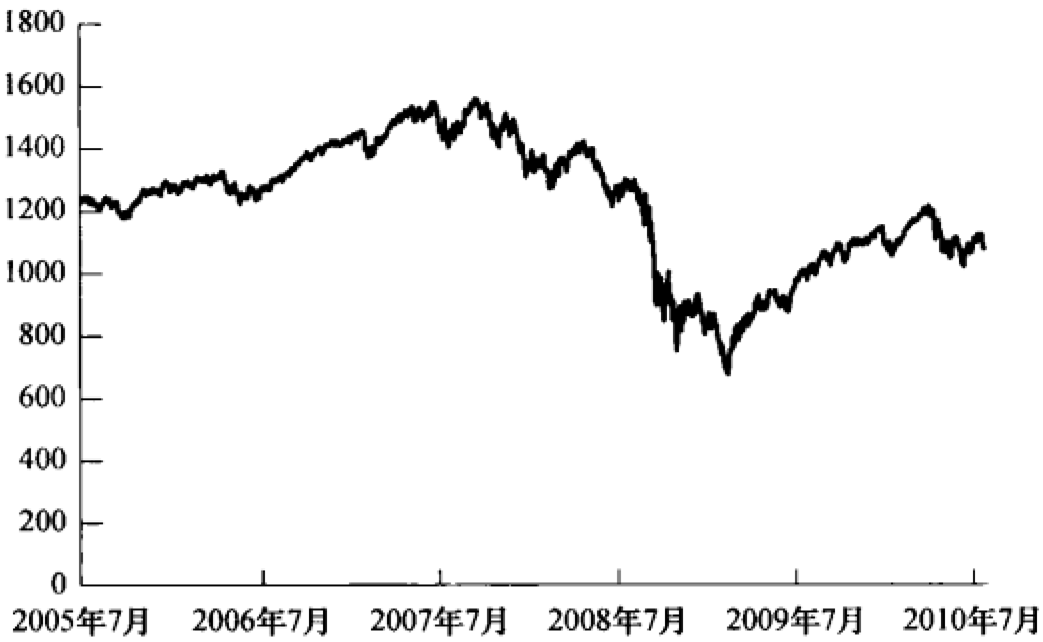


图 22-1 S&P 500 指数：2005 年 7 月 18 日到 2010 年 8 月 13 日

另一种有时会更可靠的估计 GARCH(1，1)参数的做法是所谓的**方差目标**(variance targeting)法[⊜]，这种方法将长期平均方差 V_L 设定为由数据计算出的样本方差(或其他合理的估计)，因为 ω 等于 $V_L(1-\alpha-\beta)$，因此模型只需要估计两个参数，表 22-1 的数据所对应的样本方差为 0.000 241 2，对应的每天变动率为 1.553 1%，令 V_L 等于样本方差，我们可以找出使得目标函数(22-12)达到最大化的 α 及 β 分别为 0.084 45 以及 0.910 1，相应目标函数取值为 10 228.194 1，这一数字只是稍稍低于前面计算的极值数据 10 228.234 9。

当使用 EWMA 模型时，参数估计过程就相对简单一些，因为 $\omega=0$，$\alpha=1-\lambda$ 及 $\beta=\lambda$，因此我们只需要估计一个参数，应用表 22-1 的数据，使得目标函数(22-12)取得极大值的 λ 为 0.937 4，对应的目标函数取值为 10 192.510 4。

GARCH(1，1)及 EWMA 方法均可以通过 Excel 软件中的 Solver 功能得以实现，应用 Solver 我们可以寻求使得似然函数达到最大的数值解，当计算表格中所寻求的数值解大体在同一水平时，Solver 功能表现令人满意。例如，在 GARCH(1，1)模型中，我们可以将计算表中的单元(cells) A1，A2，

⊖ 就像在今后会讨论的那样，微软软件 Excel 中的广义求解算法 Solver 可能用来对问题求解，其他特殊办法，像 Levenberg-Marguardt 算法也可能用来对问题求解。关于求解算法参考 W. H. Press，B. P. Flannery，S. A. Teukolsky，and W. T. Vetterling，*Numerical Recipes in C*：*The Art of Scientific Computing*，Cambridge University Press，1988。

⊜ 见 R. Engle and J. Mezrich，"GARCH for Groups，"*Risk*，August 1996：36-40。

A3 与数据$\omega\times10^5$，α 及 0.1β 相对应。然后我们可以使得单元 B1 = A1/100 000，B2 = A2 以及 B3 = A3，我们通过 B1，B2，B3 来计算似然函数。我们可以让 Solver 计算 A_1、A_2、A_3 上使似然函数得到最大的值。因为有时 Solver 会给出一个局部解，所以我们应当给参数一些不同的初始值。

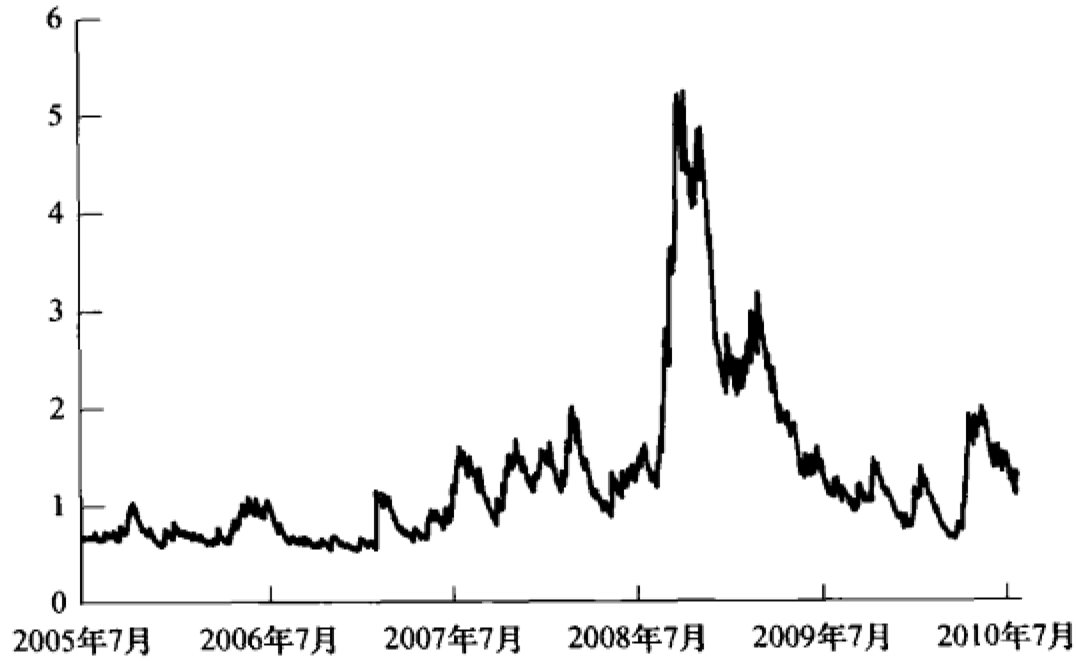


图 22-2 S&P 500 指数的日波动率：2005 年 7 月 18 日到 2010 年 8 月 13 日

22.5.3 模型表现如何

GARCH 模型假设了波动率随时间变化，在一些阶段波动率较高，而在其他阶段波动率较低。换一种形式讲，当 u_i^2 较高时，u_{i+1}^2，u_{i+2}^2，…有增大的趋势；当 u_i^2 较低时，u_{i+1}^2，u_{i+2}^2，…有降低的趋势，我们可以通过计算**自相关系数**(autocorrelation)来检验这些结论正确性。

我们假定 u_i^2 确实有自相关性，如果 GARCH 模型有效，自相关性就会被剔除，我们通过计算变量 u_i^2/σ_i^2 的自相关系数来验证这一结论。如果它们的自相关系数很小，我们可以说 σ_i 的模型确实解释了 u_i^2 中的自相关性。

表 22-2 显示的结果是基于上面的 S&P 500 数据结果，第一列显示计算自相关系数所用的**时滞**(time lag)，第二列对应于 u_i^2 自相关系数，第三列展示了 u_i^2/σ_i^2 的自相关系数[⊖]。表中结果表明，对应于 1～15 之间的所有的时滞，u_i^2 的自相关系数均为正，而对于 u_i^2/σ_i^2，有些自相关系数为正而有些为负，而且这些相关系数的幅度比最初 u_i^2 的相关系数要小得多。

表 22-2 采用 GARCH 模型之前与之后的 S&P 500 自相关系数

时滞	u_i^2 自相关	u_i^2/σ_i^2 自相关	时滞	u_i^2 自相关	u_i^2/σ_i^2 自相关
1	0.183	-0.063	9	0.324	0.041
2	0.385	-0.004	10	0.269	-0.083
3	0.160	-0.007	11	0.431	-0.007
4	0.301	0.022	12	0.286	0.006
5	0.339	0.014	13	0.224	-0.001
6	0.308	-0.011	14	0.121	-0.017
7	0.329	0.026	15	0.222	-0.031
8	0.207	0.038			

⊖ 数列 x_i 对应于时滞 k 的自相关系数等于 x_i 与 x_{i+k} 的相关系数。

看来 GARCH 模型对于解释数据确实很有效。如果想进行一个更为科学的检验，我们可以采用所谓的 Ljung-Box 统计方法[⊖]。当一个数列中有 m 个观察值时，Ljung-Box 统计量定义为

$$m\sum_{k=1}^{K} w_k \eta_k^2$$

其中 η_k 对应于时滞为 k 的自相关系数，K 为考虑所有的时滞，以及

$$w_k = \frac{m+2}{m-k}$$

对于 $K=15$，当 Ljung-Box 统计量大于 25 时，我们可以有 95% 的把握拒绝自相关系数为 0 这一假设。

在表 22-2 中，关于 u_i^2 数列的 Ljung-Box 统计值为 1 566，这说明自相关性确实存在。关于数列 u_i^2/σ_i^2，Ljung-Box 统计值为 21.7，这说明 GARCH 模型确实剔除了数据中的自相关性。

22.6 采用 GARCH(1，1)模型来预测波动率

采用 GARCH(1，1)模型，在 $n-1$ 天结束时所估计的第 n 天的方差为

$$\sigma_n^2 = (1-\alpha-\beta)V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$$

因此

$$\sigma_n^2 - V_L = \alpha(u_{n-1}^2 - V_L) + \beta(\sigma_{n-1}^2 - V_L)$$

在将来第 $n+t$ 天，我们有

$$\sigma_{n+t}^2 - V_L = \alpha(u_{n+t-1}^2 - V_L) + \beta(\sigma_{n+t-1}^2 - V_L)$$

u_{n+t-1}^2 的期望值为 σ_{n+t-1}^2，因此

$$E[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha+\beta)E[\sigma_{n+t-1}^2 - V_L]$$

其中 E 表示期望值。重复应用这一方程，我们得出

$$E[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha+\beta)^t(\sigma_n^2 - V_L)$$

或者

$$E[\sigma_{n+t}^2] = V_L + (\alpha+\beta)^t(\sigma_n^2 - V_L) \tag{22-13}$$

以上方程采用了在 $n-1$ 天结束时所有数据来预测第 $n+t$ 天的波动率。在 EWMA 模型中，$\alpha+\beta=1$，式(22-13)说明，将来方差率的期望值与目前方差率相等。当 $\alpha+\beta<1$ 时，方程中最后一项随时间增加而逐渐减小。图 22-3 显示出目前方差率与 V_L 不同时，方差率在将来的预期路径。像前面讨论的那样，方差率具备均值回归的性质，均值回归水平为 V_L，回归速度为 $1-\alpha-\beta$。我们对将来方差率的预测，会随着展望时间的延长逐渐趋向于 V_L，这一分析强调了为保证 GARCH(1，1)模型的稳定，我们必须有 $\alpha+\beta<1$ 这一条件。当 $\alpha+\beta>1$ 时，对应于长期平均方差的权重为负，这时方差不具备均值回归性态，事实上此时的模型具备**均值逃离**(mean fleeing)的性态。

在我们之前考虑的 S&P 500 一例中，$\alpha+\beta=0.993\,5$ 和 $V_L=0.000\,207\,5$。假定我们对于当前方差的估计为每天 0.000 3(这对应于日波动率为 1.732%)，10 天后的方差期望值为

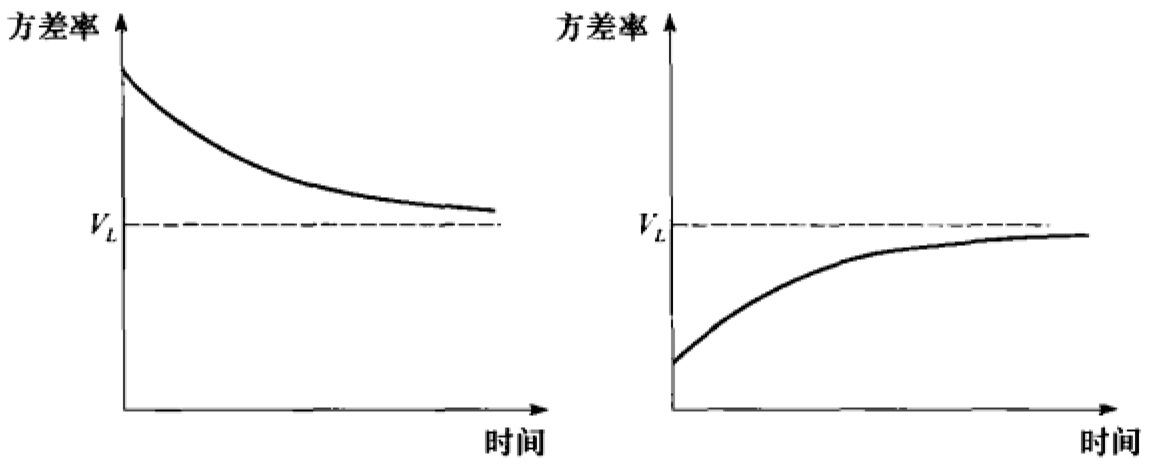
$$0.000\,207\,5 + 0.993\,5^{10}(0.000\,3 - 0.000\,207\,5) = 0.000\,294\,2$$

日波动率的期望值为 1.72%，这一数值仍然高于长期波动率(1.44%)，但是 500 天后的预期方差为

$$0.000\,207\,5 + 0.993\,5^{500}(0.000\,3 - 0.000\,207\,5) = 0.000\,211\,0$$

日波动率的期望值为 1.45%，这与长期波动率已经非常接近。

⊖ 见 G. M. Ljung and G. E. P. Box, "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models," *Biometrica*, 65 (1978): 297-303。



a）目前方差高于长期平均方差　　b）目前方差低于长期平均方差

图 22-3　对应于两种情形预期方差的曲线

22.6.1　波动率期限结构

假定今天为第 n 天，定义

$$V(t) = E(\sigma_{n+t}^2)$$

与

$$a = \ln \frac{1}{\alpha + \beta}$$

式(22-13)变为

$$V(t) = V_L + e^{-at}[V(0) - V_L]$$

这里的 $V(t)$ 为对第 t 天的**瞬时方差**(instantaneous variance)的估计，介于今天与时间 T 之间的方差率平均值为

$$\frac{1}{T}\int_0^T V(t)\,\mathrm{d}t = V_L + \frac{1 - e^{-aT}}{aT}[V(0) - V_L]$$

T 越大，以上数值会越接近 V_L。定义 $\sigma(T)$ 为利用 GARCH(1，1)模型对一个期限为 T 天的期权定价时所采用的年波动率，假定每年有 252 天，$\sigma(T)^2$ 是平均每天方差的 252 倍，因此

$$\sigma(T)^2 = 252\left\{V_L + \frac{1 - e^{-aT}}{aT}[V(0) - V_L]\right\} \tag{22-14}$$

如在第 19 章中的讨论，对于同一标的资产，我们常常采用不同期权的市场价格来计算**波动率期限结构**(volatility term structure)，这一期限结构就是期权隐含波动率与期限之间的内在关系。式(22-14)可以用来估算基于 GARCH(1，1)模型的波动率期限结构，由此所估计的期限结构同实际的期限结构有所不同，但这种方法确实常常用于预测实际波动率的变化形式与波动率变动的关系。

当目前波动率高于长期波动率时，GARCH(1，1)模型预测的波动率结构为**下降型**(downward-sloping)；而当目前波动率低于长期波动率时，GARCH(1，1)预测的波动率期限为**上升型**(upward-sloping)。对于前面 S&P 500 数据，$a = \ln(1/0.993\,51) = 0.006\,511$ 和 $V_L = 0.000\,207\,5$。假定目前的每天方差估计 $V(0) = 0.000\,3$，由式(22-14)得出

$$\sigma(T)^2 = 252\left(0.000\,207\,5 + \frac{1 - e^{-0.006\,511T}}{0.006\,511T}\right)(0.000\,3 - 0.000\,207\,5)$$

式中时间 T 以天计算，表 22-3 显示出对应于不同时间 T 的年波动率。

表 22-3　由 GARCH(1，1)模型预测的 S&P 500 的波动率

期权期限(天数)	10	30	50	100	500
期权波动率(%，每年)	27.36	27.10	26.87	26.35	24.32

22.6.2 波动率变化的影响

式(22-14)可以写为

$$\sigma(T)^2 = 252\left[V_L + \frac{1-e^{-aT}}{aT}\left(\frac{\sigma(0)^2}{252} - V_L\right)\right]$$

当 $\sigma(0)$ 的变化量为 $\Delta\sigma(0)$ 时，$\sigma(T)$ 的变化量大约为

$$\frac{1-e^{-aT}}{aT}\frac{\sigma(0)}{\sigma(T)}\Delta\sigma(0) \tag{22-15}$$

对于前面 S&P 500 的数据，表 22-4 显示了波动率的变动对于不同期限的期权价格的影响。类似以前的假定，$V(0)=0.0003$，因而 $\sigma(0)=\sqrt{252}\times\sqrt{0.0003}=27.5\%$。表中考虑的情形为**瞬时波动率**(instantaneous volatility)由 27.5% 变为 28.5%，即 100 个基点的变化，这意味着 $\Delta\sigma(0)=0.01$，即 1%。

当确定交易组合对波动率变化的风险暴露时，许多金融机构采用与此类似的分析方法。在计算 Vega 时，与其考虑将所有期限的隐含波动率增加 1%，他们将波动率的变化量与期限联系起来，在表 22-4 中，10 天期权的波动率增加量为 0.97%，30 天期权的波动率增加量为 0.92%，50 天期权波动率增加量为 0.87%，等等。

表 22-4 由 GARCH(1，1)模型预测的即期波动率增加 1%所带来的效应

期权期限(天数)	10	30	50	100	500
波动率增长(%)	0.97	0.92	0.87	0.77	0.33

22.7 相关系数

到目前为止，我们仅仅是围绕对波动率的预测进行讨论。如第 21 章所示，在计算 VaR 时，波动率也起着很重要的作用。在本节，我们将说明如何采用一个类似于对波动率更新的方法来估计相关系数。

两个变量 X 和 Y 之间的相关系数可以被定义为

$$\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

其中 σ_X 和 σ_Y 分别为 X 和 Y 的标准差，cov(X，Y)为 X 和 Y 之间的协方差。X 和 Y 之间的协方差的定义为

$$E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

式中 μ_X 和 μ_Y 分别为 X 和 Y 的均值，E 代表期望值。虽然直觉上我们更容易理解相关系数，但协方差才真正是我们需要分析的基础变量[⊖]。

定义 x_i 和 y_i 分别为变量 X 与 Y 在第 $i-1$ 天与第 i 天之间的百分比变化

$$x_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}} \quad 及 \quad y_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}$$

X_i 及 Y_i 分别为变量 X 及 Y 在第 i 天结束时的值。同时，我们定义以下变量：

$\sigma_{x,n}$——在第 n 天对变量 X 日波动率的估计值；

$\sigma_{y,n}$——在第 n 天对变量 Y 日波动率的估计值；

cov_n——在第 n 天对变量 X 与变量 Y 日变化量之间协方差的估计值。

⊖ 这就像在 EWMA 及 GARCH 模型中，虽然波动率更容易被人理解，但方差才是真正的基础变量。

在第 n 天，变量 X 与变量 Y 之间的相关系数估计值为

$$\frac{\text{cov}_n}{\sigma_{x,n}\sigma_{y,n}}$$

采用同样的权重并假定 x_i 和 y_i 的均值都为 0，由式(22-3)我们可以得出，由最后 m 个观察值计算出的变量 X 和 Y 的方差分别为

$$\sigma_{x,n}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{n-i}^2, \quad \sigma_{y,n}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{n-i}^2$$

类似地，变量 X 和 Y 之间的协方差的估计式为

$$\text{cov}_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{n-i}y_{n-i} \tag{22-16}$$

另外一种更新协方差的方法是类似于式(22-7)的 EWMA 方法，这时对协方差的更新方式为

$$\text{cov}_n = \lambda\text{cov}_{n-1} + (1-\lambda)x_{n-1}y_{n-1}$$

与 EWMA 模型中的分析相似，我们可以证明对应于数据 $x_{n-1}y_{n-1}$ 的权重随着 i 的增加而逐渐降低（也就是随着回望期的增大），λ 的值越小，给予近期数据的权重也越大。

【例22-3】 假设 $\lambda = 0.95$，变量 X 与 Y 在 $n-1$ 天的相关系数估计为 0.6，同时我们又假设变量 X 与 Y 在 $n-1$ 的波动率估计分别为 1% 和 2%。由协方差和相关系数的关系式，在第 $n-1$ 天 X 与 Y 的协方差估计为

$$0.6 \times 0.01 \times 0.02 = 0.000\,12$$

假定变量 X 及 Y 在 $n-1$ 天的百分比变化分别为 0.5% 与 2.5%，在第 n 天方差与协方差的估计分别为

$$\sigma_{x,n}^2 = 0.95 \times 0.01^2 + 0.05 \times 0.005^2 = 0.000\,096\,25$$
$$\sigma_{y,n}^2 = 0.95 \times 0.02^2 + 0.05 \times 0.025^2 = 0.000\,411\,25$$
$$\text{cov}_n = 0.95 \times 0.000\,12 + 0.05 \times 0.005 \times 0.025 = 0.000\,120\,25$$

变量 X 的最新波动率估计为 $\sqrt{0.000\,096\,25} = 0.981\%$，变量 Y 的最新波动率估计为 $\sqrt{0.000\,411\,25} = 2.028\%$，$X$ 及 Y 的最新相关系数为

$$\frac{0.000\,120\,25}{0.009\,81 \times 0.020\,28} = 0.604\,4$$

GARCH 模型也可用于对协方差进行更新，以及对于将来的协方差进行预测。例如，对协方差进行更新的 GARCH(1，1)为

$$\text{cov}_n = \omega + \alpha x_{n-1}y_{n-1} + \beta\text{cov}_{n-1}$$

其中，长期协方差平均值为 $\omega/(1-\alpha-\beta)$。我们可以推出与式(22-13)和式(22-14)类似的方程来预测将来的协方差以及计算期权期限内的平均方差[⊖]。

协方差的一致性条件

当我们计算出所有的方差及协方差之后，就可以生成一个市场变量的方差-协方差矩阵。当 $i \neq j$ 时，矩阵的第(i, j)个元素对应于变量 i 与变量 j 的协方差；当 $i = j$ 时，第(i, j)个元素对应于变量 i 的方差。

并不是所有的方差-协方差矩阵都是内部一致的，一个 $N \times N$ 方差-协方差矩阵 Ω 满足内部一

⊖ 本章的想法可以推广到多元变量 GARCH 模型的情形，其中整个方差-协方差矩阵被一致地得以更新。关于其他的做法，见 R. Engle and J. Mezrich, "GARCH for Groups," *Risk*, August 1996: 36-40.

致性条件是：对于所有的 $N\times 1$ 向量 w，

$$w^{\mathrm{T}}\Omega w \geqslant 0 \tag{22-17}$$

其中 w^{T} 是 w 的转置。满足以上条件的矩阵被称为**半正定**(positive-semidefinite)矩阵。

为了理解不等式(22-17)为什么必须成立，我们可以假定 $w^{\mathrm{T}}=[w_1, w_2, \cdots, w_n]$，表达式 $w^{\mathrm{T}}\Omega w$ 为变量 $w_1z_1+w_2z_2+\cdots+w_nz_n$ 的方差，其中 z_i 代表变量 i 的值，因此自然不能为负。

为了保证矩阵的半正定性，我们在计算方差及协方差时必须保持一致性。例如，如果我们采用最新的 m 个历史数据并以均等的权重来计算方差，那我们在计算协方差时也应采用同样的数据与权重，如果我们采用 EWMA 模型，并假定 $\lambda=0.94$ 来更新方差，我们在计算协方差时也应该采用同样的数据。

以下方差协方差矩阵是一个不满足内部一致性条件的例子

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

以上任一变量的标准差均为 1.0，此时协方差与相关系数相等。第一变量同第三变量高度相关，第二变量同第三个变量也高度相关，但是第一变量同第二变量无关，这一现象看起来有些奇怪，令 $w=(1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$，我们可以验证关系式(22-17)不成立，从而证明了矩阵不满足半正定条件[⊖]。

22.8 将 EWMA 应用于 4 个指数的例子

现在我们重新考虑 21.2 节中的例子。这是一个在 2008 年 9 月 25 日的交易组合，组合的构成为道琼斯工业平均指数(DJIA)的 400 万美元的投资，在英国富时 100 指数(FTSE 100)上 300 万美元的投资，在 CAC 40 指数上 100 万美元的投资，以及在日经 225 指数(Nikkei 225)上 200 万美元的投资。2008 年 9 月 25 日可以得到之前 500 天内的指数回报数据。这里所用的数据与计算过程可以在以下网页里找到：http：//rotman. utoronto. ca/ ~ hull/OFOD/VaRExample。

2008 年 9 月 25 日的相关系数矩阵可以通过对前 500 个回报赋予相等权重而得出，结果如表 22-5 所示。富时 100 指数与 CAC 40 指数之间有很强的相关性，道琼斯工业平均指数与富时 100 指数和 CAC 40 指数之间也有比较强的相关性。日经 225 指数与其他指数之间的相关性相对来讲不是很高。

表 22-5 2008 年 9 月 25 日的相关系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.489 & 0.496 & -0.062 \\ 0.489 & 1 & 0.918 & 0.201 \\ 0.496 & 0.918 & 1 & 0.211 \\ -0.062 & 0.201 & 0.211 & 1 \end{bmatrix}$$

注：计算方法是对最近 500 天的回报都赋予相同的权重。变量 1 代表道琼斯工业平均指数，变量 2 代表富时 100，变量 3 代表 CAC 40，变量 4 代表日经 225。

表 22-6 给出了在相同权重情形下的协方差矩阵。由式(21-3)可知这个矩阵给出的交易组合亏损(按千美元计)方差为 8 761.83。标准差是这个数字的平方根，即 93.60。因此一天 99% 的风险价值度是(按千美元计)2.33 ×93.60 = 217.757，即 217 757 美元。我们可以将这个数字与 21.2 节中通过历史模拟法所得到的风险价值度 253 385 美元相比较。

⊖ 可以证明一个 3 ×3 矩阵满足内部一致性的条件为 $\rho_{12}^2+\rho_{13}^2+\rho_{23}^2-2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}\leqslant 1$，其中 ρ_{ij} 为变量 i 与 j 的相关系数。

表 22-6　2008 年 9 月 25 日的协方差矩阵

$$\begin{bmatrix} 0.0001227 & 0.0000768 & 0.0000767 & -0.0000095 \\ 0.0000768 & 0.0002010 & 0.0001817 & 0.0000394 \\ 0.0000767 & 0.0001817 & 0.0001950 & 0.0000407 \\ -0.0000095 & 0.0000394 & 0.0000407 & 0.0001909 \end{bmatrix}$$

注：计算方法是对最近 500 天的回报都赋予相同的权重。变量 1 代表道琼斯工业平均指数，变量 2 代表富时 100，变量 3 代表 CAC 40，变量 4 代表日经 225。

不同于之前在计算方差与协方差时给所有观察值赋予相同权重，我们现在应用 $\lambda = 0.94$ 的指数加权移动平均(EWMA)模型。这样给出的方差-协方差矩阵如表 22-7 所示。由式(21-3)可知组合亏损(按千美元计)的方差是 40 995.765，标准差是这个数的平方根，即 202.474。因此一天 99% 的风险价值度为

表 22-7　2008 年 9 月 25 日的协方差矩阵

$$\begin{bmatrix} 0.0004801 & 0.0004303 & 0.0004257 & -0.0000396 \\ 0.0004303 & 0.0010314 & 0.0009630 & 0.0002095 \\ 0.0004257 & 0.0009630 & 0.0009535 & 0.0001681 \\ -0.0000396 & 0.0002095 & 0.0001681 & 0.0002541 \end{bmatrix}$$

注：计算方法是应用 $\lambda = 0.94$ 的 EWMA 模型。变量 1 代表道琼斯工业平均指数，变量 2 代表富时 100 指数，变量 3 代表 CAC 40，变量 4 代表日经 225。

$$2.33 \times 202.474 = 471.025$$

即 471 025 美元，这个数值是由相等权重计算出的值的两倍多。表 22-8 和表 22-9 说明了出现这个结果的原因。由证券长头寸所构成组合的标准差随着证券回报标准差以及证券回报之间相关系数的增大而增大。表 22-8 说明使用 EWMA 模型所估计出的日标准差比使用相同权重时要高得多。这是因为在紧靠 2008 年 9 月 25 日之前几天内的波动率比在数据中其他天内的波动率要高得多。将表 22-9 与表 22-5 进行比较我们会发现相关系数也增加了。[⊖]

表 22-8　通过相同权重和 EWMA 模型计算出的波动率(每日%)

	道琼斯工业平均指数	富时 100 指数	CAC 40	日经 225
相同权重	1.11	1.42	1.40	1.38
EWMA	2.19	3.21	3.09	1.59

表 22-9　2008 年 9 月 25 日的相关系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.611 & 0.629 & -0.113 \\ 0.611 & 1 & 0.971 & 0.409 \\ 0.629 & 0.971 & 1 & 0.342 \\ -0.113 & 0.409 & 0.342 & 1 \end{bmatrix}$$

注：计算方法是应用 $\lambda = 0.94$ 的 EWMA 模型。变量 1 代表道琼斯工业平均指数，变量 2 代表富时 100，变量 3 代表 CAC 40，变量 4 代表日经 225。

小　结

许多期权定价模型，例如布莱克-斯科尔斯-默顿模型，都假定标的资产的波动率为常数，这一假定绝非完美。在实际中，波动率就如同标的资产本身一样，也是一个随机变量。但是与标的资产不同，这一变量并不能由市场观测所得，这一章描述的方法就是关于如何跟踪目前的波动率大小。

⊖ 当市场变糟时，相关系数通常会增加，这里所示的就是这种现象的一个例子。

我们定义u_i为第$i-1$天末到第i天末市场变量的百分比变化，市场变量的方差率(即波动率的平方)为u_i^2的加权平均。这里讨论的模型的一个主要特性是对应于不同的u_i^2，模型赋予不同的权重。数据越新，所对应的权重也越大。在EWMA及GARCH(1, 1)模型中权重随着回望展期长度以指数比例下降。GARCH(1, 1)与EWMA模型的不同之处在于GARCH(1, 1)给长期平均方差也施加了某种权重。EWMA与GARCH(1, 1)模型的构造都保证了我们能够较为容易地预测将来方差的水平。

极大似然方法通常用于估计EWMA、GARCH(1, 1)以及其他基于历史数据来计算波动率的模型中的参数，这些方法采用数值迭代来使得历史数据得以重现的可能性达到最大，当参数确定之后，我们可以从u_i^2中的自相关性是否被剔除这一性态来验证模型的好坏。

对应于每个跟踪方差的模型都会有一个相应的模型来跟踪协方差。本章所描述方法可用于更新一个完整的用于计算风险价值度的方差-协方差矩阵。

推荐阅读

Bollerslev, T. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity," *Journal of Econometrics*, 31 (1986): 307–27.

Cumby, R., S. Figlewski, and J. Hasbrook. "Forecasting Volatilities and Correlations with EGARCH Models," *Journal of Derivatives*, 1, 2 (Winter 1993): 51–63.

Engle, R. F. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation," *Econometrica* 50 (1982): 987–1008.

Engle R. F., and J. Mezrich. "Grappling with GARCH," *Risk*, September 1995: 112–117.

Engle, R. F., and J. Mezrich, "GARCH for Groups," *Risk*, August 1996: 36–40.

Engle, R. F., and V. Ng, "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility," *Journal of Finance*, 48 (1993): 1749–78.

Nelson, D. "Conditional Heteroscedasticity and Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59 (1990): 347–70.

Noh, J., R. F. Engle, and A. Kane. "Forecasting Volatility and Option Prices of the S&P 500 Index," *Journal of Derivatives*, 2 (1994): 17–30.

练习题

22.1 解释如何用指数加权移动平均(EWMA)模型和历史数据来估算波动率。

22.2 采用EWMA及GARCH(1, 1)对波动率进行更新的不同之处是什么？

22.3 某一资产波动率的最新估计值为1.5%，资产在昨天交易结束时的价格为30美元。EWMA模型中的参数λ为0.94，假定在今天交易结束时资产价格为30.50美元，EWMA模型将如何对波动率进行更新。

22.4 某一公司采用EWMA来预测波动率，公司决定将参数λ由0.95变为0.85，解释这一变化的影响。

22.5 某市场变量的波动率为每年30%，计算该变量每天变化对应于99%把握程度的置信区间。

22.6 一个公司采用GARCH(1, 1)来更新波动率，模型中的参数为ω，α及β。描述稍稍增加某一参数同时保证其他参数不变的影响是什么？

22.7 USD/GBP汇率波动率的最新估计为每天0.6%，在昨天下午4点，汇率为1.500 0，在EWMA中参数λ为0.9，假定在今天下午4点时汇率为1.495 0，这时应该如何更新对汇率日波动率的估计？

22.8 假定S&P 500在昨天交易结束时为1 040，而在昨天指数的日波动率估计值为每天1%。GARCH(1, 1)模型中的参数$\omega=0.000\,002$，$\lambda=0.06$和$\beta=0.92$，如果指数在今天交易结束时的值为1 060，今天新的波动率估计为多少？

22.9 假定资产 A 和 B 的每天波动率分别为 1.6%和 2.5%，资产 A 和 B 在昨天交易日末的价格分别为 20 美元和 40 美元，而资产收益相关系数的估计值为 0.25，EWMA 模型中的 λ 参数为 0.95。

(a) 计算资产之间在当前的协方差。

(b) 假定在今天交易结束时，资产价格分别为20.50 美元及40.50 美元，更新相关系数的估计。

22.10 某 GARCH(1, 1)模型的参数为 $\omega=0.000\,004$，$\alpha=0.05$ 以及 $\beta=0.92$，长期平均波动率为多少？描述波动率会收敛到长期平均值的方程是什么？如果目前波动率为 20%，在 20 天后波动率的期望值为多少？

22.11 假定资产 X 和 Y 目前每天的波动率分别为 1.0% 及 1.2%，昨天在交易日结束时资产价格分别为 30 美元及 50 美元，资产收益的相关系数为 0.5，在这里我们采用 GARCH(1, 1)模型来更新相关系数与波动率，GARCH(1, 1)模型中的参数估计为 $\alpha=0.04$ 及 $\beta=0.94$，在相关系数估计中采用 $\omega=0.000\,001$，在波动率估计中采用 $\omega=0.000\,003$，假如在今天交易结束时资产价格分别为 31 美元及 51 美元，相关系数的最新估计为多少？

22.12 假设富时 100 股指(以英镑计)的每天波动率为 1.8%，美元/英镑汇率的每天波动率为 0.9%，我们进一步假定富时 100 与美元/英镑汇率的相关指数为 0.4，富时 100 被转换成美元后的波动率为多少？这里假定美元/英镑汇率被表达为 1 英镑所对应的美元数量(提示：当 $Z=X\cdot Y$ 时，Z 所对应的每天百分比价格变化等于 X 的每天百分比价格变化加上 Y 的每天百分比价格变化)。

22.13 假定在练习题 22.12 中，S&P 500(以美元计)与富时 100(以英镑计)的相关系数为 0.7，S&P 500(以美元计)与美元/英镑的汇率的相关系数为 0.3，S&P 500 的每天波动率为 1.6%，将富时 100 转换为美元后与 S&P 500 的相关系数为多少？(提示：对于 3 个变量 X，Y 及 Z，$X+Y$ 同 Z 的协方差等于 X 与 Z 的协方差和 Y 与 Z 的协方差的和)。

22.14 证明由式(22-9)所表达的 GARCH(1, 1)模型 $\sigma_n^2=\omega+\alpha u_{n-1}^2+\beta\sigma_{n-1}^2$ 与随机波动率模型 $dV=a(V_L-V)dt+\xi V dz$ 等价，其中时间以天计算，V 为资产价格波动率的平方，以及

$$a=1-\alpha-\beta,\quad V_L=\frac{\omega}{1-\alpha-\beta},$$
$$\xi=\alpha\sqrt{2}$$

当时间以年计算时，随机波动率模型是什么？(提示：变量 u_{n-1} 为资产价格在 Δt 时间内的收益，假定其分布为正态，均值为 0，标准差为 σ_{n-1}。可以证明，变量 u_{n-1}^2 和 u_{n-1}^4 的均值分别为 σ_{n-1}^2 和 $3\sigma_{n-1}^4$。)

22.15 22.7 节末尾对 4 个指数 VaR 的计算中我们使用了模型构造法。当在每个指数中的投资均为 250 万美元时，VaR 的计算会有什么变化？在计算中假定：使用相同权重估计波动率与协方差；使用 $\lambda=0.94$ 的 EWMA 模型估计波动率与协方差。可以使用网页 http://rotman.utoronto.ca/~hull/OFOD/VaRExample 里的计算表。

22.16 在 22.7 节末尾对 4 个指数例子的计算中，将 λ 从 0.94 改成 0.97 对计算有什么影响？可以使用上题网页里的计算表。

作业题

22.17 假定黄金价格在昨天收盘时为 600 美元，其日波动率为 1.3%，今天黄金的收盘价为 596 美元。采用以下模型来更新波动率。

(a) 采用 EWMA 模型，其中 $\lambda=0.94$。

(b) 采用 GARCH(1, 1)模型，其中参数选择为 $\omega=0.000\,002$，$\alpha=0.04$ 和 $\beta=0.94$。

22.18 假定在作业题22.17中，昨天交易结束时的银价为16美元，价格波动率为每天1.5%，银价与黄金价格的相关系数为0.8，今天在交易结束时银价同昨天相同，即16美元。采用作业题22.17中的两个模型来更新黄金价格及银价的波动率及相关系数。在实际中，对于黄金价格及银价采用的ω参数是否相同？

22.19 在本书作者网页中(http://www.rotman.utoronto.ca/~hull/data)，读者可以下载的一个计算表中含有至少900天的不同汇率数据以及股指数据。选定某汇率及某个股指，估计EWMA中的λ以使得

$$\sum_i (v_i - \beta_i)^2$$

达到极小，其中v_i为在第$i-1$天末所做预测，β_i是由第i天至第$i+25$天的数据所计算出的方差，在计算中采用Excel中的Solver功能，在开始EWMA计算时，令第一天方差的预测值等于第一天收益的平方。

22.20 GARCH(1，1)模型中的参数$\alpha=0.03$，$\beta=0.95$和$\omega=0.000\,002$。

(a)长期平均波动率为多少？

(b)如果当前日波动率为1.5%，你对20天、40天及60天后的波动率估计为多少？

(c)应采用什么样的波动率来计算20天、40天及60天期限的期权价格？

(d)假定有某一事件使得日波动率由0.5%增至2%，估测这一事件对20天、40天及60天后波动率的影响。

(e)估测这一事件对用于20天、40天及60天期限定价中波动率的影响。

22.21 在22.8节末尾对4个指数例子的计算中，我们假设交易组合在道琼斯工业平均指数、富时100、CAC 40以及日经225中的投资数量分别为400万美元、300万美元、100万美元和200万美元。当投资数量分别变为300万美元、300万美元、100万美元和300万美元时，对VaR的计算会有什么改变？在计算时假设：(a)在估计波动率和相关系数时采用相同权重模型；(b)估计时采用EWMA模型。在EWMA计算中，当λ从0.94变成0.90会有什么影响？在计算时可以利用网页http://www.rotman.utoronto.ca/~hull/data里的计算表。

22.22 对2005年7月27日至2010年7月27日之间的欧元－美元汇率数据使用EWMA模型和GARCH(1，1)模型。汇率数据可以从网页http://www.rotman.utoronto.ca/~hull/data下载。



第 23 章

信用风险

在第 21 章讨论的风险价值度和第 18 章讨论的希腊值都是对于市场风险的定量化分析。本章我们将讨论金融机构面临的另一类重要风险，即信用风险。关于信用风险管理，许多金融机构都花了大量的时间和精力，监管部门多年来一直要求银行设定资本金来应对信用风险，这一资本金是业界事例 21-1 所示的市场资本金之上的附加量。

信用风险来源于贷款的借贷方、债券发行人及衍生产品交易对手的违约可能性。在本章我们将讨论估计违约概率的不同方法，并解释风险中性违约概率与现实世界违约概率的差别。本章我们还将考虑场外衍生产品中信用风险的特性，并介绍交易员如何应用附加在交易合约上衍生产品条款来减低信用风险。本章我们还将讨论信用相关性、高斯 Copula 模型以及如何估算信用风险价值度等内容。

在第 24 章中，我们将讨论信用衍生产品，并将说明如何采用本章的概念来对信用衍生产品定价。

23.1 信用评级

穆迪、标准普尔和惠誉等评级公司专门从事信用评级业务，这些公司对企业债券提供信用评级。在穆迪的系统中，信用的最佳级别为 Aaa，具有这种信用级别的债券几乎没有违约的可能，接下来的一个次好级别为 Aa，再往下由好到坏信用级别的排序为 A、Baa、Ba、B 及 Caa。高于 Baa 的债券被称为**投资级**(investment grade)债券。标准普尔与穆迪 Aaa、Aa、A、Baa、Ba、B 及 Caa 相对应的信用级别分别是 AAA、AA、A、BBB、BB、B 及 CCC。为了产生更细的信用等级，穆迪将 Aa 等级分为 Aa1、Aa2 及 Aa3，又将 A 等级分为 A1、A2 及 A3，等等；类似地，标准普尔和惠誉将 AA 级分为 AA +、AA 及 AA -，并将 A 等级分为 A +、A 及 A -，等等。穆迪对 Aaa 与标准普尔和惠誉对 AAA 没有再细分，它们对最低信用等级也没有再细分。

23.2 历史违约概率

表 23-1 是由评级公司公布的一组典型数据，这些数据显示了在初始日期为某个级别的债券在 20 年内的违约情况。例如，初始信用级别为 Baa 的债券有 0.176% 的概率在一年内违约，有 0.494% 的概率在两年内违约等。债券在一个指定年份违约的概率可由表 23-1 计算得出。例如，初始信用级别为 Baa 的债券在期限中第二年违约的概率为 0.494% - 0.176% = 0.318%。

表 23-1　1970 ~2009 年的平均累积违约率(以百分比计)

级别	1	2	3	4	5	7	10	15	20
Aaa	0.000	0.012	0.012	0.037	0.105	0.245	0.497	0.927	1.102
Aa	0.022	0.059	0.091	0.159	0.234	0.384	0.542	1.150	2.465
A	0.051	0.165	0.341	0.520	0.717	1.179	2.046	3.572	5.934
Baa	0.176	0.494	0.912	1.404	1.926	2.996	4.851	8.751	12.327
Ba	1.166	3.186	5.583	8.123	10.397	14.318	19.964	29.703	37.173
B	4.546	10.426	16.188	21.256	25.895	34.473	44.377	56.098	62.478
Caa-C	17.723	29.384	38.682	46.094	52.286	59.771	71.376	77.545	80.211

资料来源：穆迪。

表 23-1 显示具备投资级别的债券在一年内的违约概率随着期限的增大而增大(例如，A 级债券在第 0 ~5 年、5 ~10 年、10 ~15 年以及 15 ~20 年的违约概率分别为 0.717%、1.329%、1.526% 和 2.362%)，这是因为在发行的最初，债券的信用级别较好，但随着时间的推移，公司的信用出现问题的可能性也会随之增大。而对于最初的信用级别较差的债券，每年的违约率常常是时间期限的一个递减函数(例如，B 级债券在第 0 ~5 年、5 ~10 年、10 ~15 年以及 15 ~20 年的违约概率分别为 25.895% 和 6.380%)。产生这一现象的原因是，如果一个债券的信用较差，债券在今后一两年能否生存会面临巨大挑战，但公司如果能够顺利渡过难关，公司今后的财务前景会变得乐观。

违约密度

由表 23-1 我们可以计算出 Caa 或更低级别的债券在第 3 年内的违约率，即 38.682% - 29.384% =9.298%。我们将其称为**无条件违约概率**(unconditional default probability)，此概率是今天，即在 0 时间，所看到的在第 3 年内的违约概率。Caa 债券一直到第 2 年底都不会破产的概率为 100% -29.384% =70.616%，因此我们得出在前两年没有违约的条件下，公司在第 3 年违约的概率为 0.092 98/0.706 16 = 13.17%。条件违约概率被称为**违约密度**(default intensity)或**风险率**(hazard rate)。

这里计算出的违约概率 13.17% 对应于一年的观察期。假设我们考虑一个很短的时间段 Δt。定义在时间 t 的违约密度 $\lambda(t)$ 为在之前没有违约的条件下，违约发生在时间 t 与 $t+\Delta t$ 之间的概率 $\lambda(t)\Delta t$。如果 $V(t)$ 是从今天到时间 t 公司仍然生存的累积概率(就是时间 t 之前没有违约)，那么在时间 t 与 $t+\Delta t$ 之间违约的条件概率为 $[V(t)-V(t+\Delta t)]/V(t)$，由于这个概率等于 $\lambda(t)\Delta t$，我们有

$$V(t+\Delta t)-V(t) = -\lambda(t)V(t)\Delta t$$

取极限后得出

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda(t)V(t)$$

因此

$$V(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

定义 $Q(t)$ 为在时间 t 之前违约的概率，因此 $Q(t)=1-V(t)$，我们得出

$$Q(t) = 1-e^{-\int_0^t \lambda(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

或者

$$Q(t) = 1-e^{-\bar{\lambda}(t)t} \tag{23-1}$$

其中 $\bar{\lambda}$ 为介于时间0与时间 t 之间违约密度的平均值。

23.3 回收率

当一家公司破产时，公司的债权人会对公司的资产进行追索[1]。有时公司会重组，这时债权人同意会接受债务的部分偿还，而在其他情形下，公司部分资产被债权结算人变卖，所得资金将最大限度地用于偿还债务。在债务追索过程中，有些债权具有优先权，必须优先偿还。

债券回收率一般是指债券在刚刚违约后的几天内，其市场价值与债券面值的百分比。表23-2给出了美国几种不同种类的银行贷款和债券平均回收率的历史数据。从表中可以看出，对于资产有最先留置权的银行贷款有最高的回收率(65.6%)。对于债券，平均回收率从优先支付有抵押债券的49.8%，到初级次级债券的24.7%。回收率同违约概率有很强的负相关性。这说明如果从违约率意义上讲是个坏年头的话，那么从总效果来讲会更坏，因为此时的回收率也会较低。例如，当非投资级债券在一年内的违约率只有0.1%时，平均回收率可能会相对较高到60%。当违约率相对高达3%时，平均回收率也许只有35%。

表23-2 1982~2009年企业债券的回收率

类别	平均回收率(%)
最先留置权银行贷款	65.6
次级留置权银行贷款	32.8
优先支付无抵押银行贷款	48.7
优先支付有抵押债券	49.8
优先支付无抵押债券	36.6
次优先级债券	30.7
次级债券	31.3
初级次级债券	24.7

资料来源：穆迪。

23.4 由债券价格来估计违约概率

一家公司的违约概率可以由公司发行的债券价格来估计。这样做的前提假设是：公司债券价格之所以低于类似的无风险债券的价格，完全是由于公司债券的违约可能性[2]。

首先让我们考虑一个近似计算。假定某债券的收益率比类似的无风险债券收益率要高200个基点，回收率为40%，违约带给企业债券持有人损失的期望值为200个基点(或每年2%)。基于回收率40%，我们得出在没有前期违约的条件下，每年的条件违约密度为0.02/(1-0.4)=3.33%。一般来讲

$$\bar{\lambda} = \frac{s}{1-R} \tag{23-2}$$

式中，h 为每年的平均违约密度，s 为企业债券收益率与无风险收益率的利差，R 为回收率期望。

23.4.1 更加精确的计算

为了给出一个更加精确的计算，我们假设某企业债券的期限为5年，券息为每年6%(半年付息一次)，债券收益率为每年7%(连续复利)，与这一债券相似的无风险债券收益率为每年5%(连续复利)。由收益率入手，我们可以分别得出企业债券及无风险债券的价格为95.34和104.09。在今后的5年内，由违约所造成损失的期望值为104.09-95.34=8.75。假定企业债券每年的违约率为 Q(在这一简单例子中，我们假定债券每年的违约率相同)，表23-3计算出假设违约只会发生在0.5年、1.5年、2.5年、3.5年及4.5年时(刚好发生在付券息之前)由 Q 表示的预期违约损失。这里对应于所有期限的无风险利率均为5%(连续复利)。

[1] 在美国债券持有人的索赔包括债券的本金和应记利息。

[2] 在今后我们会讨论这一点，这里的假设并不完美。在实际中，企业债券的价格也会受流通性的影响，债券流通性越差，债券价格也就越低。

表 23-3　由债券的每年的违约概率 Q 来计算违约损失，本金 =100 美元

时间（年）	违约概率	回收率（美元）	无风险值（美元）	默认损失（美元）	贴现系数	预期违约损失（美元）
0.5	Q	40	106.73	66.73	0.9753	65.08Q
1.5	Q	40	105.97	65.97	0.9277	61.20Q
2.5	Q	40	105.17	65.17	0.8825	57.52Q
3.5	Q	40	104.34	64.34	0.8395	54.01Q
4.5	Q	40	103.46	63.46	0.7985	50.67Q
合计						288.48Q

为了说明计算过程，我们考虑表 23-3 中对应于 3.5 年的一行，在 3.5 年时，债券价格的期望值为（利用远期利率并假设无违约可能）

$$3 + 3e^{-0.05\times0.5} + 3e^{-0.05\times1.0} + 103e^{-0.05\times1.5} = 104.34$$

由 23.3 节中回收率的定义得出，违约发生时债券回收价值为 40，因此违约触发损失为 104.34 − 40 = 64.34，这一损失所对应的贴现值为 54.01，因此违约预期损失为 54.01Q。

预期损失的总和为 288.48Q，这一数量等于 8.75，由此我们得出 $Q = 3.03\%$。在计算中，我们假定任意一年违约概率为均等，并且假设违约每年在一个时间发生。推而广之，我们可以假定违约发生的次数更加频繁，或者我们可以不再假定无条件违约概率为常数，而假定违约密度函数为常数，或者假定对应不同时间的违约概率为某种特定形式。对于几种不同的债券，我们可以估计出描述违约概率期限结构的几个不同的参数。例如，我们持有的债券的期限分别为 3 年、5 年、7 年及 10 年，我们可以采用第一个债券来估计前 3 年中每年的违约概率，由第二个债券估测 4 ~ 5 年中的违约概率，由第三个债券估测6 ~ 7 年的违约概率，由第四个债券估测第 8、9 及第 10 年中的违约概率（见练习题 23.13 及作业题 23.27）。这里的计算过程与 4.5 节中计算零息收益曲线的**票息剥离法**（bootstrap procedure）十分相似。

23.4.2　无风险利率

在利用债券价格来估计违约概率时，一个关键的问题是理解“无风险利率”以及“无风险债券”的含义。在式（23-2）中，利差 s 是企业债券的收益率高出与其类似的无风险债券的收益率的差额。在表 23-3 中，无风险债券的价格必须以无风险利率来贴现计算。企业债券收益率的报价所用的基准风险利率一般是与其类似的长期国库券收益率（例如，一个债券交易员对于某一企业债券收益率的报价可能是国库券收益率加上 250 个基点）。

在 4.1 节中，我们曾指出交易员在对衍生产品定价时往往将 LIBOR/互换利率作为对无风险利率的近似，交易员在估计违约概率时也往往采用 LIBOR/互换曲线作为对无风险利率曲线的近似。例如，当交易员由债券价格来估计违约率时，他们会将式（23-2）中 s 作为债券收益率与 LIBOR/互换曲线的差值，而且，表 23-3 中的无风险贴现利率往往被选定为 LIBOR/互换零息收益率。[1]

信用违约互换合约（将在第 24 章讨论）也可以用于计算交易员采用的隐含无风险利率，隐含无风险利率在平均意义上大致上等于 LIBOR/互换利率减去 10 个基点[2]，这种估计比较合理。在 7.5 节中我们曾指出，互换交易中信用风险可类比为给信用等级为 AA 级公司的一系列 6 个月贷

[1] 事实上，市场上已经有越来越多的交易员采用隔夜指数互换（OIS）利率作为对无风险利率的近似。

[2] 参考 J. Hull, M. Predescu, and A. White, "The Relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond Yields, and Credit Rating Announcements," *Journal of Banking, and Finance*, 28(November 2004): 2789-2811。

款的信用风险，信用级别为 AA 的产品价格中含有 10 个基点的违约风险溢价（risk premium）还是非常合理的。

23.4.3 资产互换

在实际中，交易员往往从资产互换的溢价中来取得违约概率的信息，这是因为资产互换价格中的溢价直接提供了企业债券收益率与 LIBOR/互换收益率之间的溢差的直接估计。

为了解释资产互换的运行机制，我们假定对于某债券的资产互换溢价报价为 150 个基点，对应于这一报价有三种可能：

- 债券价格等于账面价格，即 100 美元。资产互换的一方（公司 A）支付债券的券息，而另一方（公司 B）支付 LIBOR + 150 个基点。注意这里的交易是将债券所承诺的券息进行交换，即无论债券是否违约，交换都会进行。
- 债券价格低于其账面价格。假定债券价格为 95 美元，在资产互换中，A 方除了支付阐明的券息外，在互换协议开始时，A 方还要对于每 100 美元的面值再付费 5 美元。B 方支付 LIBOR + 150 个基点。
- 债券价格高于其账面价格，假定债券价格为 108 美元，在互换协议开始时，B 方首先对于每 100 美元的面值付费 8 美元。B 方付 LIBOR + 150 个基点，A 方支付券息。

以上三种不同可能均使得资产互换的溢价（所对应付款现金流）的贴现值等于无风险债券的价格与类似企业债券的差价，这里的无风险利率被假定为 LIBOR/互换曲线（见练习题 22.24）。

接下来，再次考虑表 23-3 中的例子。这里 LIBOR/互换零息曲线为水平 5%，假定债券的价格并不是已知，但我们已知资产互换溢价为 150 个基点，这意味着无风险债券与企业债券的差价等于 150 基点现金流的贴现。假定互换交易每半年付款一次，150 基点所对应现金流的贴现值为 6.55 美元（每 100 美元面值）。表 23-3 中的整体损失为 6.55 美元，这意味着年违约率 $Q=6.55/288.48=2.27\%$。

23.5 违约概率的比较

由历史数据所估计出的违约概率通常要远远小于由债券价格中隐含的违约概率，两者的差别在 2007 年中期开始的信用危机期间尤为突出。这是因为在危机期间发生了所谓的“择优而栖”的现象，这时所有的投资者都想持有像国库券这样的安全证券，这造成了公司债券价格下跌，从而使其收益率上涨。这些债券的信用溢差 s 增大，因此像式(23-2)中的计算将会给出很高的违约概率估计值。

即使在信用危机之前，由债券计算出的违约概率也比由历史数据估计的要高。我们首先利用表 23-1 中对应于 7 年的一列数据来计算历史违约概率（采用这一列数据的原因是我们下面所考虑债券的期限是 7 年）。由式(23-1)我们得出

$$\bar{\lambda}(7) = \frac{1}{7}\ln[1 - Q(7)]$$

式中，$\bar{\lambda}(t)$ 为截止到时间 t 的平均违约密度（或风险率），$Q(t)$ 为截止到时间 t 的累积违约概率。对应不同信用级别的 $Q(7)$ 值直接来自于表 23-1。例如，对于信用级别为 A 的公司，$Q(7)$ 的值为 0.011 79，因此，7 年的违约密度平均值为

$$\bar{\lambda}(7) = -\frac{1}{7}\ln(1 - 0.011\,79) = 0.001\,7$$

即 0.17%。

为了由债券价格计算违约密度，我们利用式(23-2)与美林证券发表的债券收益率数据。所示结果是1996年12月至2007年6月之间的平均值。在计算中，假设回收率为40%。美林证券数据中的债券期限大约是7年(这也正是为什么在计算违约概率时我们使用表23-1第7列的原因)。为了与上一节中的计算一致，我们在这里计算债券收益溢差时假定无风险利率为7年期互换利率减去10个基点。例如，对于A级债券，美林证券所报告的平均收益率为5.995%，平均7年期互换利率为5.408%，因此平均无风险利率为5.308%。这就给出了7年平均违约率为

$$\frac{0.059\,95-0.053\,08}{1-0.4}=0.011\,5$$

即1.15%。

表23-4说明了对于投资级债券，由债券价格所计算出的违约概率与由历史数据所计算出的违约概率的比率很大，但这些比率随着信用级别降低而有所下降，与此相比两种违约概率的差随着信用级别的降低而有所增加。

表23-4　7年的平均违约率(每年%)

等级	历史数据默认违约密度	债券价格违约密度	比率	不同点
Aaa	0.04	0.60	17.0	0.56
Aa	0.05	0.73	13.2	0.67
A	0.17	1.15	6.8	0.98
Baa	0.43	2.13	4.9	1.69
Ba	2.21	4.67	2.1	2.46
B	6.04	8.02	1.3	1.98
Caa及更低	13.01	18.39	1.4	5.39

表23-5是对于这些结果提供的另一种解释。表中给出了投资者在不同信用级别的债券上所得收益溢差(这里仍然假定无风险利率等于7年互换利率减去10个基点)。再次考虑A级债券，这种债券的收益率超过国债收益率的平均溢差为111个基点，其中的42基点是7年国库券与我们选取的无风险利率之间的平均溢差，补偿预期违约需要10个基点(这一数值等于表23-4中的历史违约概率乘以0.6，即回收率)。这样在将预期违约考虑进来后，我们仍然有59个基点的额外预期收益。

表23-5　债券收益溢差的期望

等级	历史数据默认违约密度	债券价格违约密度	比率	不同点
Aaa	78	42	2	34
Aa	86	42	3	41
A	111	42	10	59
Baa	169	42	26	101
Ba	322	42	132	148
B	523	42	362	119
Caa	1 146	42	781	323

表23-4和表23-5显示，虽然两种违约概率差距很大，但对应的额外预期收益却相对较小(但仍然很显著)。对于Aaa级别的债券，两种违约概率的比率为17.0，但额外预期收益只有仅仅34个基点。额外预期收益随着信用级别的降低而有所增加。[⊖]

表23-5所示的债券额外收益随时间变化而变化。在2001年、2002年和2003上半年，信用溢差从而额外收益均比较高。此后直到信用危机之前这段时间内，额外收益均比较低。

23.5.1　现实世界概率与风险中性概率的比较

由债券收益率所隐含的违约概率为风险中性概率。为了解释这一结论，我们考虑表23-3中有关违约概率的计算。在计算过程中，我们假定对违约损失的期望值可以用无风险利率进行贴现。

⊖ 对于B级债券，表23-4和表23-5显示的特征刚好相反。

当计算损失的期望值是在风险中性世界里进行时，风险中性定价理论保证了以无风险利率进行贴现的合理性。这意味着表23-3中的违约概率必须为风险中性概率。

与此相比，由历史数据所隐含的概率为现实世界的违约概率（有时也被称为**真实概率**（physical probability））。表23-5中的额外预期收益直接来源于现实世界与风险中性世界违约概率的不同。当没有额外预期收益时，现实世界违约概率等于风险中性违约概率，这一结论反过来也成立。

为什么现实世界中违约概率与风险中性世界的违约概率会相差甚远呢？就像我们刚刚讨论的那样，这一问题等同于为什么企业债券交易的平均收益要高于无风险利率。

一种解释是企业债券的流动性较差，因此它们的收益率要足够高来对此进行补偿。事实确实是这样，但研究结果表明，这并不能完全解释表23-5中的结果。另一个可能的原因是债券交易员的主观违约率假设也许比表23-1中给出的违约率要高得多，交易员所假想的经济萧条情形可能要比历史数据中所有发生过的情形更差。但是，额外收益的很大一部分仍然很难用以上观点来解释。

到目前为止，人们发现造成表23-4和表23-5中结果的最主要原因是债券违约并不相互独立。在有些时间段内违约率较低，而在其他时间段内违约率较高。观察不同年份的违约率将会证明这个结论。穆迪的统计结果表明，在1970~2009年之间的违约率从最低的1979年的0.09%到2001年的3.81%和2009年的5.35%。年与年之间的违约率变化会导致系统风险（即不能通过风险分散而消除的风险），债券交易员因承担这种风险自然会索取额外收益（这与由资本资产定价模型所计算的股权人额外收益是类似的，见附录3A）。年与年之间违约率的不同可能归咎于整体的经济状况，或者某公司的违约会触发其他公司的违约（这一现象被研究人员称为**信用蔓延**（credit contagion））。

除了我们刚刚讨论的系统风险，每个债券都具备非系统风险（即个别风险）。对于股票交易组合，我们可以认为当投资者选择适当的组合时，例如组合含有30只股票，非系统风险得以分散，因此当投资者持有非系统风险时就不应索取额外收益。但对于债券组合，以上观点就没有那么清晰。债券收益具有很高的偏态性，同时投资收益的升势有限（例如，一个债券在1年内可能有99.75%的概率收益率为7%，同时有0.25%的概率收益率为-60%。第一种情形对应于没有违约出现，第二种情形对应于出现违约）。债券投资的这种风险很难分散（diversify away）。因此如果我们想进行风险分散，所持债券数量要成千上万。在实际中，许多债券组合的风险根本没有达到完全分散，因此债券交易员可能对自己所承担的非系统风险也会索取额外的回报。

23.5.2 应当使用哪种违约概率估计

现在我们自然会问，在信用风险分析中我们是应该采用现实世界的违约率还是风险中性世界里的违约率。对这一问题的回答取决于分析的目的，当我们对信用衍生产品定价或者分析违约对产品价格的影响时，应该采用风险中性违约概率，这是因为在分析中会涉及计算将来预期现金流的贴现值，在计算中会不可避免（直接或间接）地采用风险中性定价理论。当我们采用情形分析法来估计因违约而触发的损失时，应该采用现实世界的违约率。

23.6 利用股价估计违约概率

当我们采用类似表23-1中的数据来估计公司现实世界里的违约概率时，必须依赖公司的信用评级，不幸的是公司信用评级的更新较慢，因此有些人认为股票价格对估测违约概率提供了及时的信息。

1974 年，默顿提出了一个模型，其模型中公司的股票被当做公司资产上的期权[⊖]。为了便于讨论，假设公司仅发行了一个零息债券，债券到期时间为 T，定义：

V_0 ——公司资产的当前价值；

V_T ——公司资产在时间 T 的价值；

E_0 ——公司股票的当前价值；

E_T ——公司股票在时间 T 的价值；

D ——公司在时间 T 发行债券的本金；

σ_V ——资产波动率(假设为常数)；

σ_E ——股票的瞬时波动率。

当 $V_T < D$ 时，公司会对自己发行的债券违约(至少在理论上讲)，此时公司的股价为 0；当 $V_T > D$时，公司会支付自己在时间 T 时应偿还的债务，这时股票价格为 $V_T - D$。在默顿模型中，在时间 T 时，公司的股价为

$$E_T = \max(V_T - D, 0)$$

以上公式表示公司的股票可以看做是公司资产的看涨期权，期权的执行价格为应偿还债券本金总量。布莱克-斯科尔斯-默顿公式给出了这一期权的当前价格

$$E_0 = V_0 N(d_1) - De^{-rT} N(d_2) \tag{23-3}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/D) + (r + \sigma_V^2/2)T}{\sigma_V \sqrt{T}} \quad 及 \quad d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T}$$

债券今天的价格等于 $V_0 - E_0$。

公司在时间 T 违约的风险中性概率为 $N(-d_2)$，为计算这一数量，我们需要 V_0 与 σ_V，而这两个变量都不能在市场上直接观察到。但是如果公司是一家上市公司，我们可以观察到 E_0，这意味着式(23-3)给出了一个 V_0 与 σ_V 必须遵守的等式。我们也可以估计 σ_E。由伊藤引理(Ito's Lemma)，我们得出

$$\sigma_E E_0 = \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V V_0$$

即

$$\sigma_E E_0 = N(d_1) \sigma_V V_0 \tag{23-4}$$

以上方程是 V_0 及 σ_V 必须遵守的另一个等式。式(23-3)与式(23-4)给出了一组关于 V_0 及 σ_V 方程式，由这两个方程我们可以求得 V_0 及 σ_V 的解[⊜]。

【例 23-1】 假如一家公司的股价为 300 万美元，股价变化的波动率为 80%，公司在一年后必须支付的债务付款为 1 000 万美元，无风险利率为每年 5%，以下的计算以百万美元计，对应这一情形 $E_0 = 3$，$\sigma_E = 0.80$，$r = 0.05$，$T = 1$ 和 $D = 10$，对式(23-3)和式(23-4)求解，我们得出 $V_0 = 12.40$ 与 $\sigma_V = 0.2123$，参数 $d_2 = 1.1408$，公司违约概率为 $N(-d_2) = 0.127$，即 12.7%。债券的当前市价为 $V_0 - E_0$，即 9.40。债券应付款的贴现值为 $10e^{-0.05 \times 1} = 9.51$，债券的预期损失为(9.51 - 9.40)/9.51，此量为无违约价值的 1.2%，将其同违约概率比较我们可以得出违约的回收率，即(12.7 - 1.2)/12.7，即无违约价值的 91%。

⊖ 见 R. Merton "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29(1974): 449-70。

⊜ 为了对两个非线性方程 $F(x, y) = 0$ 及 $G(x, y) = 0$ 求解，我们可以采用 Excel 中的 Solver 功能，通过求取 $[F(x, y)]^2 + [G(x, y)]^2$ 的极小值来达到目的。

上面的基本默顿模型可以在几个方面加以推广。例如，一种形式是假定每当资产价格低于一定的障碍值时，就会触发违约。另一种推广是允许多次偿还债务的情形。

由默顿模型及其推广形式所产生的违约概率与实际违约概率有多接近呢？这一问题的答案是，默顿模型及其推广对于违约概率提供了较好的排序(风险中性及现实世界)，这意味着由默顿模型产生的违约概率可以通过某种单调变换来转换成现实世界里或风险中性世界里的违约概率㊀。利用理论上的风险中性违约概率 $N(-d_2)$(因为这是由期权定价模型估计的)来估计现实世界里的违约概率，这种做法看上去比较奇怪，但在上面的模型矫正过程中，我们假设了对不同公司风险中性违约概率的排序与其现实世界里违约概率的排序是一样的。

23.7 衍生产品交易中的信用风险

衍生产品交易的信用风险要比贷款中的信用风险更加复杂，在违约事件发生时的损失更加不确定。假定某金融机构与某交易对手有一笔衍生产品交易，我们应该考虑以下三种情形。

- 这一交易永远是金融机构的债务。
- 这一交易永远是金融机构的资产。
- 这一交易既可能是金融机构的资产也可能是金融机构的债务。

以上第一种情形的一个例子是期权的短头寸；第二种情形的例子是期权的长头寸；第三种情形的例子是远期合约或利率互换。

第一种情形中的衍生产品交易对于金融机构来讲不会产生信用风险，在这一情形下，当交易对手违约时，不会造成金融机构的任何损失，这一衍生产品是交易对手的资产，违约发生时，交易对手往往会对交易平仓，或将它卖给第三方。无论如何，对金融机构而言，对手违约不会造成任何信用损失(也没有收益)。

第二种情形所对应的衍生产品对金融机构来讲总是有信用风险。当交易对手违约时，往往会造成金融机构的损失，这一衍生产品是交易对手的债务，在对手违约时，金融机构会对交易对手的资产进行追索，最终金融机构可能只会收回衍生产品价值的一部分[一般来讲，由衍生交易所触发的索赔往往是无抵押并且是低级别的(unsecured and junior)]。

第三种情形所对应的衍生产品可能会触发也可能不会触发信用风险，当衍生产品对于金融机构来讲价值为正时，如果交易对手违约，金融机构会对交易对手的资产追索，此时金融机构可能会遭受损失。当衍生产品对于金融机构的价值为负时，如果交易对手违约，交易对手会将衍生产品交易平仓或出售，此时衍生产品不会给金融机构带来任何信用损失㊁。

调整衍生产品价值以反映对手违约的风险

一个金融机构(或衍生产品用户)应如何调整衍生产品价格来反映交易对手的信用风险呢？假定某衍生产品在没有违约发生时价格为 f，现在假定违约可能在时间为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 发生，其中 $t_n=T$。假定对于金融机构而言衍生产品在 t_i 的价值为 f_i(假定没有违约)，假定 t_i 所对应的违约概率为 q_i，预期回收率为 R㊂。

对应于 t_i 时刻，金融机构的潜在损失为 $\max(f_i, 0)$，在违约发生时，预期回收量为 R 乘以这一头寸的数量，假定违约概率与预期回收量与衍生产品的价格相互独立，对应于违约时刻 t_i 的风

㊀ 穆迪 KMV 公司将 Merton 模型的违约概率转换为现实世界的违约概率[这一概率被称为 EDF，EDF 为预期违约频率(expected default frequency)的缩写]。CreditGrades 采用 Merton 模型来估计信用溢差，这一信用溢差与风险中性违约概率密切相关。

㊁ 公司往往是因为整体的负债量而不是某个单个交易而违约。

㊂ 违约概率可由 23.4 节描述的方法由债券价格计算得出。

险中性预期损失为

$$q_i(1-R)\hat{E}[\max(f_i,0)]$$

式中$\hat{E}$代表风险中性世界的期望值，将以上公式进行贴现，我们得出被称为**信用价值调整**(credit value adjustment，CVA)的表达式：

$$\sum_{i=1}^{n}u_iv_i \tag{23-5}$$

式中 $u_i=q_i(1-R)$，v_i 是在 t_i 时刻将头寸结清的衍生产品在今天的价格，该衍生产品在 t_i 时刻的收益为 $\max(f_i, 0)$。

在这里我们再一次考虑以上的 3 种可能的情形，第一情形(衍生产品永远是金融机构的债务)比较容易处理，此时f_i 的价格永远为负，所以由式(23-5)得出的由违约造成的整体违约损失为0，金融机构对于这种衍生产品不需要做违约费用调整(当然交易对手可能将金融机构的违约建立在自身的模型中)。

对于第二种情形(衍生产品永远是金融机构的资产)，f_i 的价格永远为正，因此 $\max(0, f_i)=f_i$。假设衍生产品只有一次收益，而且发生在时间 T，这时f_0 必须是f_i 的贴现值。所以对于所有的 i，$v_i=f_0$。由式(23-5)所表达的违约费用的贴现值变为

$$f_0\sum_{i=1}^{n}q_i(1-R)$$

如果f_0^* 为衍生产品的实际价格(即允许违约发生)，那么

$$f_0^*=f_0-f_0\sum_{i=1}^{n}q_i(1-R)=f_0\left[1-\sum_{i=1}^{n}q_i(1-R)\right] \tag{23-6}$$

衍生产品交易对手发行的无抵押零息债券，即在 T 时刻支付 1 美元的债券，可以被归为第二种情形。定义 B_0 为无违约风险时的债券价格，B_0^* 为债券的实际价格。我们采取一个简化的假设，违约时衍生产品的回收率等于债券违约时的价格与无违约价格的百分比，因此

$$B_0^*=B_0\left[1-\sum_{i=1}^{n}q_i(1-R)\right] \tag{23-7}$$

由式(23-6)和式(23-7)，得出

$$\frac{f_0^*}{f_0}=\frac{B_0^*}{B_0} \tag{23-8}$$

如果 y 为在 T 时刻到期的无风险零息债券的收益率，y^* 为在 T 时刻到期的由衍生产品交易对手发行的零息债券收益率，即 $B_0=e^{-yT}$与 $B_0^*=e^{-y^*T}$，式(23-8)给出

$$f_0^*=f_0e^{-(y^*-y)T} \tag{23-9}$$

式(23-9)说明，对于任意在 T 时刻提供收益的衍生产品定价，我们可以将贴现率由无风险利率 y 变为有风险利率 y^*，然后再对风险中性世界中的预期收益贴现，即可求得衍生产品的价格。[⊖]

【例 23-2】 考虑公司 X 在场外市场卖出的一个 2 年期的期权，在无违约前提下期权价值为 3 美元。假定由公司 X 发行的 2 年期零息债券的收益率比相应的无风险利率高 1.5%，期权的实际价值为

$$3e^{-0.015\times 2}=2.91$$

即 2.91 美元。

对于第三种情形，f_i 的符号不确定，变量 v_i 可以理解成执行价格为 0，标的变量为f_i 的看涨

⊖ 作者讨论的均为单向信用调节量(Unilateral CVA)。在实际中，大部分金融机构已开始考虑双向信用调节量(Bilateral CVA)的计算，即在调节量中也考虑自身违约的风险，但业界对双向信用调节量仍存有争议。

期权价格，一种计算 v_i 的办法是在衍生产品期限内对市场变量进行模拟，有时对于 v_i 也可能会有某种近似解析式(见练习题23.15和23.16)。

在这里的分析中，我们假设违约概率与衍生产品价格无关。当衍生产品只占交易对手交易组合的一小部分或者交易对手将衍生产品用于对冲策略时，这一假设是合理的。当交易对手进入一个大额度的衍生产品交易的目标是为了投机时，金融机构应该警惕。当衍生产品对于交易对手来讲产生了较大的负价值(对于金融机构而言有一个较大的正价值)时，对手违约的可能性会比处在相反情形时要大得多。

当金融机构在具有0或者很小风险暴露的情况下交易对手最可能违约，金融机构交易员将这种风险暴露称为**正向风险**(right-way risk)；当金融机构具有很大风险暴露时交易对手最可能违约，金融机构交易员将这种风险暴露称为**错向风险**(wrong-way risk)。

23.8 信用风险的缓解

在许多情形下，我们以上的分析夸大了衍生产品交易中的信用风险，这是因为在衍生产品交易中可以设定不同形式的条款以使得信用风险得到缓解。

23.8.1 净额结算

净额结算(netting)已经逐渐成为场外衍生产品合约主协议(master agreement)的标准条款，该条款阐明如果交易的一方在与某一交易对手的一份合约中违约，那么这一方必须在与同一对手的所有合约中违约。

净额结算处理方式被大多数国家的法庭认可，这可以大大减少金融机构的信用风险。假如一家银行与某一交易对手有3笔互换交易，对于银行而言，这3笔合约的价格分别为+1 000万美元、+3 000万美元及-2 500万美元，假如交易对手因为账务困难而不能履行义务，对于交易对手而言，三个合约的价值分别为-1 000万美元、-3 000万美元及+2 500万美元。在没有净额结算的情况下，交易对手会对第一个合约和第二个合约违约，保存第三个合约，此时银行损失为4 000万美元。在有净额结算的情况下，交易对手在违约时一定要对3个合同违约，因此银行的损失只有1 500万美元[⊖]。

假如一个金融机构与某交易对手有 N 笔交易，假定在无违约前提下第 i 笔交易的当前价值为 V_i，违约发生时合约收回价值等于收回率乘以当前价值。在没有净额结算的情况下，交易对手违约时触发损失为

$$(1-R)\sum_{i=1}^{N}\max(V_i,0)$$

在有净额结算的情况下，交易对手违约触发损失为

$$(1-R)\max\left(\sum_{i=1}^{N}V_i,0\right)$$

在没有净额结算情形时，风险头寸类同于期权的交易组合，其中每个期权的执行价格为0；而在有净额结算情形，风险头寸类似于有关交易组合的期权，期权的执行价格也为0。交易组合的期权的价值不会大于期权的交易组合的价值，大多数情况下会远远小于期权的交易组合的价值。

我们可以将前一节中的分析进行推广，并使得在实施净额结算后式(23-5)的结果等于某交易对手违约而造成的预期损失。在推广过程中我们只需要定义方程中的 v_i 为衍生产品的现值，而这个衍生产品在 t_i 的收益等于与交易对手所有合约市价的总和。

⊖ 对于银行而言，如果第3个合约的价值为-4 500万美元，而不是-2 500万美元，交易对手会选择对于银行的交易均不违约，这时金融机构不会有任何损失。

在考虑是否与交易对手进行某笔新交易时，金融机构一个棘手的问题是计算新交易对预期信用损失的迭加效应。我们可以利用式(23-5)进行计算，在计算过程中我们可以考虑包含或不包含新合约的两种情形，有趣的是，净额结算有时会使得新合约对于预期违约损失的迭加效应为负，这种情形往往发生在新合约与现存合约价格存在负相关性的情形。

23.8.2　抵押制度

另外一种缓解信用风险的方法是**抵押制度**(collateralization)。假定，某公司与某金融机构之间有一系列衍生产品交易，一种典型抵押制度约定交易双方必须以一定的方式要对交易合约定期定价，对金融机构而言，如果合约的价格在某时刻超出一定的界限，公司必须向金融机构支付抵押品，由公司所提供的抵押品的价值与现存抵押品 Y 的总和等于合约的价值(对金融机构而言)与设定界限的差。当合约价格的走向对于公司有利时，即合约价格与设定界限的差小于注入抵押品的数量时，公司可以收回抵押品。当公司违约时，金融机构可以没收抵押品，如果公司不能及时注入抵押品，金融机构可以对交易平仓。

例如，对于某公司，某金融机构设定的极限为 1 000 万美元，为了计算抵押品数量，金融机构对合约每天都要按市场进行定价，假如在某天，合约的价格由 900 万美元增至为 1 050 万美元，金融机构可以再要求公司注入 50 万美元的抵押品，假如在后来一天的价格升至 1 140 万美元，金融机构还可以再要求公司注入 90 万美元的抵押品。[㊀]假如在后来一天的价格降至 1 090 万美元，公司可以要求金融机构归还价值为 50 万美元的抵押品。注意金融公司的界定范围(此例中为 1 000 万美元)可以认为是金融公司给公司设定的贷款额度。

公司支付给金融机构的抵押品必须是现金或某种可接受的金融产品，例如债券。对于现金形式的抵押品，金融机构需要支付利息，而对于其他形式的抵押品，金融机构对会其市价**打折**(haircut)。

如果抵押品条款为双向，也就是说对于金融机构，公司也设定某种范围，公司也可以在合约价格(对于公司而言)超出界定范围时，要求金融机构支付抵押品。

抵押品制度对于可能的违约提供了强有力的保护(这与第 2 章中讨论的保证金账户对市场交易人提供的保护类似)。但是，在以上讨论的界定范围的数量并没有任何保护。再有，即使界定范围为 0，这里所采用的保护措施也不一定会使得交易得到全面保护。当某家公司财务出现困难时，公司会对金融机构提出的抵押品要求不予理睬，当金融机构行使权利对交易平仓时，交易合约的市场价格也许变得对金融机构更为不利[㊁]。

23.8.3　降级触发策略

另外一个被金融机构常常用来缓解信用风险的方法是**降级触发**(downgrade trigger)策略，这一策略是指当交易对手的信用评级低于一定水平时，金融机构有权将衍生产品以市场价格平仓。[㊂]

如果公司的信用评级有大的跳跃(例如由 A 级到违约)，降级触发条款对金融机构并不能提供保护。另外如果降级触发条款只用于少数的交易对手，这一条款可能会更加有效。假如一家公司与许多交易对手都设定信用降级触发条约，这时条约带给交易对手(即金融机构)的保护将会十分有限(见业界事例 23-1)。

㊀ 在实际中，金融机构之间会商定一个最小资金转移额定，这意味着当市场价格变动很小时，并不一定会触发支付抵押品。

㊁ 针对这一问题，许多金融机构通过引入了 21 天 VaR 测度，来测定对手信用风险。——译者注

㊂ 在实际中，金融机构往往会施行与评级有关的抵押品管理制度，就是说当对手信用级别被降低时，会要求对手增加抵押品数量。在 2007 年 7 月开始信用危机中，友邦保险公司就是面对这样的增加抵押品的压力。——译者注

业界事例23-1 降级触发与安然公司的破产

2001年12月美国最大的公司之一安然公司宣布破产，直到安然破产前几天，安然公司的信用评级仍然是投资级，穆迪对安然在破产前的最后评级为Baa3，而标准普尔的评级为BBB－，股票市场对安然的破产有很好的预测，在安然破产之前的一段时间里，安然的股票价格急剧下跌，23.6节所讨论的模型对安然违约概率的预测在这一段时间急剧增长。

安然与交易对手进行的大量衍生产品交易中都设定了降级触发条约，这些降级触发条约阐明，当安然的信用评级低于投资级(即Baa3/BBB－)时，交易对手有权对交易平仓。假定安然的信用级别在2001年10月只是得到降级而不是破产，安然交易对手选择的平仓交易一定是那些对安然有负价值的交易(对交易对手而言具有正价值)，因此安然公司要向交易对手付出大量的费用，安然这时肯定是没有能力付出这大笔费用的，因此无论如何破产也会很快发生。

这一事例显示，降级触发条款只有在不被滥用时才会有效，如果一家公司跟大量对手签有降级触发条款，这也可能会加速公司的破产速度。对于安然公司的情形，我们也许会说安然公司注定会破产，所以将破产进程提前两个月不会带来太多的危害。事实上，安然公司在2001年10月有一次生存的机会，另外一家能源公司Dynergy曾试图寻找方法抢救安然，2001年10月，无论是安然的股东还是贷款人都不希望安然破产。

信用评级公司发现它们自己处在比较尴尬的位置，如果将安然降级以正确反映安然的财务窘态，这无非是将安然立即判以死刑，如果不这样做，就会给安然带来一线生机。

23.9 违约相关性

术语**违约相关性**(default correlation)用以描述两家公司同时违约的倾向。违约相关性的存在有许多原因。在同一行业或同一地理区域的公司所受外界影响的因素往往一样，因此这些公司可能会同时遭遇财政危机。经济条件会造成某些年的平均违约率高于其他年，一家公司的违约可能会造成另一家公司的违约，这种现象被称为信用**蔓延效应**(credit contagion effect)。违约相关性意味着信用违约风险不能够被完全分散，这一点正是造成风险中性违约率远远大于现实世界违约率的主要原因(见23.5节)。

当资产组合与多家交易对手有关时，违约相关性是决定组合违约损失概率分布的重要决定因素。[⊖]研究人员提出了两种描述违约相关性的模型，一种被称为**简化模型**(reduced form model)，另外一种被称为**结构模型**(structural model)。

简化模型假定不同公司的违约密度服从随机过程，随机过程之间通过一些宏观经济变量有一定的相关性，当公司A违约密度很高时，公司B违约密度也往往很高，这从而引入了公司之间的违约相关。

简化模型的数学形式很吸引人，并反映经济循环周期来产生违约相关性。该类模型的最主要缺点是它所能取得违约相关性的范围是有限的。即使两家公司的违约密度具有完美的相关性，但两家公司在同一时期违约的概率通常很低，在某些情形下这会产生问题。例如，当两家公司在同一行业及同一国家运作，或者一家公司的财政状态与另一家公司的财政状态息息相关时，我们往往希望产生较高的违约相关性。一种解决问题的方式是对模型进行推广来使得违约密度具有跳

⊖ 在www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes的Techinical Note 26中描述了评级机构所用的一种二项相关度量。

跃性。

结构模型是基于默顿模型(见23.6节)。当资产价值低于一定水平时，一家公司会违约。公司A和B之间的违约相关性是通过公司A的资产价值所服从的随机过程与公司B的资产价值所服从的随机过程之间的相互关系引入的。结构模型的主要优点是，该模型可以取得任意的相关系数，其主要缺点是计算速度十分缓慢。

23.9.1 违约时间的高斯Copula模型

对于违约时间，一种越来越流行的实用工具为高斯Copula模型。该类模型可以被视为一种简化的结构模型。这种模型假设所有的公司最终都会违约，并试图通过两家公司违约时间的概率分布来定量描述违约相关性。

高斯Copula模型既可应用于现实世界，也可应用于风险中性世界。在现实世界中，一家公司违约时间概率分布的左端尾部可由表23-1所示的评级公司数据来估计；在风险中性世界中，一家公司违约时间概率分布的左端尾部可由23.4节描述的债券价格信息来估计。

定义t_1为公司1的违约时间，t_2为公司2的违约时间，如果t_1和t_2的分布为正态，我们可以假定t_1和t_2的联合分布为二元正态分布。但事实上，公司的违约时间并非服从正态分布，这正是引入高斯Copula模型的原因。我们将t_1和t_2用以下变换来转换为两个新的变量x_1和x_2

$$x_1 = N^{-1}[Q_1(t_1)],\quad x_2 = N^{-1}[Q_2(t_2)]$$

其中Q_1和Q_2分别为t_1和t_2的累积概率分布，N^{-1}代表累积正态分布的反函数[即当$v=N(u)$时，$u=N^{-1}(v)$]。以上变换为分位数与分位数之间(percentile-to-percentile)的映射，t_1的概率分布上的50%的分位数被映射到$x_1=-1.645$，这正是标准正态分布的5%的分位数；t_1的概率分布上的10%的分位数被映射到$x_1=-1.282$，这正是标准正态分布的10%的分位数，等等。t_2与x_2之间的映射也类似。

由构造过程得出，x_1和x_2均服从均值为0、方差为1的正态分布。模型中假设x_1和x_2之间服从二元正态分布，这一假设被称为采用高斯Copula模型。使用这一假设会很方便，因为t_1和t_2的联合概率分布完全由t_1和t_2的累积违约分布Q_1和Q_2及一个相关参数来定义。

高斯Copula模型诱人之处在于这一模型可以被推广到多个公司。我们考虑n家公司，第i家公司的违约时间为t_i，我们将t_i转换为一个新的服从标准正态分布的变量x_i，这里采用的映射为分位数与分位数之间的映射

$$x_i = N^{-1}[Q_i(t_i)]$$

式中Q_i为t_i的累积概率分布。然后我们假定所有x_i之间服从多元正态分布。由此得出，t_i与t_j之间的违约相关性由x_i与x_j之间的相关性来定义，这一相关性被称为**Copula相关系数**(copula correlation)[⊖]。

高斯Copula模型常常用于描述不满足正态分布之间的相关性结构，这一模型允许相关结构的估计与变量边际(即无条件)分布无关。虽然变量之间并不一定满足多元正态分布，但对每一个变量进行变换后，所有被变换后的变量满足多元正态分布。

【例23-3】 假定我们希望对10家公司在今后5年的违约进行模拟。任意两家公司之间的Copula违约相关系数为0.2，对于任意一家公司，在今后1、2、3、4、5年的累积违约概率分别为1%、3%、6%、10%和15%。在应用高斯Copula模型时，我们要在x_i，$1\leqslant i\leqslant 10$之间所满足的多元正态分布之间抽样，每两个变量之间的相关系数都是0.2。然后，我们将x_i转换为违约时

⊖ 作为近似，t_i与t_j之间相关性常常被假设为公司i股票和公司j股票之间的相关性。

间 t_i。当从正态分布得出的抽样小于 $N^{-1}(0.01)=-2.33$ 时，违约发生在第一年；当样本介于 -2.33 和 $N^{-1}(0.03)=-1.88$ 之间时，违约发生在第二年；当样本介于 -1.88 和 $N^{-1}(0.06)=-1.55$ 之间时，违约发生在第三年；当样本介于 -1.55 和 $N^{-1}(0.10)=-1.28$ 之间时，违约发生在第四年；当样本介于 -1.28 和 $N^{-1}(0.15)=-1.04$ 之间时，违约发生在第五年；当样本大于 -1.04 时，在第五年内没有违约。

23.9.2 基于因子的相关性结构

在高斯 Copula 模型中，为了避免对两个变量 x_i 与 x_j 之间都定义不同的相关系数，我们常常可以采用单因子模型，其假设为

$$x_i = a_iF + \sqrt{1-a_i^2}Z_i \tag{23-10}$$

式中，F 为影响所有公司的违约状态的共同因子，Z_i 为只影响公司 i 的因子。F 及 Z_i 服从独立标准正态分布。参数 a_i 是 $-1\sim1$ 之间的常数。x_i 与 x_j 之间的相关系数为 a_ia_j[⊖]。

假定公司 i 在 T 时刻之前违约的概率为 $Q_i(T)$。在高斯 Copula 模型下，当条件 $N(x_i)<Q_i(T)$ 或 $x_i<N^{-1}[Q_i(T)]$ 满足时，违约在 T 时刻之前发生。由式(23-10)得出，以上条件等价于

$$a_iF + \sqrt{1-a_i^2}Z_i < N^{-1}[Q_i(T)]$$

或

$$Z_i < \frac{N^{-1}[Q_i(T)] - a_iF}{\sqrt{1-a_i^2}}$$

因此，在给定 F 值的条件下，违约概率为

$$Q_i(T \mid F) = N\left(\frac{N^{-1}[Q_i(T)] - a_iF}{\sqrt{1-a_i^2}}\right) \tag{23-11}$$

单因子高斯 Copula 模型的一种特殊形式是当对于任意公司违约概率分布均相同，并且任意两家公司 i 和 j 之间的相关系数均相同的情形。假定对所有 i，$Q_i(T)=Q(T)$，共同的相关系数为 ρ，即对所有的 i，$a_i=\rho$，这时式(23-11)变为

$$Q(T \mid F) = N\left(\frac{N^{-1}[Q(T)] - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right) \tag{23-12}$$

23.10 信用 VaR

信用风险价值度的定义与市场风险价值度类似(见第 21 章)。例如，一年展望期的 99.9% 的 VaR 等于在今后一年内在 99.9% 把握程度下信用损失不会超出的数量。

考虑一家银行持有一个很大的贷款组合，组合中的贷款比较相似。作为近似，假定每笔贷款的违约概率相等，并且贷款之间的相关系数也相等。当采用违约时间高斯 Copula 模型时，式(23-12)的右端项是对截止时间 T 违约占整体交易组合的百分比的一个很好的估计，该估计值为 F 的函数，其中 F 服从标准正态分布。我们有 $X\%$ 把握肯定其价值大于 $N^{-1}(1-X)=-N^{-1}(x)$。因此，我们有 $X\%$ 的把握肯定，在今后的 T 年内，违约概率不会超出 $V(T, X)$，其中

$$V(X,T) = N\left(\frac{N^{-1}[Q(T)] + \sqrt{\rho}N^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \tag{23-13}$$

⊖ 参数 a_i 有时由公司 i 的股票收益与一个分散性较好的市场指数收益之间的相关系数来近似。

以上结果由 Vasicek 最先给出[1]。如式(23-12)所示，$Q(T)$为截止时间 T 违约的概率，ρ 为任意两个贷款之间的 Copula 相关系数。

采用 $X\%$ 置信度，展望期为 T，信用 VaR 的近似估计为 $L(1-R)V(X, T)$，式中 L 为贷款的规模，R 为回收率。每笔贷款对整体 VaR 的贡献为 $L_i(1-R)V(X, T)$。以上模型是监管部门计算信用资本金的时所用的一些公式的基础。[2]

【例 23-4】 假定一家银行持有价值 1 亿美元的零售贷款，每一贷款的年违约概率为 2%，违约时贷款平均回收率为 60%，Copula 相关系数估计值为 0.1，此时

$$V(0.999,1) = N\left(\frac{N^{-1}(0.02) + \sqrt{0.1}N^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-0.1}}\right)$$
$$= 0.128$$

这说明我们有 99.9% 的把握肯定违约率不会大于 12.8%，一年展望期的 99.9% 信用 VaR 为 100 × 0.128 × (1 − 0.6)，即 513 万美元。

CreditMetrics

许多银行已经开发出用于内部使用的计算信用 VaR 的系统，其中最流行的方法为 CreditMetrics，该系统利用对所有交易对手信用评级变化模拟来估计信用损失的概率分布。假定我们想确定一年后的损失概率分布。在每次模拟中，我们通过抽样来决定每个交易对手在一年内的信用评级变化，然后对每个合约进行定价来计算整体信用损失。通过一个大量的模拟，我们可以得出信用损失的概率分布，并以此可以计算出信用风险价值度。

CreditMetrics 方法计算速度非常缓慢，但计算结果体现了由信用降级和违约所带来的损失，同时也可以将在 23.8 节所描述的信用风险缓解条款包含在分析中。

表 23-6 是一个典型的由信用评级机构所提供的关于信用转移的历史数据。这种数据是 CreditMetrics 系统中的蒙特卡罗模拟法的基础。这一数据显示一个债券在一年时间内，由某种信用级别转变为另一种信用级别的概率。例如，一个当前信用级别为 A 的债券有 90.91% 的可能在第一年年底的信用级别仍为 A 级，这一债券有 0.05% 的可能在第一年违约，有 0.09% 的可能在第一年降级为 B 级债券，等等[3]。

表 23-6 一年的信用转移矩阵，数据基于 1970 ~2009 年的历史数据，违约概率以百分比表达，在没有评级的公司(without rating，缩写为 WR)计算时做了处理

初始评级	年末评级								
	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca-C	误差
Aaa	90.57	8.76	0.63	0.01	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
Aa	1.06	90.30	8.19	0.36	0.05	0.02	0.01	0.00	0.02
A	0.06	2.90	90.91	5.44	0.50	0.09	0.03	0.00	0.05
Baa	0.04	0.20	4.91	89.18	4.44	0.83	0.19	0.02	0.17
Ba	0.01	0.07	0.42	6.24	83.47	7.99	0.58	0.09	1.13
B	0.01	0.04	0.15	0.39	5.40	82.50	6.35	0.79	4.37
Caa	0.00	0.02	0.02	0.19	0.51	9.55	70.01	4.97	14.72
Ca-C	0.00	0.00	0.00	0.00	0.43	3.01	11.61	51.67	33.28
Default	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00

[1] 见 O. Vasicek，“Probability of Loss on a Loan Portfolio，”Working Paper，KMV，1987。Vasicek 的结果发表在 2002 年 12 月期的 *Risk* 杂志上，文章的标题为“Loan Portfolio Value”。

[2] 更多细节见约翰·赫尔《风险管理与金融机构》第 2 版，机械工业出版社，2010 年。

[3] 作者网页上的技术报告(Technical Note 11)解释了如何采用表 23-6 来计算期限不为一年的信用转移矩阵。

在测定信用损失的抽样过程中，对于不同交易对手的信用评级变化不应该假设为相互独立，[⊖]高斯 Copula 模型可以用来构造信用评级变化的联合概率分布，两个公司信用评级转移的 Copula 相关性一般被设定为等于股票收益的相关性，这里的股票收益是由类似 22.9 节所讨论的因子模型来确定。

为了说明 CreditMetrics 模型，假定我们采用表 23-6 所示的信用转移矩阵来对一家 Aaa 级公司和一家 Baa 级公司在 1 年时间内的信用评级变化进行模拟。假设两家公司股票收益之间的相关系数为 0.2。在每一次模拟试验中，我们对于两个服从标准正态分布的变量 x_A 和 x_B 进行抽样，并保证 x_A 和 x_B 之间的相关系数为 0.2，变量 x_A 决定 Aaa 级公司新的信用等级，变量 x_B 决定 Baa 级公司新的信用等级，因为 $N^{-1}(0.9057)=1.3147$，当 $x_A<1.3147$ 时，Aaa 级公司的级别保持不变；因为 $N^{-1}(0.9057+0.0876)=2.4730$，当 $1.3147\leqslant x_A<2.4730$ 时，Aaa 级公司信用级别变为 Aa 级；因为 $N^{-1}(0.9057+0.0876+0.0063)=3.3528$。当 $2.4730\leqslant x_A<3.3528$ 时，Aaa 级公司信用级别变为 A 级；并依此类推。考虑 Baa 级公司，因为 $N^{-1}(0.0004)=-3.3528$，当 $x_B<-3.2528$时，B 级公司信级别变为 Aaa；因为 $N^{-1}(0.0004+0.0020)=-2.8202$，当 $-3.3528\leqslant x_B<-2.8202$ 时，B 级公司信用级别变为 Aa；因为 $N^{-1}(0.0004+0.0020+0.0491)=-1.6305$，当 $-2.8202\leqslant x_B<-1.6305$ 时，B 级公司信用级别变为 A；当 $-2.7822\leqslant x_B<-1.6045$ 时，B 级公司信用级别变为 A；等等。Aaa 级公司在 1 年内不会违约，Baa 级公司在 $x_B>N^{-1}(0.9983)$时违约，这对应于 $x_B>2.9290$。

小 结

公司在将来某段时间的违约概率可以由历史数据、债券价格或股票价格来估算。由债券价格估计出的概率为风险中性违约概率，由历史数据估计出的概率为现实世界的违约概率。现实世界的概率可以用于情形分析及信用风险价值度(Credit VaR)的计算，风险中性概率可以用于与信用有关的产品定价，风险中性违约概率通常远远高于现实世界违约概率。

当交易对手违约时，净额结算可以减低预期损失的数量。在净额结算条款中金融机构阐明如果交易对手对某个交易违约，那么交易对手必须对于其他的交易也同时违约。损失的数量也可以通过抵押品条款和降级触发条款来降低。在抵押品条款制度中交易对手必须支付抵押品；在降级触发方式中当交易对手信用低于一定水平时，金融机构有权对交易进行平仓。

信用 VaR 的定义与市场 VaR 的定义相似。一种计算信用 VaR 的方法是计算关于违约时间的高斯 Copula 模型，这一方法已被监管采用来决定信用风险资本金；另外一种计算信用 VaR 的方法是 CreditMetrics，该方法利用高斯 Copula 模型来决定信用等级的变化。

推荐阅读

Altman, E.I. "Measuring Corporate Bond Mortality and Performance," *Journal of Finance*, 44 (1989): 902–22.

Altman, E.I., B. Brady, A. Resti, and A. Sironi. "The Link Between Default and Recovery Rates: Theory, Empirical Evidence, and Implications," *Journal of Business*, 78, 6 (2005), 2203–28.

Duffie, D., and K. Singleton "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds," *Review of Financial Studies*, 12 (1999): 687–720.

Gregory, J. *Counterparty Credit Risk*. Chichester, UK: Wiley, 2010.

Finger, C.C. "A Comparison of Stochastic Default Rate Models," *RiskMetrics Journal*, 1 (November 2000): 49–73.

Hull, J., M. Predescu, and A. White. "Relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond Yields, and Credit Rating Announcements," *Journal of Banking and Finance*, 28 (November 2004): 2789–2811.

⊖ 这里的交易对手应更正为债券发行商(bond issuer)。——译者注

Kealhofer, S. "Quantifying Credit Risk I: Default Prediction," *Financial Analysts Journal*, 59, 1 (2003a): 30–44.

Kealhofer, S. "Quantifying Credit Risk II: Debt Valuation," *Financial Analysts Journal*, 59, 3 (2003b): 78–92.

Li, D.X. "On Default Correlation: A Copula Approach," *Journal of Fixed Income*, March 2000: 43–54.

Merton, R.C. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29 (1974): 449–70.

Vasicek, O. "Loan Portfolio Value," *Risk* (December 2002), 160–62.

练习题

23.1 某家企业3年期的债券的收益率与类似的无风险债券收益率的溢差为50个基点，债券回收率为30%，估计3年内每年的平均违约密度。

23.2 在练习题23.1中，假定同一家企业5年期债券的收益率与类似的无风险债券收益率溢差为60个基点，假定回收率也为30%，估计5年内每年的平均违约密度，由计算结果显示的第4年到第5年的平均违约密度为多少？

23.3 对于以下情形，研究人员应采用现实世界还是风险中性违约概率：(a)计算信用风险价值度，(b)因违约而造成的价格调整。

23.4 回收率通常是怎么定义的？

23.5 解释无条件违约概率密度与违约密度的区别。

23.6 验证(a)表23-4中第二列结果与表23-1中的数值一致，(b)表23-5中的第四列结果与表23-4中的数值一致，在计算中假设回收率为40%。

23.7 解释净额结算的运作方式。某银行已经与某一交易对手有一笔交易，解释与同一交易对手进行另一笔交易有可能增加也有可能减少对这一交易对手的信用风险暴露的原因。

23.8 抵押品中的"折扣"(haircut)含义是什么？假如一家公司将自己的股票作为抵押品，你会做出什么反映？

23.9 从以下两个角度解释关于违约时间的高斯Copula模型和CreditMetrics的不同：(a)信用损失的定义，(b)违约相关性的模型。

23.10 假定LIBOR/互换曲线为水平6%(以连续复利计)，5年期券息为5%(每半年付息一次)的债券价格为90.00美元，对应于这一债券的资产互换应如何构造？此时资产互换的溢差应如何计算？

23.11 证明当在违约发生时，如果可以追回数量等于无违约损失情形的债券价格的数量，那么一个企业的带息债券价格等于其所包含的零息债券价格的和。但如果损失等于债券面值加上累计利息时，以上结论不再成立。

23.12 一个4年期债券的券息为4%，每半年付息一次，收益率为5%(以连续复利计)，无风险收益率曲线为水平，利率为3%(以连续复利计)，假定违约事件仅仅发生在年末(付息之后)并假设回收率为30%。假定风险中性违约概率在今后每年均相同，估计风险中性违约概率。

23.13 假定某公司发生的3年期及5年期债券的券息均为每年4%，每年支付一次，这两个债券的收益率(以连续复利计)分别为4.5%和4.75%，对于所有期限的无风险利率均为3.5%(以连续复利计)，债券回收率为40%，违约事件只能发生在每年的正中间，从第一年到第三年的每年风险中性违约概率为Q_1，从第四年到第五年的违约率为Q_2，估计Q_1及Q_2。

23.14 假定某金融机构与交易对手X之间有一个与英镑利率有关的利率互换交易，

同时与交易对手Y之间有一个方向完全相反但其他变量完全一致的利率互换交易，以下哪一个为正确观点？哪一个为错误观点？

(a)违约费用的总贴现值等于与X交易的违约费用的总贴现值加上与Y交易的违约费用的总贴现值。

(b)在一年内，两交易迭加的预期暴露头寸等于与X交易的预期暴露头寸加上与Y交易的预期暴露头寸。

(c)两交易迭加以后在一年时风险暴露头寸所对应的95%置信区间的上限等于一年时与X交易风险暴露头寸的95%置信区间的上限加上一年时与Y交易风险暴露头寸的95%置信区间的上限。

解释你的答案。

23.15 某公司进入了一远期合约，合约约定这家公司在一年后必须以150澳元(AUD)的价格卖出100美元(USD)，合约在开始时为平值，换一句话说远期合约的汇率为1.5。一年的美元利率为每年5%，交易对手借入期限为一年的美元的利率为每年6%，汇率的波动率为每年12%，估计违约费用的贴现值，在这里假设违约仅仅发生在合约的到期日。

23.16 假定在练习题23.15中，6个月远期汇率也是1.5，并且6个月美元的无风险利率也是每年5%，在假设交易对手借入6个月资金的利率为每年5.5%，估计违约费用的贴现值。这里假定违约既可发生在6个月，也可能发生在1年(假如违约发生在6个月的时间点上，违约给公司造成的损失为合约的市场价值)。

23.17 “远期合约长头寸具有的信用暴露等价于一个无违约风险看跌期权短头寸与一个有违约风险看涨期权长头寸的组合”，解释这一观点。

23.18 解释为什么对于不同交易对手的两个相反方向的远期交易与一个跨式组合交易(straddle)非常接近。

23.19 解释为什么一对相反方向的利率互换的信用风险比相应的一对相反方向的汇率互换的信用风险更低？

23.20 “当一家银行在商谈两个相反方向的货币互换时，银行应尽量选择从低信用公司收取低利率”，解释这是为什么？

23.21 当存在违约风险时，看跌-看涨期权平价关系式是否还成立？解释你的答案。

23.22 考虑某资产互换，B为对应于1美元面值的债券价格，B^*为对应于一美元面值的无风险债券价格，V为对应1美元面值的溢差贴现值，证明$V=B^*-B$。

23.23 证明23.6节的默顿模型中的T年期零息债券的信用溢差等于

$$-\ln[N(d_2)+N(-d_1)/L]/T$$

其中$L=De^{-rT}/V_0$。

23.24 假定某企业3年期零息债券收益率与相应的3年期无风险零息债券收益率的溢差为1%。对于该企业所卖出的期权，由布莱克-斯科尔斯-默顿所计算出的期权价格比实际价格高出了多少？

23.25 对以下情形给出例子：(a)正向风险，(b)错向风险。

作业题

23.26 假定一个3年期企业债券的券息为每年7%，券息每半年支付一次，债券的收益率为5%(每年复利两次)，对应于所有期限的无风险债券收益率为每年4%(每年复利两次)，假定违约事件每半年可能发生(刚好在券息付出日之前)，回收率为45%。在以下假设下估测违约概率：(a)对应于每一个可能违约事件的无条件违约概率均相同，(b)在每个违约日期之前无违约的条件下，违约条件概率均相同。

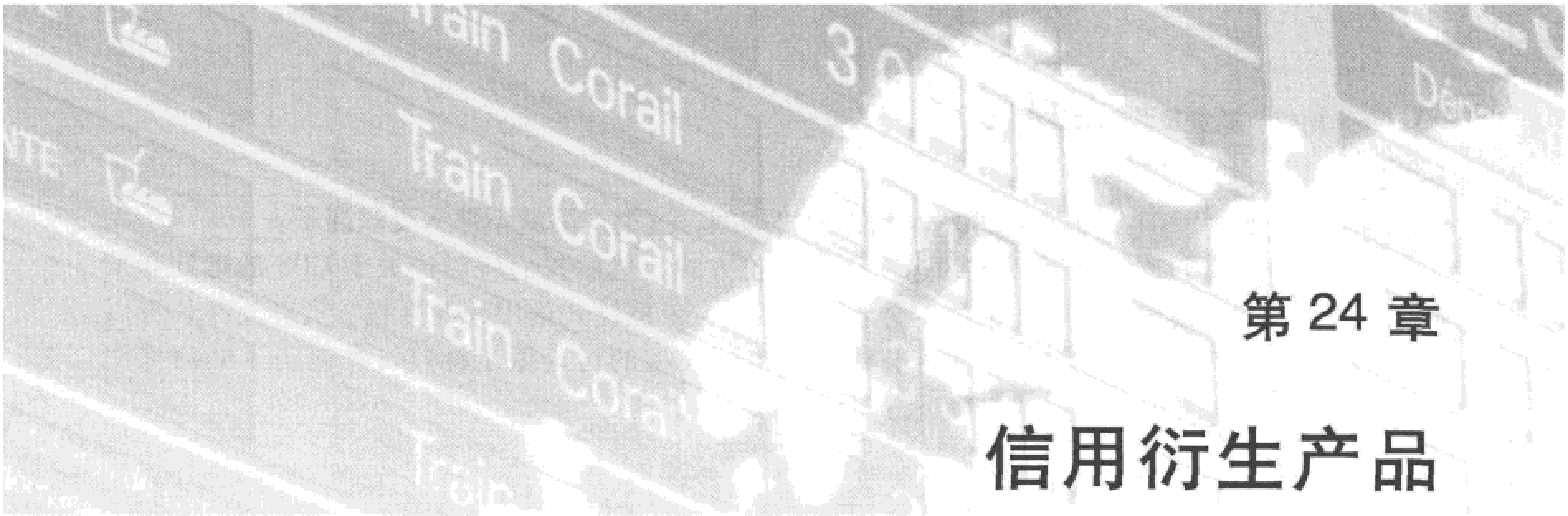
23.27 某公司发行了1年期与2年期债券，两种债券的券息均为8%，券息每年支付一次，两债券的收益率分别为6%与6.6%(以连续复利计)，对应于所有期限的无风险利率均为4.5%，回收率为

35%，违约事件均发生在年正中间，估计每年的风险中性违约率。

23.28 仔细解释现实世界概率与风险中性世界概率的不同，这两个概率哪个会更高？某银行进入一个信用衍生产品合约，合约约定如果某公司的信用从A降为Baa或更低时，银行支付100美元，一年期的无风险利率为5%，采用表23-6来估计衍生产品的价格，在计算中你需要什么样的假设？你对衍生产品的价格可能是高估了还是低估了？

23.29 某公司的股票市价为400万美元，股票变动的波动率为60%，在2年时要偿还债券的数量为1 500万美元，无风险利率为每年6%，采用默顿模型来估测违约预期损失、违约概率及违约时的回收率，解释为什么默顿模型会给出一个较高的回收率(提示：Excel中的Solver功能可以用于对这一问题的方程求解)。

23.30 假定某银行有一价值为1 000万美元的风险暴露，一年的违约概率平均为1%，回收率平均为40%，Copula相关系数为0.2，估计一年展望期的99.5%信用VaR。



第 24 章 信用衍生产品

20 世纪 90 年代末以来，在衍生产品市场中最重要的发展是信用衍生产品增长。2000 年信用衍生产品合约的总面值仅为 8 000 亿美元，而到 2009 年 12 月，总面值已增至 32 万亿美元。信用衍生产品是指收益与某个(或多个)公司或国家的信用有关的合约，本章我们将解释信用衍生产品的运作及其定价方式。

信用衍生产品使得公司能够像对市场风险那样对信用风险交易。以前银行或其他金融机构一旦承受了信用风险后，只能被动等待期望最好的结果，而对自己面临的信用风险无能为力。而现在金融机构可以主动地管理自己的信用风险，在保留一些信用风险后，将其余的利用信用衍生产品来保护。如业界事例 24-1 所示，银行已经成为最大的信用保护买入方，而保险公司已经成为最大的信用保护卖出方。

业界事例 24-1 谁承担了信用风险

在传统上，银行的业务是进行放贷，然后承担借款人的违约风险。但多年来银行不太愿意将贷款留在自己的资产负债表上，这是因为如果将监管机构所要求的资金考虑在内后，贷款的平均收益要逊色于其他形成的资产。如第 8.1 节里所述，通过构造资产支持型债券(assetbacked securities)，银行可以将这些贷款(及其信用风险)转移给投资者。在 20 世纪 90 年代末和 21 世纪初，银行还大量地利用了衍生产品将自身贷款组合的信用风险转移给金融系统的其他参与者。

如果银行是信用保护的净买入方，那么谁是信用保护的净卖出方呢？答案是保险公司。⊖ 政府对保险公司的监管与对银行有所不同，有时保险公司会比银行更加愿意承担信用风险。

以上所讨论的种种原因造成了最终承担贷款信用风险的金融机构与最初检测贷款人信用质量的机构往往是不同的。2007 年的金融危机证明了这种现象对整个金融系统的健康是没有好处的。

信用衍生产品可以被分类为是关于**单一公司**(single name)产品，或是关于**多家公司**(multiname)产品。最流行的关于单一公司信用衍生产品为**信用违约互换**(credit default swap, CDS)，该产品的收益与某家公司或某个国家的信用有关。每个 CDS 合约均有两方，即信用保护的卖出方和买入方。当某个指定的实体(某公司或国家)违约时，信用保护的卖出方要向信用保护的买入方提供赔偿。最为流行的关于多家公司的信用衍生产品为**债务抵押债券**(collateralized debt obligation, CDO)。在 CDO 中，首先需要阐明一个债券组合，然后债券组合的资金流被一种约定的方式分配到若干类投资者。在 2007 年 6 月以前，与单一公司的衍生产品相比，多家公司的产品

⊖ 事实上，基金公司也是信用保护的主要买入方。——译者注

在市场上备受欢迎。但在2007~2009年信用危机期间，这类产品就不那么受欢迎了。

本章开篇，我们首先解释CDS的运作以及定价方式，然后我们将讨论关于CDS的远期和期权交易，以及总收益互换交易。本章还会涉及信用指数、篮筐式信用违约互换、资产支撑债券以及债务抵押债券。本章将第23章中关于高斯Copula模型的讨论做了推广，并说明了如何采用Copula模型来对债务抵押债券的份额进行定价。

24.1 信用违约互换

市场上最流行的信用衍生产品为**信用违约互换**(credit default swap，CDS)。这种合约给某一特定公司违约的风险提供了保险，这里所涉及的某家公司被称为**参考实体**(reference entity)，而该公司的违约被定义为**信用事件**(credit event)。信用违约互换(保险)的买入方在信用事件发生时有权利将违约公司债券以债券面值的价格卖给信用违约互换的卖出方，⊖而这一债券的面值也被称为信用违约互换的**名义本金**(notional principal)。

CDS的买入方向卖出方定期付款，直到CDS结束或信用事件发生，这里的定期付款通常是在定期付款时间段的期末，但也有交易规定定期付款是在每半年末或者每年末，或提前付款。在违约事件发生时，合约的交割方式可能是交付债券实物或者是现金支付。

以下例子可以帮助我们理解CDS的结构。假如某两家公司在2012年3月20日签订5年期的CDS，假定名义本金为1亿美元，买入方为得到对某参考实体违约的保护而每年付90个基点，每季度末付款一次。

CDS的结构如图24-1所示。如果参考实体没有违约(也就是没有信用事件发生)，CDS的买入方不会得到任何收益，并且在2012年6月和以后的每个季度末都支付1亿美元的22.5个基点(90个基点的1/4)，直到2017年3月。每个季度所支付的数量为0.002 25 × 1000 000 00，即225 000美元。⊜当有信用事件发生时，卖出方很可能需要向买入方支付一笔可观的赔偿。假设在2015年5月20日(第4年的2个月后)买入方通知卖出方有信用事件发生，如果合约指定的交割方式为实物交割，买入方有权以1亿美元的价格向卖出方出售面值为1亿美元、由参考实体所发行的债券。如果合约指定的交割方式为现金交割(目前一般是这种方式)，在信用事件发生后的几天内将会利用由国际互换与衍生工具协会(ISDA)组织的拍卖程序来确定**最便宜可交割债券**(cheapest deliverable bond)的市场中间价。假如通过拍卖确定了每100美元本金的股票只值35美元，这时CDS卖出方必须向买入方支付6 500万美元。

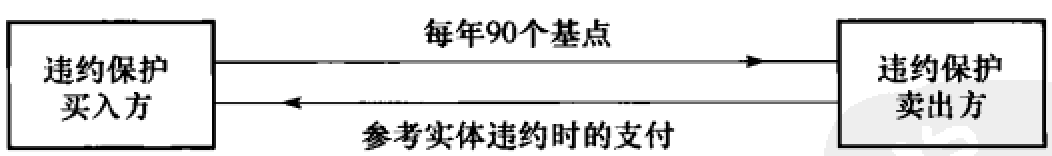


图24-1 信用违约互换(CDS)

信用事件发生后，信用保护买入方向卖出方在每3个月、半年或一年的定期付款就会终止。但是，因为付款时间是期尾，所以通常在最后买入方仍然需要向卖出方支付最后的**应计付款**(accrual payment)。在我们的例子中，由于违约事件发生在2015年5月20日，买入方需要向卖出方支付由2015年3月20日到2015年5月20日之间的应计付款(大约为15万美元)。在这一次付款之后，买入方不再需要支付任何其他费用。

为了买入信用保护，买入方所付按名义本金百分比计算的数量被称为**CDS的互换溢价**(CDS spread)。CDS市场的做市商是几家大银行。对于某公司5年CDS的报价，做市商可能会给出250

⊖ 债券的面值是指债券发行人在不违约情形下应偿还的本金数量。

⊜ 每季度的付款数量可能会与225 000美元稍有出入，这是由于第6章介绍的天数计算惯例的作用。

个基点的买入价、260 个基点的卖出价，这意味着做市商准备以每年 250 个基点（每年付本金的 2.5%）买入这家公司的信用保护，同时也准备以每年收入 260 个基点（每年收入本金的 2.6%）卖出这家公司的信用保护。

许多公司和国家可以成为在市场上交易的 CDS 合约参考实体。付款频率通常为每季度一次，付款时间为期尾。5 年期的 CDS 在市场上最为流行，但其他像 1 年、2 年、3 年、7 年和 10 年期的 CDS 在市场上也较为常见。合约的到期日一般是以下标准日期：3 月 20 日、6 月 20 日、9 月 20 日和 12 月 20 日。这种约定的结果是合约在最初签订时的真正期限与整年数可能比较接近，但并不一定为合约所说的整年数。假定你在 2012 年 11 月 15 日告诉一个交易商要买入对某家公司 5 年期的信用保护，合约的有效期可能截至 2017 年 12 月 20 日。你的第一次付款日为 2012 年 12 月 20 日，数量是覆盖 2012 年 11 月 15 日至 2012 年 12 月 20 日这一段时间。[⊖]CDS 合约的关键是对违约事件的定义。违约事件通常为应当付款时未能支付、债务重组或破产。在北美的合约中，债务重组一般不算违约事件，尤其是在公司债务有很高收益率的情形下。业界事例 24-2 有更多关于 CDS 市场的内容。

业界事例 24-2 CDS 市场

在 1998 年和 1999 年，国际互换与衍生工具协会（ISDA）为在场外交易市场上交易 CDS 建立了标准合约。从此，这一市场飞速增长。CDS 合约与保险合约有许多相似之处，但也有一个关键区别，即保险合约所保护的是已经拥有资产的损失，但对 CDS 来讲，却并不一定要拥有标的资产。

在 2007 年 8 月开始的信用危机期间，监管机构非常关心系统风险（见业界事例 2-3），它们认为 CDS 是使得市场脆弱的原因之一。这些产品的危险之处在于一家金融机构的违约可能会给与其有 CDS 交易的对手带来巨大损失，从而进一步引起其他金融机构的违约。保险巨头 AIG 的麻烦更加重了它们的忧虑。AIG 是为由按揭贷款生成的 AAA 份额提供保险的大卖主（见第 8 章）。事实证明这些保护对 AIG 来讲是非常昂贵的，并且需要美国政府对其进行援助。金融机构之间 CDS 交易（以及其他场外交易的衍生产品）中心结算系统的建立正是由于监管机构的忧虑而成立的。中心结算系统要求这些产品交易的参与者缴纳保证金，这与期货交易需要缴纳保证金的方式是一样的。

在 2007 年和 2008 年这两年中，许多信用衍生产品的交易都停止了，但 CDS 的交易却仍然很活跃（尽管保护的费用大幅度上涨）。相对其他信用衍生产品，CDS 的优点是结构很简单，其他信用衍生产品如由住房按揭贷款证券化所生成的产品，却缺乏透明度。

在一家公司上的 CDS 合约规模超过其债务总额的情况并不罕见，此时显然需要对合约进行现金交割。当雷曼在 2008 年 9 月违约时，其 CDS 合约的规模是 4 000 亿美元，而雷曼公司尚未平仓的债务只有 1 550 亿美元。对 CDS 合约买入方支付的（通过拍卖来确定）金额为面值的 91.37%。

24.1.1 CDS 与债券收益率

CDS 可以用来对冲企业债券头寸的风险。假定某投资者按面值买入了一个 5 年期收益率为每年 7% 的企业债券，同时又签订了一个 5 年期 CDS 来对债券发行者的违约提供保护。假定 CDS 的溢价为 200 个基点，即每年 2%。CDS 的作用是将企业债券转换为无风险债券（至少在近似意义上）。如果债券发行人不违约，投资者收益率为每年 5%（企业债券收益率减去 CDS 的溢价）。如果债券发行

⊖ 如果第一个标准日期在 1 个月之内，第一次付款通常会安排在第二个标准日期上；否则，第一次付款会安排在第一个标准日期上。

人违约，投资者在违约发生前的收益率为5%，然后根据CDS合约的条款投资者可以用债券换回债券的本金。投资者在收到本金后可以在5年的剩余时间内将资金以无风险利率进行投资。

这说明n年期CDS溢价应该大约等于n年的企业债券收益率与无风险利率的差价。如果CDS溢价远小于企业债券收益率与无风险利率的差价，那么投资者通过买入企业债券并购买信用保护而得出的收益率（近似于无风险）会大于无风险利率；如果CDS溢价远大于企业债券收益率与无风险利率的差价，则投资者可以卖空企业债券并卖出信用保护而得到小于无风险利率的借款利率。这里的无风险利率通常假定是LIBOR/互换利率，所以债券收益率与无风险利率的差价等于资产互换溢价（见23.4节）。[⊖]

CDS债券基点的定义是

$$\text{CDS 债券基点} = \text{CDS 溢价} - \text{债券收益率高出无风险利率的溢差}$$

或

$$\text{CDS 债券基点} = \text{CDS 溢价} - \text{资产互换溢价}$$

上面的无套利论证说明这个值应当接近于0。在2007年信用危机之前，这个值的平均稍稍为正。在危机期间，往往是负值，并且在2009年1月份的一段时间里有过很大的负值。

24.1.2 最便宜可交割债券

像在23.3节解释的那样，债券的回收率等于债券在刚刚违约后的价格与面值的比率，这意味着CDS的收益等于$L(1-R)$，其中L为面值，R为回收率。

通常在CDS合约中指定违约时可以选择几种不同的债券用于交割，这些债券的优先级别往往相同，但在违约发生后，债券与本金的比率可能会有所不同，[⊜]这样一来，CDS就给信用保护的买入方提供了选取某种最便宜可交割债券的期权。我们在前面已经提到过，最便宜可交割债券的价值通常会由ISDA组织的拍卖程序确定的，这也确定了保护买入方的收益。

24.2 信用违约互换的定价

我们可以利用违约概率来估计关于特定参考实体的CDS溢价。下面用一个简单的例子来说明这一点。

假定在没有前期违约的条件下，参考实体一年的违约概率为2%，表24-1给出了在将来5年里参考实体在每年的生存概率与无条件违约概率（即在0时刻观察到的违约概率）。第一年的违约概率为0.02，参考实体在第一年年底的生存概率为0.98。参考实体在第一年与第二年之间的违约概率为$0.02 \times 0.98 = 0.0196$，第二年底的生存概率为$0.98 \times 0.98 = 0.9604$，在第二年与第三年之间的违约概率为$0.02 \times 0.9604 = 0.0192$，依此类推。

表24-1 无条件违约概率与生存概率

时间（年）	违约概率	生存概率	时间（年）	违约概率	生存概率
1	0.0200	0.9800	4	0.0188	0.9224
2	0.0196	0.9604	5	0.0184	0.9039
3	0.0192	0.9412			

接下来假定违约发生的时间在年中，并且在信用违约互换中信用保护的付款时间是在每年的年终。我们还假定无风险（假定为LIBOR）利率为每年5%（连续复利），回收率为40%。我们将计

⊖ 这里没有考虑对手违约风险。——译者注

⊜ 有几个原因会造成这种现象，违约时对于债券的追索往往包括面值和应计利息，应计利息高的债券在违约时的价格往往会比较高。市场也许断定重组事件发生之后，公司的决定会对某些债券持有者更为有利。

算过程分为三部分，计算结果分别显示在表 24-2、表 24-3 和表 24-4 中。

表 24-2　预期付款的贴现值

时间(年)	生存概率	预期付款	贴现因子	预期付款的贴现值
1	0.980 0	0.980 0s	0.951 2	0.932 2s
2	0.960 4	0.960 4s	0.904 8	0.869 0s
3	0.941 2	0.941 2s	0.860 7	0.810 1s
4	0.922 4	0.922 4s	0.818 7	0.755 2s
5	0.903 9	0.903 9s	0.778 8	0.704 0s
总计				4.070 4s

表 24-3　预期收益的贴现值

时间(年)	违约概率	回收率	预期收益(美元)	贴现因子	预期收益的贴现值(美元)
0.5	0.020 0	0.4	0.012 0	0.975 3	0.011 7
1.5	0.019 6	0.4	0.011 8	0.927 7	0.010 9
2.5	0.019 2	0.4	0.011 5	0.882 5	0.010 2
3.5	0.018 8	0.4	0.011 3	0.839 5	0.009 5
4.5	0.018 4	0.4	0.011 1	0.798 5	0.008 8
总计					0.051 1

表 24-2 给出了信用违约互换溢价费用的贴现值，在这里我们假定溢价每年为 s，本金为 1 美元。例如，第三个付款项发生的概率为 0.941 2，对应的付款量为 s，因此付款费用的期望值为 0.941 2s，其贴现值为 $0.941\,2se^{-0.05\times3}=0.810\,1s$。所有付款期望值的贴现总和为 4.070 4$s$。

表 24-3 给出了对应本金为 1 美元的预期收益的贴现值。在前面我们已经假设，违约事件总是在年中发生。例如，收益发生在第三年年中的概率为 0.019 2，因为回收率为 40%，所以对应于第三年年中的预期收益为 $0.019\,2\times0.6\times1=0.011\,5$ 美元，贴现值为 $0.011\,5e^{-0.05\times2.5}=0.010\,2$ 美元。收益期望贴现值的总和为 0.051 1 美元。

表 24-4 给出了计算的最后一步，这里我们需要计算在违约时应计付款(accrual payment)。例如，违约发生在第三年年中的概率为 0.019 2，而此时对应的累积应计付款的期限为半年，所以应计付款的数量为 0.5s，对应这一时间段的应计付款的期望值为 $0.019\,2\times0.5s=0.009\,6s$，贴现值为 $0.009\,6se^{-0.05\times2.5}=0.008\,5s$，应计付款期望值的贴现值为 0.042 6$s$。

表 24-4　应计付款的贴现值

时间(年)	违约概率	预期应计付款	贴现因子	预期应计付款的贴现值
0.5	0.020 0	0.010 0s	0.975 3	0.009 7s
1.5	0.019 6	0.009 8s	0.927 7	0.009 1s
2.5	0.019 2	0.009 6s	0.882 5	0.008 5s
3.5	0.018 8	0.009 4s	0.839 5	0.007 9s
4.5	0.018 4	0.009 2s	0.798 5	0.007 4s
总计				0.042 6s

由表 24-2 和表 24-4，我们得出付款期望值的贴现值为

$$4.070\,4s + 0.042\,6s = 4.113\,0s$$

由表 24-3，收益期望值的贴现值为 0.051 1 美元。令两者相等

$$4.1130s = 0.0511$$

即 $s=0.0124$，因此信用违约互换溢价的中间价为 0.0124 乘以本金，或每年 124 个基点。这个结果也可以由 DerivaGem 中的 CDS 计算表产生。在计算表中对所有期限的风险率都应当输入 2.02%（DerivaGem 用的是连续复合），利率期限结构水平为 5%，回收率为 40%。

在以上计算中，我们假设违约事件只可能发生在付款日的正中间。虽然我们可以放松这个假设，但这个假设通常给出的结果还是不错的。

24.2.1 对信用违约互换按市值计价

与其他形式的互换一样，对 CDS 每天都按市值定价。信用违约互换的价值可能为正值也可能为负值。假设在我们的例子中信用违约互换在最初商定时溢价为 150 个基点，信用保护买入方付款价值的贴现值为 $4.1130 \times 0.0150 = 0.0617$，收益期望值的贴现值为 0.0511。对于信用卖出方来讲，这一信用违约互换的价值为 $0.0617 - 0.0511$，即面值的 0.0106 倍，而对于信用保护的买入方而言，这一信用违约互换价值为 -0.0106，即面值的 -0.0106 倍。

24.2.2 估计违约概率

在信用违约互换定价中，我们采用的信用违约概率应该是风险中性违约概率而不是现实世界的违约概率(关于这两个概率的差别，见 23.5 节中的讨论)。在第 23 章中我们曾指出风险中性违约概率可以由债券价格或资产互换价格来估计，另一种方法是由信用违约互换报价隐含而得，这一方式类似于在期权市场上交易商从较为活跃的期权价格中计算隐含波动率的做法。

假如我们改变表 24-2、表 24-3 和表 24-4 中的例子，我们并不知道违约概率，但已知市场上 5 年期信用违约互换的报价为每年 100 个基点，我们因此可以逆向算出隐含违约概率(在没有前期违约条件下)为每年 1.6%[⊖]。

24.2.3 两点信用违约互换

两点信用违约互换(binary credit default swap)与普通信用违约互换相似，其不同之处是前者的收益是一个常值。假如在我们表 24-1 至表 24-4 中的例子中相应收益为 1 美元而不是 $1-R$，两点信用违约互换溢价被记为 s，表 24-1、表 24-2 和表 24-4 均不变，表 24-3 由表 24-5 代替，那么新的两点信用违约互换的溢价满足

$$4.1130s = 0.0852$$

由此得出 $s=0.0207$，即 207 个基点。

表 24-5 由两点信用违约互换来计算预期收益的贴现值

时间(年)	违约概率	预期收益(美元)	贴现因子	预期付款的贴现值(美元)
0.5	0.0200	0.0200	0.9753	0.0195
1.5	0.0196	0.0196	0.9277	0.0182
2.5	0.0192	0.0192	0.8825	0.0170
3.5	0.0188	0.0188	0.8395	0.0158
4.5	0.0184	0.0184	0.7985	0.0147
总计				0.0852

⊖ DerivaGem 计算表给出按连续复合风险率为 1.626%，这与按年复合的 1.61% 是等价的。如果我们知道对应所有期限的 CDS 互换溢价，DerivaGem 可以计算出阶梯形状的风险率。

24.2.4 回收率有多重要

不管我们是采用信用违约互换溢价还是债券价格来估计违约概率，我们都要对回收率有一个估计，但是如果我们采用同样的回收率来估算风险中性违约概率和信用违约互换价格，我们得出的信用违约互换的价格（或信用违约互换溢价）对回收率的敏感性并不是很强，这是因为隐含违约概率大约同 $1/(1-R)$ 成比例，而信用违约互换的收益大约同 $1-R$ 成比例。

以上的讨论对两点式信用违约互换的定价并不成立。隐含违约概率仍然大约同 $1/(1-R)$ 成比例，但是两点信用违约互换的收益率与 R 无关。如果我们已知普通信用违约互换和两点信用违约互换的溢价，我们可以同时对回收率和违约概率做出估计（见作业题 24.25）。

24.2.5 信用违约互换市场的前景

信用违约互换经受住了 2007 年信用紧缩危机的考验。该市场受到了监管机构的密切关注，同时也逐步走向中心结算体系。这些产品是管理信用风险的重要工具，其重要性不大可能会降低。一个金融机构可以通过买入信用保护以减少自己对于某个公司的信用风险暴露，同时也可以采用信用违约互换来分散信用风险。例如，假设某金融机构对某一行业有太大的信用风险，可以买入这个行业中公司的信用保护，同时可以卖出与这一行业无关的其他行业公司的信用保护。

有些市场参与者认为信用违约互换的增长还会继续，并且最终会达到利率互换市场的规模，而其他一些参与者并不是十分乐观。信用违约互换市场有一种潜在的**市场信息不对称**（asymmetric information）问题，而这一问题在其他场外交易的衍生产品中却不存在（见业界事例 24-3）。

业界事例 24-3 信用违约互换市场是一种公平游戏吗

信用违约互换与本书中所讨论的其他场外交易衍生产品有一个很重要的不同。其他场外交易衍生产品通常与利率、汇率、股指价格、商品价格等变量有关。我们没有理由认为一个市场参与者对于这些变量会比其他市场参与者具有更好的信息。

一个公司信用违约互换的溢价与在将来某个时间段里这家公司违约的概率有关。很有可能某些市场参与者会具有关于违约概率估计有关更多的信息。如果某金融机构同这家公司业务来往频繁，向这家公司提供业务咨询或贷款，并且帮这家公司发行新的证券，那么它对这家公司信用的了解肯定要比其他与这家公司毫无来往的金融机构多。经济学家将这种情形叫做信息不对称（asymmetric information）问题。

这种信息不对称是否会约束信用违约互换市场的发展还有待观察。金融机构强调是否买入对某家公司的信用保护通常是基于交易风险管理人员的决定而非金融机构其他某个部门所提供的特殊信息。

24.3 信用指数

信用衍生产品市场已经构造了一些信用指数来跟踪信用违约互换的溢价。2004 年，市场许多不同的指数发行者达成了共识，从而使一些指数相互合并。指数提供者所采用的两种标准交易组合是：

- CDX NA IG，由北美 125 家投资级公司组成的组合。
- iTraxx，由欧洲 125 家投资级公司组成的组合。

这些交易组合在每年的 3 月 20 日和 9 月 20 日更新，不再具备投资等级的公司会被去除，同

时在指数中会加入新的投资级公司[⊖]。

假如某做市商对 CDX NA IG 5 年指数报出的买入价为 65 个基点，卖出价为 66 个基点(这被称为是指数溢差)。粗略地讲，这表示一个交易员可以按每家公司都为 65 个基点的价格买入 125 家公司的信用违约互换。假设一个交易员想对每个公司都取得面值为 800 000 美元的保护，交易员的总费用为 0.006 6 × 8 000 000，即每年 660 000 美元。类似地，交易员也可以卖出 125 个公司单个面值为 800 000 美元的信用保护来换取每年 650 000 美元的收入。当某个公司违约时，信用保护的买入方会得到信用违约互换的收益，而且付款费用每年减少 660 000/125 = 528 0 美元。期限为 3 年、5 年、7 年和 10 年的 CDS 指数保护的买和卖都十分活跃，这些合约的到期日通常为 12 月 20 日和 6 月 20 日(这意味着，5 年合约的实际期限通常为 4.75 或 5.25 年)。粗略地讲，指数值等于所包含公司 CDS 溢价的平均值[⊜]。

24.4　固定券息的使用

CDS 和 CDS 指数交易的具体运作方式比以上的描述要更复杂一些。对于每个指数以及每个期限，我们均要指定一个“券息”和一个回报率。我们可以采用以下过程用指数溢价的报价来计算价格：

- 每年付款 4 次，期末付款。
- 由指数溢价的标价中隐含出一个违约密度(风险率，hazard rate)，计算过程和 24.2 节的计算相似。通过迭代可以求出与溢价报价相匹配的违约密度。
- 计算 CDS 付款的久期，久期的取值与溢价的乘积等于付款的贴现值(在 24.2 节的例子中，久期等于 4.113 0)。
- 价格 P 由以下公式 $P = 100 - 100 \times D \times (S - C)$ 给出，其中 S 为指数溢价值，C 为以小数点表示的券息值。

当一个交易员买入指数信用保护时，对每 100 美元的剩余面值需支付 $100 - P$，信用保护的卖出方收取这一数量(如果 $100 - P$ 为负值，信用保护的买入方接受该款项，信用保护的卖出方支付该款项)。信用保护的买入方在每个付款日支付的款项等于券息乘以剩余的面值(剩余的面值等于指数所包含的没有违约公司数量乘以每家公司的面值份额)。当有违约事件发生时，我们以通常的方式计算收益。以上的安排可以保证交易进行，这是因为通常的信用保护买入方每季度的付款与买入方进入合约时的指数溢价无关。

【例 24-1】 假定 iTraxx 欧洲指数的报价为 34 个基点，券息为 40 个基点，期限正好为 5 年。这里的报价约定均为“30/360”(该约定为 CDS 以及 CDS 指数市场的通常约定)。在“实际天数/实际天数”约定下的等价数量分别为 0.345% 和 0.406%。假定收益率曲线呈水平状，为每年 4%(实际天数/实际天数，连续复利)，指定的回收率为 40%，每年付款 4 次，隐含的风险率为 0.571 7%，久期值为 4.447 年。因此，价格等于

$$100 - 100 \times 4.447 \times (0.00345 - 0.00406) = 100.27$$

考虑一个合约，合约中每个参考实体的面值为 100 万美元。在合约开始时，信用保护的卖出方需

⊖ 在 2010 年 9 月 20 日，新定义了 iTraxx 欧洲 14 系列(the Series 14 iTraxx Europe)组合以及 CDX NA IG 15 系列(the Series 15 CDX NA IG)组合。这些系列号码说明截止到 2010 年 9 月份，iTraxx 欧洲系列组合已被更新了 13 次，CDX NA IG 系列组合已被更新了 14 次。

⊜ 更精确地讲，指数的大小比指数交易组合内所包含公司的信用违约互换溢价平均值要稍低一些，为了解释这一点，我们考虑两家公司，假定一家公司 CDS 溢价为 1 000 个基点，另一家公司 CDS 的溢价为 10 个基点，买入这两家公司的信用保护所对应的平均溢价应该稍稍低于 505 个基点，这是因为大家会意识到 1 000 个基点的付费期限不会像 10 个基点的付费期限那样长，因此对 1 000 个基点溢价应设定较小的权重。另外一个关于 CDX NA IG(对 iTraxx 却没有)的复杂之处是指数中的违约包括公司重组(restructuring)，而 CDS 合约的违约定义却不包括这一点。

向买入方支付 1 000 000 × 125 × 0.002 7。随后，买入方在每个季度末付款，付款的年率为 1 000 000 × 0.004 06 × n，其中 n 为指数中还没有违约公司的个数。当一家公司违约时，我们采用通常的方式来计算收益，信用保护买入方需向卖出方支付累计利息，其中利率为 0.406%，面值为 100 万美元。

24.5 信用违约互换远期合约及期权

一旦信用违约互换市场的发展趋于完善，衍生产品交易商自然而然会开始交易有关信用违约互换的远期合约和期权[⊖]。

信用违约互换远期合约是指在将来某个时间 T 签订买入或卖出关于某参考实体信用违约互换的义务。如果在时间 T 之前参考实体违约，远期合约自动失效。例如，某银行可以签订在 1 年后按 280 个基点卖出关于某公司 5 年期信用保护的远期合约。如果这家公司在一年内违约，远期合约会自动失效。

信用违约互换期权是指在将来某个时间 T 可以买入或卖出某参考实体信用保护的一种权利。例如，投资者可以购买在 1 年后按 280 个基点的价格买入关于某公司 5 年期信用保护的权利。这是一种看涨期权。如果在 1 年后，这家公司的 5 年期 CDS 溢价高于 280 个基点，期权将会被行使，否则不会被行使。期权的费用要在期权交易成交时付清。类似地，投资者可以购买在 1 年后按 280 个基点的价格卖出关于某公司 5 年期信用保护的权利。这是一种看跌期权。如果在一年后这家公司的 CDS 溢价低于 280 个基点，期权将会被行使，否则不会被行使，期权的费用也必须在交易成交时付清。与 CDS 远期合约一样，如果在期权到期之前参考实体违约，CDS 期权合约会自动失效。

24.6 篮筐式信用违约互换

在**篮筐式信用违约互换**(basket credit default swap)中有一定数量的参考实体，**附加篮筐式信用违约互换**(add-up basket credit default swap)在任意一家参考实体违约时均提供违约赔偿，**第一次信用违约互换**(first-to-default basket credit default swap)对于在参考实体中首次违约时提供违约赔偿，**第二次信用违约互换**(second-to-default basket credit default swap)对于参考实体中的第二次违约提供违约赔偿，依此类推，**第 k 次违约信用违约互换**(k^{th}-to-default basket credit default swap)对于参考实体中出现的第 k 次违约提供违约赔偿，以上的违约赔偿与一般信用违约互换的违约赔偿等同。在与合约有关的违约事件出现后，合约双方对赔偿事宜进行交割处理，然后合约自行解除，违约赔偿付出后双方不再需要任何其他付款。

24.7 总收益互换

总收益互换(total return swap)是一种信用衍生产品，它涉及某种债券(或任何资产的组合)的收益与 LIBOR 加上某差价之间的互换。资产的总收益包括券息、利息以及在互换期限内资产的盈亏。

例如，一个 5 年期总收益互换的面值为 1 亿美元，互换的一方将某企业债券的收益同 LIBOR 加上 25 个基点进行交换，这一衍生产品如图 24-2 所示，在券息付出日期，收益付出方将 1 亿美元债券所收入的券息付给收益收入方，同时收入方将面值 1 亿美元在利率为 LIBOR + 25 个基点时所得利息付给互换总收益的付出方(LIBOR 在券息日设定，但利息在一个券息日付出，这与标准互换是一样的)。在互换合约结束时有最后一次付款来反映债券价值的变化。例如，如果债券在互换期限内价值增长了 10%，在 5 年时债券收益的付出方需要付出 1 000 万美元(1 亿美元的 10%)；如果债券价格降低了 15%，债券总收益互换的收入方在 5 年时需要向付出方支付 1 500 万美元。如果债券违约，总收益互换合约将会停止，但是债券总收益互换的收入方必须向付出方支付 1 亿美元与违约债券市场价格的差额。

⊖ 有关这些产品的定价，在 J. C. Hull and A. White, "The Valuation of Credit Default Swap Options," *Journal of Derivatives*, 10, No. 5(Spring 2003), 40-50 中有详细讨论。

如果我们在合约双方应付的现金流中均加上本金，可以将总收益互换理解为：总收益的付出方支付1亿美元债券投资所收入的券息，总收益的收入方支付面值为1亿美元、利率为LIBOR+25个基点的利息。如果总收益的付出方拥有债券，总收益互换可以将信用风险转让给总收益的收入方。如果总收益的付出方不拥有债券，总收益互换可以达到卖空债券的目的。

总收益互换常常用于融资工具。以下列举的情形会产生图24-2所示的总收益互换合约。总收益的收入方试图融资1亿并想将1亿美元资产投资于某个参考实体的债券，收入方与付出方(可能是金融机构)之间达成一种总收益互换协议，总收益付出方首先买入1亿美元的债券，然后与收益的收入方进行互换协议，这样做对于收益收入方而言与借钱并付LIBOR+25个基点的利息买入债券是等价的。在总收益互换协议中，收益付出方在互换期限内仍然拥有债券的所有权，但对收益付出方而言这样做比直接借钱给收益的收入方来买入债券并以债券作为抵押品所面临的对手信用风险更小，如果收益的收入方违约，收益的付出方不用面临因抵押品的所有权而带来潜在的法律纠纷。总收益互换与再回购协议(repos)(见4.1节)相似，它们的构造是为了在融资时降低信用风险。

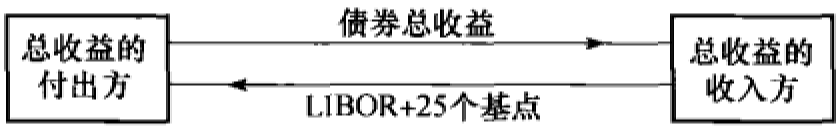


图24-2　总收益互换

在总收益互换中，在LIBOR之上的差价是收益付出方对总收益收入方所承担信用风险的一种补偿。当参考债券价格下跌时，总收益收入方违约会给总收益付出方带来损失，因此这一差价既反映了总收益收入方的信用状态也反映了债券发行人的信用状态，同时也与总收益收入方与债券发行人之间的违约相关性有关。

对于以上所描述的标准交易可以有几种变形。有时在互换的最后反映债券价格变化的现金付款可以被资产的实际交割而代替，在这种情况下，总收益付出方在互换的到期日以实际债券换回债券的本金。在一些其他情形下，反映债券价格变化的付款日期被安排为定期发生，而不是只在互换的到期日。

24.8　债务抵押债券

第8章讨论了资产支持证券(ABS)。图8-1给出了这种产品的一个简单结构。当标的资产为债券时，这样的ABS被称为**债务抵押债券**(Collateralized Debt Obligations，CDO)。债券的利息与本金可以用与图8-2相似的瀑布形式来定义。瀑布形式的精确规则很复杂，但其设计原则是高级的份额比低级的份额更可能收到被许诺的利息和本金。

24.8.1　合成CDO

当CDO按照上述形式由债券组合产生时，所得结构被称为**现金CDO**(cash CDO)。信用产品市场的一个重要发展是人们意识到如果在CDS中的参考实体是一家发行债券的公司，那么持有该企业证券的长头寸等价于持有关于该企业的CDS的短头寸(即在CDS卖出信用保护)。由此产生了被称为**合成CDO**(synthetic CDO)的结构，而且这种结构很受欢迎。

合成CDO的发起者首先选取一个公司组合与结构的期限(比如5年)，然后出售组合中每家公司的CDS保护(CDS的期限与结构的期限相等)。合成CDO的本金等于其中所有CDS名义本金的总和。发起者收入的现金流等于CDS的溢差，而当组合中的公司违约时将会支出现金流。在构造合成CDO时将会形成不同的份额(tranch)，而且现金的流入和流出将会分配到份额里。合成CDO中现金流入与流出分配的规则比现金CDO更直截了当。假定只有3类份额：股权份额、中间份额和高级份额。则可能会有如下形式：

- 股权份额承担CDS的支付，直到达到合成CDO本金的5%。股权份额收取份额本金剩余数量上每年1000个基点的差价。

- 中间份额承担超过合成 CDO 本金 5%，但最多不超过 20% 的支出。作为回报，该份额收取份额本金剩余数量上每年 100 个基点的差价。
- 高级份额承担超过 20% 的支出，作为回报，该份额收取份额本金剩余数量上每年 10 个基点的差价。

为了理解合成 CDO 是如何运作的，假定本金为 1 亿美元。股权份额、中间份额、高级份额的最初面值分别为 500 万美元、1 500 万美元和 8 000 万美元。在刚开始，份额挣得在这些名义本金上预先指定的溢差。假设在一年后，由于组合中公司违约而导致对 CDS 有 200 万美元的支付。股权份额持有者负责这些支付。股权份额的本金降到了 300 万美元，因此 1 000 个基点的溢差是基于 300 万美元的本金（而不是最初的 500 万美元）。如果在 CDO 有效期的后期，对 CDS 又有 400 万美元的支付，这时股权份额的累计支付数目是 500 万美元，因此其剩余本金成零。中间份额将需要支付 100 万美元。其剩余份额降到了 1 400 万美元。

现金 CDO 在刚开始时需要份额持有者的投资（用于购买标的债券）。与此相反，合成 CDO 持有者并不需要在开始时做任何投资，他们仅仅需要同意如何计算现金的流入和流出就够了。在实际中，一般总是需要他们将最初的份额本金作为抵押。[⊖] 当一个份额要对 CDS 的支付负责时，所需要的金额将会从抵押金里扣除。抵押金账户的账面金额会赚取 LIBOR 的利息。

24.8.2　标准组合与单份额交易

在上面所描述的合成 CDO 里，份额持有者将信用保护卖给了 CDO 的发行人，而 CDO 发起人会转身将 CDS 上的保护卖给其他市场参与者。市场上的一种革新是在没有构造标的 CDS 短头寸组合的情况下对份额进行交易，这有时被称为**单份额交易**（single-tranche trading）。交易中有两方：份额保护的买入方和份额保护的卖出方。CDS 短头寸的组合被用来作为确定双方之间现金流的参考，但并没有真正建立起来。保护的买入方将份额差价支付给卖出方，而保护的卖出支付给买入方的金额对应于在参考组合中份额所负责的损失。

24.3 节讨论了像 CDX NA IG 和 iTraxx 欧洲这样的 CDS 指数，在市场上投资者也利用这些指数的标的组合来定义标准合成 CDO 的份额，而且这种产品的交易很活跃。CDX NA IG 的 6 个标准份额分别吸收 0 ~ 3%，3% ~ 6%，6% ~ 9%，9% ~ 12%，12% ~ 22% 和 22% ~ 100% 之间的损失。iTraxx 欧洲指数中的 6 个标准份额分别吸收 0 ~ 3%，3% ~ 7%，7% ~ 10%，10% ~ 15%，15% ~ 30% 和 30% ~ 100% 之间的损失。

表 24-6 显示的是 5 年期 iTraxx 份额连续 3 年中 1 月末的报价。如 24.3 节所述，指数的差价是对指数中所有公司购买保护所需要的以基点计算的费用。除了 0 ~ 3% 份额外，份额的报价是指购买份额保护每年以基点计算的费用（在前面解释过，当份额经历损失后，计算费用时的本金将会减少）。对于 0 ~ 3%（股权）份额，保护购买方预先支付一笔费用，并且每年支付尚存份额本金的 500 个基点。表中的报价是指预先支付的数量作为初始份额本金的百分比。

表 24-6　iTraxx 欧洲指数 5 年期份额的中间市场报价

日期	份额					iTraxx 指数
	0 ~ 3%	3% ~ 6%	6% ~ 9%	9% ~ 12%	12% ~ 22%	
2007 年 1 月 31 日	10.34%	41.59	11.95	5.60	2.00	23
2008 年 1 月 31 日	30.98%	316.90	212.40	140.00	73.60	77
2009 年 1 月 30 日	64.28%	1185.63	606.69	315.63	97.13	165

注：除了 0 ~ 3% 份额外，表中标价均为基点数，0 ~ 3% 份额的标价等于必须预先支付的比率（以份额面值为基础），另外再加上每年收费 500 个基点。

资料来源：Creditex Group Inc.

⊖ 这里的讨论只对以债券形式发行的份额才适用，当份额以互换形式实现时，投资者不需要以份额本金作为抵押。——译者注

信用市场在最近两年变化巨大。从表24-6可以看到信用紧缩导致了信用溢差的暴涨。iTraxx指数从2007年1月份的23个基点涨到了2009年1月份的165个基点。单份额的报价也有大幅上升。这些变化的其中一个原因是市场对投资级公司违约概率的估计增加了，另一个原因是在许多情形下保护卖出方也遭遇了流动性危机，因此变得更加小心，从而要求更高的风险溢价。

24.9 相关系数在篮筐式信用违约互换与CDO中的作用

第k次违约互换的信用保护费用及CDO份额的溢价与违约相关性密切相关。假如某个交易组合中含有100个参考实体，以这一交易组合为基础，我们定义一个在今后5年对第k个信用违约提供保护的产品，即第k个违约互换。假设每一个参考实体在今后5年的风险中性违约概率为2%，当参考实体的违约相关性为0时，由两项分布得出在今后5年内一个或更多个参考实体出现违约的概率为86.74%，同时我们可以得出在今后5年有10个或更多参考实体出现违约概率为0.0034%，因此我们得出对第一次违约保护的价格会比较高，而对第10次违约保护的价格几乎为0。

随着违约相关性的增加，1个或多个参考实体违约出现的概率会随之降低，但是10个或更多参考实体的违约概率会增大，在参考实体相关性为完美(等于1)的极端情形下，1个或更多参考实体违约的概率及10个或更多参考实体违约的概率均为2%，因为在极端情形下，所有的参考实体基本上都是一样的，这时要么所有的参考实体一起违约(概率为2%)，要么任何参考实体均不违约(概率为98%)。

与此类似，CDO份额的价格也同样与违约相关性密切相关。当相关性较低时，低级股权份额风险较大，高级份额较为安全。当相关性增加时，低级份额风险性会降低，高级份额风险性则会增大。在相关性为完美的极端情形下，所有份额具有相同的风险。

24.10 合成CDO的定价

利用DerivaGem软件，可以对合成CDO定价。为了解释计算过程，假定关于一个合成CDO份额的付款时间为τ_1，τ_2，…，τ_m，并令$\tau_0=0$。定义E_j为在时刻τ_j的份额面值数量期望值，$v(\tau)$为在时刻τ收到1美元的贴现值。假定关于某个特定份额的溢价(即为了买入信用保护所支付的基点数)为每年s，该溢价是应用于剩余份额面值上。对于CDO的预期的正常付费的贴现值为sA，其中

$$A=\sum_{j=1}^{m}(\tau_j-\tau_{j-1})E_j v(\tau_j) \tag{24-1}$$

时刻τ_{j-1}与τ_j之间的损失期望值为$E_{j-1}-E_j$。假定损失发生在时间段的中间点(即在时刻$0.5\tau_{j-1}+0.5\tau_j$)。CDO份额的收益期望的贴现值为

$$C=\sum_{j=1}^{m}(E_{j-1}-E_j)v(0.5\tau_{j-1}+0.5\tau_j) \tag{24-2}$$

损失发生时的应计付款为sB，其中

$$B=\sum_{j=1}^{m}0.5(\tau_j-\tau_{j-1})(E_{j-1}-E_j)v(0.5\tau_{j-1}+0.5\tau_j) \tag{24-3}$$

对于信用保护的买入方而言，份额的价值为$C-sA-sB$，**两平溢价**(breakeven spread)发生在付款贴现值等于收益贴现值时的情形，即

$$C=sA+sB$$

因此，两平溢价满足以下方程

$$s=\frac{C}{A+B} \tag{24-4}$$

式(24-1)至式(24-3)展示了份额面值期望在计算两平溢价时所起的关键作用。如果对于所有付款日我们已知份额面值期望，另外假定零息收益率曲线也为已知，那么我们可以由式(24-1)至式(24-4)求得两平溢价。

24.10.1　利用违约时间高斯 Copula 模型

在 22.9 节中，我们引入了关于违约时间的单因子高斯 Copula 模型，这是关于合成 CDO 定价的标准市场模型。假定到时间 t 所有公司都具有相同的违约概率 $Q(t)$，式(23-12)将这个到时间 t 的无条件违约概率转换成时间 t 前在因子 F 的条件下的违约概率：

$$Q(t\mid F)=N\left(\frac{N^{-1}[Q(t)]-\sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right) \tag{24-5}$$

其中 ρ 是 Copula 相关系数。这里假定了所有公司之间的相关系数都是相同的。

在计算 $Q(t)$ 时，通常假定公司的违约密度(风险率)为常数，并与指数的溢价一致。通过 24.2 节中的 CDS 定价公式，我们可以求出违约密度，在求解过程中我们需要保证求得的违约密度与指数的溢价相匹配。假定违约密度为 λ，由式(23-1)得出

$$Q(t)=1-e^{-\lambda t} \tag{24-6}$$

由两项式分布的性质，标准市场模型给出了正好有 k 个公司的概率为(在 F 的条件下)

$$P(k,t\mid F)=\frac{n!}{(n-k)!k!}Q(t\mid F)^k[1-Q(t\mid F)]^{n-k} \tag{24-7}$$

式中 n 为合成 CDO 中参考实体的总数量。假定这里所考虑的份额所覆盖资产组合的损失范围为 α_L 至 α_H，参数 α_L 被称为**附着点**(attachment point)，参数 α_H 被称为**离开点**(detachment point)。定义

$$n_L=\frac{\alpha_L n}{1-R}\quad 和 \quad n_H=\frac{\alpha_H n}{1-R}$$

式中 R 为回收率。再有，定义 $m(x)$ 为大于 x 的最小整数。在不失一般意义的前提下，我们可以假定份额的最初面值为 1，当违约数量 k 小于 $m(n_L)$ 时，份额面值为 1；当违约数量 k 大于 $m(n_H)$ 时，份额面值为 0；在其他情形下，份额的面值为

$$\frac{\alpha_H-k(1-R)/n}{\alpha_H-\alpha_L}$$

定义 $E_j(F)$ 为在给定因子 F 值的条件下，在时刻 τ_j 份额面值期望值，因此

$$E_j(F)=\sum_{k=0}^{m(n_L)-1}P(k,\tau_j\mid F)+\sum_{k=m(n_L)}^{m(n_H)-1}P(k,\tau_j\mid F)\frac{\alpha_H-k(1-R)/n}{\alpha_H-\alpha_L} \tag{24-8}$$

定义 $A(F)$、$B(F)$ 和 $C(F)$ 分别为在 F 条件下 A、B 和 C 的取值。与式(24-1)至式(24-3)类似，我们有

$$A(F)=\sum_{j=1}^{m}(\tau_j-\tau_{j-1})E_j(F)v(\tau_j) \tag{24-9}$$

$$B(F)=\sum_{j=1}^{m}0.5(\tau_j-\tau_{j-1})(E_{j-1}(F)-E_j(F))v(0.5\tau_{j-1}+0.5\tau_j) \tag{24-10}$$

$$C(F)=\sum_{j=1}^{m}(E_{j-1}(F)-E_j(F))v(0.5\tau_{j-1}+0.5\tau_j) \tag{24-11}$$

变量 F 服从标准正态分布。为了计算 A、B 和 C 的无条件价值，我们必须对 $A(F)$、$B(F)$ 和 $C(F)$ 在标准正态分布下积分，一旦求得无条件价值后，由公式 $C/(A+B)$ 则可以求得两平溢价[⊖]。

积分的计算最好是通过高斯求积公式(Gaussian quadrature)来完成，计算过程中涉及以下近

⊖ 对于股权份额，标价对应于最初的付费以及每年的 500 基点的费用，收支平衡的最初的付款为 $C-0.05(A+B)$。

似式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-F^2/2} g(F)\,\mathrm{d}F \approx \sum_{k=1}^{k=M} w_k g(F_k) \tag{24-12}$$

以上公式的精度随着 M 的增大而增大。对于不同的 M，作者网页上存有参数 w_k 和 F_k 的取值[⊖]。这里的 M 是 DerivaGem 中"积分点数"(number of integration points)的 2 倍。一般情况下将积分点数设成 20 就足够了。

【例 24-2】 考虑欧洲 iTraxx 的中间份额(5 年期)，Copula 相关系数为 0.15，回收率为 40%。这时，$\alpha_L=0.03$，$\alpha_H=0.06$，$n=125$，$n_L=6.25$，以及 $n_H=12.5$。我们假定利率期限结构呈水平状，为 3.5%，付款频率为每季度一次，指数的 CDS 溢价为 50 个基本点。一个与 24.2 节中类似的计算表示，与 CDS 溢价相对应的常数风险率为 0.83%(连续复合)。关于其他计算的摘要被列举在表 24-7 中，其中所使用的 M 参数为 60，因子 F_k 和权重 w_k 的取值被列在表的最上部；利用式(24-5)至式(24-8)，在因子取值条件下，份额预期面值被列在表的第二部分；由式(24-9)至式(24-11)计算出的，在因子取值条件下，A、B 和 C 的取值被列在表的后三部分；非条件变量 A、B 和 C 是通过在 F 概率分布上对 $A(F)$、$B(F)$ 和 $C(F)$ 进行积分而得出的。计算过程是在式(24-12)中轮流代入 $A(F)$、$B(F)$ 和 $C(F)$。计算结果为 $A=0.1496$、$B=4.2846$ 和 $C=0.0187$。两平溢价为 0.149 6/(4.284 6 + 0.018 7) = 0.034 8，即 384 个基点。这个结果可以通过 DerivaGem 得到。通过 CDS 工作表可以将 50 个基点的溢价转换成 0.83% 的违约密度，然后利用这个违约密度并取 30 个积分点即可得到表中的结果。

24.10.2　第 k 个违约 CDS 的定价

第 k 次违约 CDS(k^{th}-to-default CDS，见 24.5 节)价格也可以通过在因子 F 取值的条件下用标准模型来求得。第 k 个违约介于 τ_{j-1} 和 τ_j 之间的条件概率等于截止到 τ_j 时可有 k 个或更多违约发生的概率减去截止到 τ_{j-1} 时刻有 k 个或更多违约发生的概率。由式(24-5)至式(24-7)，我们可以得出所求的概率为

$$\sum_{q=k}^{n} P(q,\tau_j \mid F) - \sum_{q=k}^{n} P(q,\tau_{j-1} \mid F)$$

假定介于时间 τ_{j-1} 和 τ_j 的违约发生在时刻 $0.5\tau_{j-1}+0.5\tau_j$，这样一来，我们可以在因子 F 取值的条件下计算收益的贴现值，计算方式与一般的 CDS 收益计算方式相同(见 24.2 节)。通过对 F 积分，我们可以求得费用和收益的无条件贴现值。

表 24-7　例 24-2 中 CDO 的定价：面值等于 1；付款为单位差价

比重和价值						
w_k	…	0.157 9	0.157 9	0.134 2	0.096 9	…
F_k	…	0.202 0	−0.202 0	−0.606 0	−1.010 4	…
期望面值 $E_j(F_k)$						
时间						
$j=1$	…	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$j=19$	…	0.995 3	0.968 7	0.863 6	0.613 4	…
$j=20$	…	0.993 6	0.960 0	0.836 4	0.564 8	…

⊖ 参数 w_k 和 F_k 的选取是通过对 Hermite 多项式求解来得出，读者可以在作者的技术报告(Technical Note 21)找到更多关于高斯求积公式的信息。

（续）

期望收益，$A(F_k)$						
$j=1$	…	0.247 8	0.247 8	0.247 8	0.247 8	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$j=19$	…	0.210 7	0.205 1	0.182 8	0.129 9	…
$j=20$	…	0.208 5	0.201 5	0.175 5	0.118 5	…
总计	…	4.562 4	4.534 5	4.408 0	4.036 1	…
期望支付价格，$B(F_k)$						
$j=1$	…	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$j=19$	…	0.000 1	0.000 8	0.002 6	0.005 1	…
$j=20$	…	0.000 2	0.000 9	0.002 9	0.005 1	…
总计	…	0.000 7	0.004 3	0.017 8	0.047 8	…
期望实际支付价格，$C(F_k)$						
$j=1$	…	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$j=19$	…	0.001 1	0.006 2	0.021 1	0.041 2	…
$j=20$	…	0.001 4	0.007 4	0.023 0	0.041 0	…
总计	…	0.005 5	0.034 6	0.142 3	0.382 3	…

【例 24-3】 考虑一个由 10 个债券组成的组合，每个债券的违约概率如表 24-1 所示。假定我们想求取对第三次违约提供保护的 CDS 价值，付款时间在每年的末尾。假定 Copula 相关系数为 0.3，回收率为 40%，无风险利率为 5%。如表 24-7 所示，我们考虑 60 个不同的因子价值。截止到第 1、2、3、4、5 年债券的无条件累计违约概率分别为 0.020 0、0.039 6、0.058 8、0.077 6 和 0.096 1。式(24-5)表示在 $F=-1.0104$ 的条件下，相应的违约概率分别为 0.036 5、0.075 4、0.113 4、0.149 8 和 0.184 8。由二项式分布得出，截止到第 1、2、3、4、5 年有 3 个或更多债券违约的条件违约概率分别为 0.004 8、0.034 4、0.095 0、0.179 4 和 0.276 7，第三个债券违约发生在第 1、2、3、4、5 年的条件概率分别为 0.004 8、0.296、0.060 6、0.084 4 和 0.097 4。采用与 24.2 节类似的分析，我们可以得出在 $F=-1.0104$ 的条件下，付款贴现值、应计付款贴现值和收益贴现值分别为 $3.8344s$、$0.1171s$ 和 $0.1405s$，其中 s 代表溢价。对其他 59 个因子值可以利用类似的计算方式，然后利用式(24-12)来对 F 求积分，因此得出收益的无条件贴现值、付款贴现值和应计付款贴现值分别为 0.063 7、$4.0543s$ 和 $0.0531s$。两平 CDS 的溢价为

$$0.0637/(4.0543+0.0531)=0.0155$$

即 155 个基点数。

24.10.3 隐含相关系数

在标准市场模型中，回收率通常被设定为 40%，因此，参数 a 为模型中唯一的未知参数。这一特性与在布莱克-斯科尔斯-默顿模型中波动率是唯一的未知参数相类似。市场参与者喜欢由份额市场报价来隐含出相关系数，这一点类似于由期权价格来隐含出期权波动率。

假定份额 $\{\alpha_L, \alpha_H\}$ 从最低级到最高级的排序为 $\{\alpha_0, \alpha_1\}$，$\{\alpha_1, \alpha_2\}$，$\{\alpha_2, \alpha_3\}$，…，其中 $\alpha_0=0$（例如，对于 iTraxx 欧洲指数，$\alpha_0=0$、$\alpha_1=0.03$、$\alpha_2=0.06$、$\alpha_3=0.09$、$\alpha_4=0.12$、$\alpha_5=0.22$、$\alpha_6=1.00$）。有两种求取相关系数的方式，一种方式被称为**复合相关系数**（compound correlation），对于份额 $\{\alpha_{q-1}, \alpha_q\}$，存在一个相关系数 ρ 使得由该相关系数所计算出的份额溢价等于市场溢价，而这一相关系数可通过迭代方式求得；另一种相关系数被称为**基础相关系数**

(base correlation)，对于任意一个 $\alpha_q(q \geq 1)$，存在一个参数 ρ 使由这个参数所求得的份额 $\{0, \alpha_q\}$ 的价值与市场价值一致，这一参数被称为基础相关系数，其计算方式如下：

- 计算每一个份额的复合相关系数。
- 采用复合相关系数计算每一份额在 CDO 期限内损失期望值的贴现值占最初份额面值的百分比，这一比率即为已经定义的参数 C。假定对于份额 $\{\alpha_{q-1}, \alpha_q\}$ 来讲，相应的 C 取值为 C_q。
- 计算份额 $\{0, \alpha_q\}$ 损失期望值的贴现值占整体资产组合份额面值的百分比，求得数量等于 $\sum_{p=1}^{q} C_p(\alpha_p - \alpha_{p-1})$。
- 对应于份额 $\{0, \alpha_q\}$ 的 C 值等于第三步求得的数量除以 α_q。基础相关系数就是与以上 C 值保持一致的相关系数 ρ，这可以通过迭代法来求得。

对于表 24-6 给出的 2007 年 1 月 31 日的 iTraxx 欧洲指数，图 24-3 显示了上面第 3 步中对份额损失期望贴现值占整体资产组合份额面值百分比的计算结果。表 24-8 给出了这些报价的隐含相关系数。这些结果是通过 DerivaGem 求得的，其中假设利率期限结构为水平，每年 3%，回收率为 40%。CDS 工作表显示对应于 23 个基点溢价的违约率为 0.382%。隐含相关系数是通过 CDO 工作表来计算的。图 24-3 所用的值也可以利用上面第 3 步的表达式通过该工作表来计算。

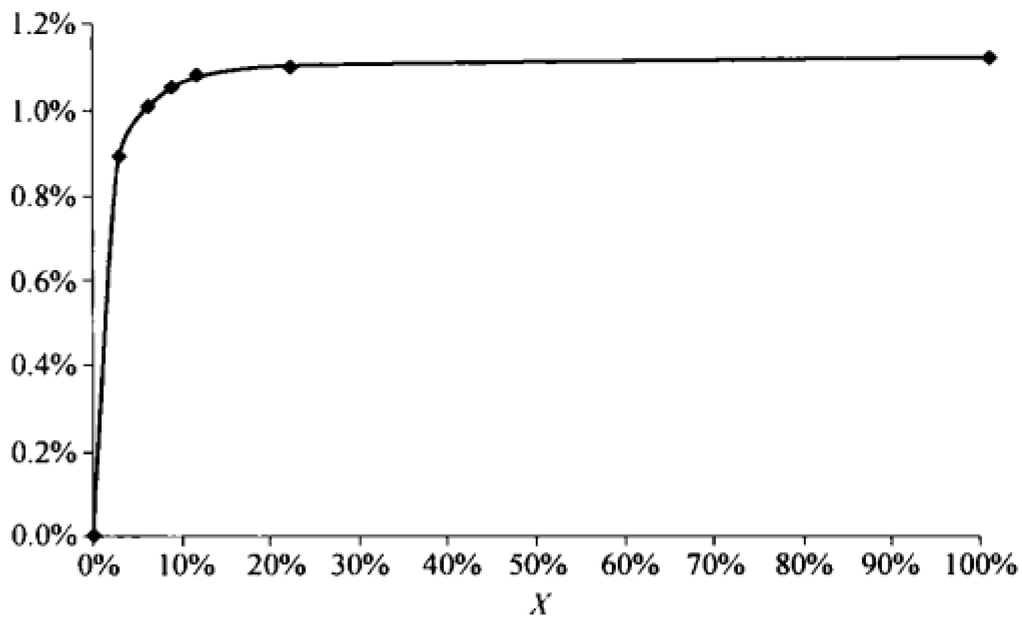


图 24-3 2007 年 1 月 31 日 iTraxx 欧洲指数中 0 到 X% 份额的预期损失的贴现值占整体面值的百分比

表 24-8 所示的相关系数规律是通常观察的相关系数规律的典型。复合相关系数展示**相关系数微笑**(correlation smile)特性。当份额级别变得越来越高时，隐含相关系数首先下降，然后又升高；基础相关系数展示相关系数倾斜(skew)，基础相关系数是份额附着点的递增函数。

表 24-8 2007 年 1 月 31 日 5 年期 iTraxx 欧洲指数的隐含相关系数

复合相关系数					
份额	0~3%	3%~6%	6%~9%	9%~12%	12%~22%
报价	17.7%	7.8%	14.0%	18.2%	23.3%
基础相关系数					
份额	0~3%	0~6%	0~9%	0~12%	0~22%
报价	17.7%	28.4%	36.5%	43.2%	60.5%

如果市场价格与单因子高斯 Copula 模型具有一致性，那么对于所有的份额，隐含相关系数(无论是复合相关系数还是基础相关系数)均应相等。实际中的基础相关系数具有明显的微笑和倾斜特性，由此我们看出市场价格与模型并不一致。

24.10.4 非标准份额的定价

我们并不需要采用模型来计算类似于 iTraxx 欧洲指数中的资产组合所产生的标准份额的溢价，因为在市场上可以观察到这些溢价。有时市场上需要对非标准份额提供报价。假定你想得到 iTraxx 欧洲指数中 4%~8% 的份额定价，一种方法是对基础相关系数进行插值来求得对应于

0～4%份额和0～8%份额的基础相关系数，由这两个相关系数，我们可以计算这些份额预期损失的贴现值(作为整体资产组合面值的百分比)，4%～8%份额的损失期望的贴现值(作为整体面值的百分比)可以被估计为0～8%份额和0～4%份额损失期望值贴现值之差，由此我们可以隐含出复合相关系数，并得出份额的两平溢价。

现在人们认识到以上的做法并非是最佳的。另一种更好的做法是对于每个标准份额，我们均计算出相应的预期损失，并产生类似于图24-3的图形，该图显示了0～X%份额的损失期望值与X之间的函数关系，对这一函数我们可以进行插值，并得出0～4%份额和0～8%份额的损失期望值，这两个值的差可以作为对4%～8%的损失期望值的估计，这一估计要比对基础相关系数进行插值更好。

我们可以证明为了保证无套利条件的成立，图24-4中的损失期望值的递增速度越来越慢。如果对基础相关系数进行插值，并由此来计算损失期望值，以上的无套利条件不一定会满足(这里的问题是0～X%份额的基础相关系数是0～X%份额损失期望的一个非线性函数)，因此对预期损失直接进行插值要远远优于直接对基础相关系数进行插值，而且这样做，我们可以保证无套利条件的成立。

24.11 其他模型

本节我们将简要地讨论一些其他模型，这些模型是对已经成为市场标准的单因子高斯 Copula 模型的替代。

24.11.1 异质模型

市场标准模型是一个**同质模型**(homogeneous model)[㊀]，同质模型是指对于所有公司，违约时间的概率分布均相同，同时任意的两家公司之间相关系数均相等。我们可以放宽同质性的假设并采用更为广义的模型。但是，由此得出的模型会更为复杂，因为每家公司都将会有不同的违约概率，并且我们不能再有二项式公式，即式(24-7)来计算$P(k, t \mid F)$项，我们必须采用 Andersen et al. (2003)以及 Hull 和 White(2004)所描述的数值方法来计算[㊁]。

24.11.2 其他 Copula 模型

单因子高斯 Copula 模型是用于描述违约时间之间相关性的特殊模型。除此之外还有许多其他的单因子模型，其中包括 Student t Copula 模型、Clayton Copula 模型、Archimedean Coupla 模型以及 Marshall-Olkin Copula 模型。我们还可以通过假设式(24-10)中的F和Z_i服从均值为0、方差为1的非正态分布来得出新的模型。Hull 和 White 说明了当F和Z_i为具有4个自由度的 Student t 分布时，模型可以与市场达到较好的匹配，他们将相应的模型叫做**双重 t Copula**(double t Copula)模型。

另一种处理方式是增加模型中的因子个数，但遗憾的是这样做会使模型的运算变得很缓慢，因为此时需要在多个正态分布上积分(而不是在一个正态分布上)。

24.11.3 随机因子载荷模型

Andersen 和 Sidenius 提出了一种将式(24-5)中的 Copula 相关系数ρ取成F函数的模型。

一般来讲，ρ会随F的减小而增大，这意味着在违约率较高的世界中(即当F较低的世界里)，违约相关性也会很高，实证结果确实证明了这一点。Andersen 和 Sidenius 发现他们的模型对于市场报价的匹配比标准市场模型要好。

㊀ 异质模型的英文表达是 heterogeneous model。——译者注

㊁ 见 L. Andersen, J. Sidenius, and S. Basu, "All Your Hedges in One Basket," *Risk*, November 2003；和 J. C. Hull and A. White, "Valuation of a CDO and nth-to-Default Swap without Monte Carlo Simulation," *Journal of Derivatives*, 12, 2 (Winter 2004), 8-23。

24.11.4 隐含 Copula 模型

Hull 和 White 展示了如何由市场报价来隐含计算 Copula 函数[⊖]。这种模型的最简单形式是假定在 CDO 期限内对所有公司均采用某个平均风险率，其中平均风险率的概率分布可由份额的市场价格隐含得出。从概念上来讲，计算隐含 Copula 函数的过程同第 19 章所讨论的由期权价格计算隐含概率分布的过程很相似。

24.11.5 动态模型

到目前为止，我们所讨论的模型均可以归纳为**静态模型**(static model)。从根本上来讲，这些模型只是在 CDO 期限内对平均违约环境进行模拟，对 5 年期的 CDO 所构造的模型与对 7 年期的 CDO 所构造的模型是不同的，而后者与对 10 年期的 CDO 所构造的模型均也不相同。**动态模型**(dynamic model)与静态模型有所不同，它试图对资产组合在所有时段的损失进行模拟，现已有 3 种不同的动态模型：

- **结构模型**(structural model)。这类模型与 23.6 节所描述的模型类似，其不同之处在于多个公司资产价格的模拟的随机过程是同时进行的。当公司资产的价格达到一定的边界值时，违约会发生。资产价格所服从的过程相互关联。这类模型的关键问题是实施过程必须采用蒙特卡罗模拟，并且其校正过程也较为困难。
- **简化模型**(reduced form model)。这类模型是对公司的风险率进行模拟。为了建立合理的相关系数，有时有必要在风险率上附加一些跳跃。
- **从上至下模型**(top down model)。这类模型对资产组合的整体损失进行模拟，不考虑单一公司的信用变化。

小 结

金融机构采用信用衍生产品可以积极主动地管理自身的信用风险，金融机构利用某种信用互换可以将自己的信用风险转移给其他公司，或通过将一类风险暴露转换为另一类风险暴露来分散信用风险。

市场上最流行的信用衍生产品是信用违约互换(CDS)，在信用违约互换合约中买入某个公司信用违约保险的一方在违约事件后的收益等于某个参考实体公司债券面值与违约时债券价格的差，我们可以通过计算付款期望值的贴现值以及收益期望值的贴现值来对信用违约互换进行分析与定价。

信用违约互换的远期合约是指在将来某个指定时刻进入某个信用违约互换的一种义务，信用违约互换期权是在将来某个时刻进入某个信用违约互换的一种权力，在到期之前如果参考实体违约，信用违约互换远期及期权都会自动消失。

总收益互换是指某个与信用有关的资产收益与 LIBOR 加上差价的交换协议，总收益互换常常被用来作为融资工具。某家公司为了买入某个债券组合，可以同金融机构达到一种协议，协议中阐明金融机构首先买入债券组合，然后金融机构向这家公司支付债券组合的整体收益，同时金融公司的收入为 LIBOR 加上某种差价，这种结构的好处是这种交易减少了金融机构对于这家公司的信用风险暴露。

在债务抵押债券中，一个企业债券或贷款组合派生出具有不同风险特性的债券。CDO 对信用损失的分配指定了一定的规则，这些规则的直接作用是将资产组合派生出的债券赋予了或高或低的信用等级。一个合成 CDO 以信用违约互换交易为基础而派生出不同信用等级的债券。市场上关于第 k 次违约提供保护的 CDS 及 CDO 的标准定价模型是关于违约时间的单因子高斯 Copula 模型。

⊖ 见 J. C. Hull and A. White, "Valuing Credit Derivatives Using an Implied Copula Approach," *Journal of Derivatives*, 14 (2006), 8-28。

推荐阅读

Andersen, L., and J. Sidenius, "Extensions to the Gaussian Copula: Random Recovery and Random Factor Loadings," *Journal of Credit Risk*, 1, No. 1 (Winter 2004): 29–70.

Andersen, L., J. Sidenius, and S. Basu, "All Your Hedges in One Basket," *Risk*, November 2003.

Das, S., *Credit Derivatives: Trading & Management of Credit & Default Risk*, 3rd edn. New York: Wiley, 2005.

Hull, J. C., and A. White, "Valuation of a CDO and *n*th to Default Swap without Monte Carlo Simulation," *Journal of Derivatives*, 12, No. 2 (Winter 2004): 8–23.

Hull, J. C., and A. White, "Valuing Credit Derivatives Using an Implied Copula Approach," *Journal of Derivatives*, 14, 2 (Winter 2006), 8–28.

Hull, J. C., and A. White, "An Improved Implied Copula Model and its Application to the Valuation of Bespoke CDO Tranches," *Journal of Investment Management*, 8, 3 (2010), 11–31.

Laurent, J.-P., and J. Gregory, "Basket Default Swaps, CDOs and Factor Copulas," *Journal of Risk*, 7, 4 (2005), 8–23.

Li, D. X., "On Default Correlation: A Copula Approach," *Journal of Fixed Income*, March 2000: 43–54.

Schönbucher, P. J., *Credit Derivatives Pricing Models*. New York: Wiley, 2003.

Tavakoli, J. M., *Credit Derivatives & Synthetic Structures: A Guide to Instruments and Applications*, 2nd edn. New York: Wiley, 1998.

练习题

24.1 解释一般信用违约互换与两点信用违约互换的区别。

24.2 某信用违约互换付费为每半年一次，付费溢价为 60 个基点，本金为 3 亿美元，交割方式为现金形式，假设违约发生在 4 年零 2 个月后，而信用违约互换价格的计算方所估计的最便宜可交割债券在刚刚违约时的价格等于面值的 40%，列出此 CDS 出售方的现金流和支付时间。

24.3 说明信用违约互换的两种交割方式。

24.4 说明现金 CDO 及合成 CDO 的构造过程。

24.5 什么是第一次违约 CDS 合约？当信用相关性增加时，其价格是会增加还是减小？解释你的答案。

24.6 解释在风险中性与现实世界中违约概率的不同。

24.7 解释为什么一个总收益互换可以用于作为一种融资工具？

24.8 假定零息收益率曲线为水平，每年为 7%（连续复利），假定在一个 5 年期 CDS 合约中违约只能发生在每年的年中，假定回收率为 30%，并且在无前期违约条件下违约的条件概率为每年 3%，估计信用违约互换的溢价，在计算中假定 CDS 付费为 1 年 1 次。

24.9 假定在练习题 24.8 中信用违约互换溢价为面值的 150 个基点，这一信用违约互换对于信用买入方的价格为多少？

24.10 假如练习题 24.8 中的信用违约互换为两点式信用违约互换，计算出的溢价为多少？

24.11 一个 5 年期第 n 次违约互换合约的运作方式是什么？假定我们有一个由 100 个参考实体所构成的组合，每一个参考实体的违约概率为每年 1%，当参考实体的违约相关性增加时，第 n 次违约互换合约在以下情形下价格会如何变化？(a) $n=1$ 及 (b) $n=25$，解释你的答案。

24.12 将 CDS 收益、面值和回收率联系在一起的公式是什么？

24.13 证明一个简单信用违约互换的溢价等于 $1-R$ 乘以一个两点式 CDS 的溢价，这里的 R 为回收率。

24.14 验证在表 24-1 至表 24-4 的例子中，如果 CDS 溢价为 100 个基点，那么一年的违约概率（在没有前期违约的条件下）必须是 1.61%。当回收率由 40% 变为 20% 时，违约概率会如何变化？验

证你的答案和违约概率与 $1/(1-R)$ 成比例的结论具有一致性，R 为回收率。

24.15 某家公司进入某个总收益互换合约，在合约中这家公司收入为某企业债券券息即 5%，而同时需要付出的利率为 LIBOR，解释这一合约和一个固定利率为 5% 以及浮动利率为 LIBOR 的一般利率互换的区别。

24.16 解释 CDS 远期合约及 CDS 期权结构。

24.17 "在信用违约互换中信用买入方的头寸与某个无风险债券的长头寸与某个企业债券的短头寸相似"，解释这一观点。

24.18 为什么在信用违约互换中存在信息不对称问题？

24.19 在 CDS 定价中采用现实世界违约概率而不是风险中性违约概率会高估还是低估信用保护的价格？解释为什么。

24.20 总收益互换与资产互换的差别是什么？

24.21 假定在一个单因子高斯 Copula 模型中，125 家公司任意一家公司的 5 年违约概率均为 3%，假设 Copula 相关系数为 0.2，对应于不同的因子价值 -2、-1、0、1、2，计算：(a)在因子取值条件下的违约概率；(b)在因子条件下，出现多于 10 个违约事件的概率。

24.22 解释基础相关系数与复合相关系数的差别。

24.23 在例子 24-2 中，9% ~12% 份额的溢价为多少？

作业题

24.24 假定无风险零息收益曲线为水平，每年为 6%(连续复利)，并且假定在一个 2 年期 CDS 合约中违约可能会发生在 0.25 年、0.75 年、1.25 年和 1.75 年，CDO 合约溢价付费为每半年一次，假定回收率为 20%，并且无条件违约概率(在时间 0 观察到)在 0.25 年和 0.75 年为 1%，在 1.25 年和 1.75 年均为 1.5%，信用违约互换溢价为多少？如果以上信用违约互换变为两点式信用违约互换，那么溢价又会是多少？

24.25 假定某公司的在无前期违约条件下一年的违约概率为 λ，回收率为 R，无风险利率为每年 5%，假设违约只是发生在每年的年中，5 年期的一般 CDS 一年支付一次的溢价为 120 个基点，5 年期两点 CDS 一年支付一次的溢价为每年 160 个基点，估计回收率 R 及条件违约概率 λ。

24.26 当债券组合的相关性增加时，CDO 的不同份额所给出的收益率会如何变化？

24.27 假定

(a) 5 年期无风险债券的收益率为 7%。

(b) 5 年期公司 X 所发行债券的收益率为 9.5%。

(c) 一个 5 年期对于公司 X 的信用保护溢价为每年 150 个基点。

这时是否存在套利机会？当信用违约互换的溢价由 150 个基点变为 300 个基点时，套利机会如何变化？给出两个原因来说明这里的套利机会并不完美。

24.28 在例子 24-3 中，以下产品的溢价分别为多少？(a)第一次违约 CDS；(b)第二次违约 CDS。

24.29 在例子 24-2 中，6% ~9% 份额的溢价为多少？

24.30 1 年、2 年、3 年、4 年和 5 年期 CDS 的溢价分别为 100、120、135、145 和 152 个基点。对应于所有期限的无风险利率均为 3%，回收率为 35%，每季度支付一次。利用 DerivaGem 计算每年按连续复合的风险率。在 1 年内违约的概率是多少？在第 2 年内违约的概率是多少？

24.31 表 24-6 显示在 2008 年 1 月 31 日，5 年期 iTraxx 指数为 77 个基点。假定对于所有期限的无风险利率均为 5%，回收率为 40%，每季度付费一次。再假定 77 个基点的溢价对所有期限都适用。利用 DerivaGem 的 CDS 工作表计算与溢价一致的风险率。在 CDO 工作表中利用这个结果，并选取 10 个积分点来计算对应于 2008 年 1 月 31 日报价中每个份额的隐含基础相关系数。



第 25 章

特种期权

欧式和美式看涨看跌期权等衍生产品可以被统称为**简单产品**(plain vanilla product)，这些产品的定义非常标准并且意义明确。在市场上简单产品交易比较活跃，其价格或隐含波动率可以在交易所或衍生产品交易商那里定期取得。令人兴奋的是在场外衍生产品市场内，金融工程师发明了许多**非标准产品**[或称**特种产品**(exotics)]。虽然特种产品占整体交易组合的比例仍然很低，但这类产品对衍生产品交易商而言非常重要，这是因为这些产品的盈利要比简单产品更为丰厚。

特种产品的产生有许多原因，有时这些产品是为了满足某种对冲需要，有时是由于税务、财会、法律或监管等原因。企业资金部或基金经理发现特种产品更能满足自身的需要，有时这些产品的设计是为了反映企业资金部或基金经理对于市场变量将来走向的预测，在某些情形下，投资银行所设计的特种产品是为了吸引那些不太老练的资金部主管或基金经理的注意力。

本章我们将描述不同形式的特种期权并讨论它们的等价过程。我们考虑的资产提供收益率为 q。如第 16 章和第 17 章所述，对于股指期权，q 等于股息收益率；对于货币期权，q 等于外币的无风险利率；对于期货期权，q 等于国内无风险利率。本章讨论的大多数期权可以采用 DerivaGem 软件来定价。

25.1 组合期权

组合期权(package)是由标准欧式看涨期权、欧式看跌期权、远期合约、现金以及标的资产所构成的证券组合。我们在第 11 章曾讨论过若干组合期权：牛市差价、熊市差价、蝶式差价、日历差价、跨式期权、异价跨式期权，等等。

交易员经常将组合期权设计成初始成本为 0。具有 0 成本组合期权的一个特例是**范围远期合约**(range-forward contract)[⊖]。这一产品曾在 16.2 节中讨论过，范围远期合约是由一个看涨期权的长头寸和一个看跌期权的短头寸组成，或者由一个看涨期权的短头寸和一个看跌期权的长头寸组成，这里的看涨期权的执行价格大于看跌期权的执行价格，执行价格的选取保证最初看涨期权的价格等于看跌期权的价格。

我们应该注意到，如果将衍生产品的付费延迟到到期日，我们可以将任何产品转换为零费用产品。考虑一个欧式看涨期权。如果 c 为在 0 时刻支付的期权价格，那么 $A = ce^{rT}$ 为在到期日，即 T 时刻支付的费用。期权收益为 $\max(S_T - K,\ 0) - A$，或 $\max(S_T - K - A,\ -A)$。当执行价格等于远期价格时，延迟付费产品的其他名称为**断点远期**(break forward)、**波士顿期权**(Boston option)和**可撤远期**(forward with optional exit)和**可取消远期**(cancelable forward)。

⊖ 范围远期合约的另一个常用名称为**零成本区间双限**(zero-cost collar)，其他名称包括**灵活远期**(flexible forward)、**滚筒式期权**(cylinder option)、**期权围栏**(option fence)、**最小最大合约**(min-max)、**远期界定**(forward band)。

25.2 非标准美式期权

标准美式期权在有效期内任何时刻均可以被行使，并且执行价格相同。在实际中，有时场外市场交易的美式期权具有一些非标准特性。例如：

- 提前行使时间只限于期权有效期内的某些特定日期。此类产品被称为**百慕大式期权**(Bermudan option)，这是因为百慕大介于欧洲与美洲之间！
- 提前行使只限于期权有效期内的某个特定区间。例如，在刚开始时有一段“待定”时间，在此期间不能提前行使期权。
- 在有效期内，期权执行价格会有所变化。

由公司发行的**认股权证**(warrant)常常会具备以上特性。例如，某7年期的认股权证的行使日期只可能为第3年与第7年之间的某些特定日期上，在第3年与第4年之间执行价格为30美元，在接下两年执行价格为32美元，在最后一年执行价格为33美元。

我们往往可以采用二叉树来对非标准美式期权定价，在树上可行使期权的节点上，为了反映期权的条款，我们需要检测期权是否会被行使。

25.3 缺口期权

缺口期权是一种欧式期权，当 $S_T \geqslant K_2$ 时，其收益为当 $S_T - K_1$。缺口期权与具有执行价格 K_2 的普通看涨期权之间的区别是当 $S_T \geqslant K_2$ 时，收益增加了 $K_2 - K_1$。当 $K_2 > K_1$ 时，这个数量为正，$K_1 > K_2$ 时为负。

对欧式缺口期权定价时，只要将布莱克-斯科尔斯-默顿公式稍加修改即可。采用常用的记号，这个值等于

$$S_0 e^{-qT} N(d_1) - K_1 e^{-rT} N(d_2) \tag{25-1}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K_2) + (r - q + \sigma^2/2)/T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

这个公式所给的价格比通常的布莱克-斯科尔斯-默顿公式所给执行价格为 K_2 的普通看涨期权价格高出

$$(K_2 - K_1) e^{-rT} N(d_2)$$

为了理解这个差别，注意行使期权的概率是 $N(d_2)$，而当期权被行使时，缺口期权持有人的收益比普通看涨期权持有人的收益高出 $K_2 - K_1$。

缺口看跌期权的收益当 $S_T < K_2$ 时为 $K_1 - S_T$。期权的价值等于

$$K_1 e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1) \tag{25-2}$$

其中，d_1 和 d_2 的定义如式(25-1)所示。

【例25-1】 某资产的目前价值为50万美元。在今后一年内，其波动率预期为20%。无风险利率为5%，资产没有任何收入。假如一家保险公司同意如果在一年末资产的价值低于40万美元时以40万美元的价格收购该资产，那么只要当资产的价值低于40万美元，保险公司就要支付40万 $-S_T$。保险公式对投保人提供了一个普通看跌期权：投保人有权在一年末按40万美元的价格将资产卖给保险公司。这份保险的价值可由式(14-21)计算，其中 $S_0 = 500\,000$，$K = 400\,000$，$r = 0.05$，$\sigma = 0.2$，$T = 1$。价值是3 426美元。

以下假定转移资产的费用是5万美元，由投保人承担。只有当资产的价值低于35万美元时，

期权才会被行使。在这种情况下，当 $S_T < K_2$ 时对保险公司而言费用为 $K_1 - S_T$，其中 $K_2 = 350\,000$，$K_1 = 400\,000$，S_T 为一年末时资产的价格。这里的保险是一个缺口看跌期权，其价值可以通过式(25-2)计算，其中 $S_0 = 500\,000$，$K_1 = 400\,000$，$K_2 = 350\,000$，$r = 0.05$，$\sigma = 0.2$，$T = 1$。价值是1 896美元。在本例中，将索赔时投保人的费用考虑在内后，这项保险对保险公司的费用将会降低大约45%。

25.4 远期开始期权

远期开始期权(forward start option)是在未来某时刻才开始的期权，第15章所讨论的雇员股票期权可以看做远期开始期权的特例。在一个典型的雇员股票期权计划中，公司(明确或不明确地)向其雇员许下了在将来某时刻向雇员发放平值期权的承诺。

考虑一个远期开始平值欧式看涨期权，期权开始时刻为 T_1，到期日为 T_2。假定资产在0时刻的价格为 S_0，在 T_1 时刻的价格为 S_1。为了给这一期权定价，我们注意到在第14章和第16章中给出的欧式平价期权的价格与资产价格成比例。因此，在 T_1 时刻，远期开始的期权价格为 cS_1/S_0，其中 c 为0时刻的期限为 $T_2 - T_1$ 的平值期权的价格。采用风险中性定价，0时刻的远期开始期权价格为

$$e^{-rT_1}\hat{E}\left[c\frac{S_1}{S_0}\right]$$

式中，$\hat{E}$代表风险中性世界里的期望值。因为 c 和 S_0 为已知，并且$\hat{E}[S_1] = S_0e^{(r-q)T_1}$，我们得出远期开始欧式价格为 ce^{-qT_1}。对于无股息股票，$q = 0$，一个远期开始期权的价格与一个一般的具有相等期限的平值期权价格相等。

25.5 棘轮期权

棘轮期权[cliquet option 或 ratchet option，有时也叫做执行价格调整期权(strike reset)]是一系列由某种方式确定执行价格的看涨或看跌期权。假设调整日期为时刻 τ，2τ，…，$(n-1)\tau$，棘轮期权期限为 $n\tau$。一种简单结构如下：第一个期权的有效时间是时间0与 τ 之间，执行价格为 K(也许是资产的初始价格)；第二个期权在时刻 2τ 提供收益，其执行价格为资产在 τ 时刻的价格；第三个期权在时刻 3τ 提供收益，其执行价格为资产在 2τ 时刻的价格，等等。这是个普通期权加上 $n-1$ 个远期开始期权，而这些远期开始期权可以通过25.2节中的方法定价。

有些棘轮期权比这里描述的形式要复杂得多。比如，有时会对期权在整个期限内的总收益加以上限和下限，有时会指明当资产价格介于某个范围内时，棘轮期权将会在这个时间区间末结束。当精确的解析解不存在时，我们可以通过蒙特卡洛模拟法对这种期权定价。

25.6 复合期权

复合期权(compound option)是期权上的期权。复合期权主要有4种类型：看涨-看涨期权、看涨-看跌期权、看跌-看涨期权、看跌-看跌期权。复合期权有两个执行价格和两个到期日。例如，考虑如下看涨看涨期权，在第一个到期日 T_1，复合期权的持有人有权付 K_1 的执行价格来获得看涨期权。所获得的看涨期权给期权持有人以第二个执行价格 K_2 在第二个到期日 T_2 买入资产的权利。只有第二个期权在第一个到期日的价格高于第一个执行价格时，复合期权才会被行使。

在几何布朗运动的假设下，欧式复合期权的价格可由解析公式来表达[⊖]，解析公式涉及二元

⊖ 见R. Geske, "The Valuation of Compound Options," *Journal of Financial Economics*, 7(1979): 63-81; M. Rubinstein, "Double Trouble," *Risk*, December 1991/January 1992: 53-56。

正态函数的计算。采用通常的符号，欧式看涨看涨期权的价格为

$$S_0e^{-qT_2}M(a_1,b_1;\sqrt{T_1/T_2}) - K_2e^{-rT_2}M(a_2,b_2;\sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1}K_1N(a_2)$$

式中

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S^*) + (r-q+\sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0/K_2) + (r-q+\sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}$$

式中 $M(a, b; \rho)$ 代表第一个变量小于 a，第二个变量小于 b，相关系数为 ρ 的二元正态累积分布函数[⊖]。变量 S^* 对应于在时间 T_1、期权价格等于 K_1 的资产值。在时间 T_1，如果资产价格大于 S^*，第一个期权将被行使；如果资产价格小于 S^*，第一个期权在到期是价值为 0。

用类似的符号，欧式看跌-看涨期权的价格为

$$K_2e^{-rT_2}M(-a_2,b_2;-\sqrt{T_1/T_2}) - S_0e^{-qT_2}M(-a_1,b_1;-\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1}K_1N(-a_2)$$

欧式看涨-看跌期权的价格为

$$K_2e^{-rT_2}M(-a_2,-b_2;\sqrt{T_1/T_2}) - S_0e^{-qT_2}M(-a_1,-b_1;\sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1}K_1N(-a_2)$$

欧式看跌-看跌期权的价格为

$$S_0e^{-qT_2}M(a_1,-b_1;-\sqrt{T_1/T_2}) - K_2e^{-rT_2}M(a_2,-b_2;-\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1}K_1N(a_2)$$

25.7 选择人期权

选择人期权（chooser option）有时也被称为**任选期权**（as-you-like-it option）。该期权具有以下特性：在经过一段指定的时间后，持有人能够选择所持有的期权是看涨期权还是看跌期权。假定持有人做出选择的时刻为 T_1，这时选择人期权的价值为

$$\max(c,p)$$

其中 c 为选择人期权中看涨期权的价格，p 为选择人期权中看跌期权的价格。

如果选择人期权的两个标的期权均为欧式期权，并且具有同样的执行价格，那么我们可以通过看跌-看涨期权的平价关系式来推导出选择人期权的定价公式。假定 S_1 为标的资产在 T_1 的价格，K 为执行价格，T_2 为期权的到期日，r 为无风险利率，q 为标的资产的股息收益率。由看跌-看涨期权的平价关系式得出

$$\begin{aligned}\max(c,p) &= \max(c, c + Ke^{-r(T_2-T_1)} - S_1e^{-q(T_2-T_1)}) \\ &= c + e^{-q(T_2-T_1)}\max(0, Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)} - S_1)\end{aligned}$$

以上关系式显示选择人期权是一种组合期权，其构成为

- 执行价格为 K，到期日为 T_2 的看涨期权。
- $e^{-q(T_2-T_1)}$ 份执行价格为 $Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}$，到期日为 T_1 的看跌期权。

因此，很容易对选择人期权定价。

我们可以定义更为复杂的选择人期权，其中看涨和看跌期权的执行价格以及期限可以各不相同。这种选择人期权不是简单的期权组合，其特性在某些方面与复合期权相似。

25.8 障碍式期权

障碍式期权（barrier option）取决于标的资产的价格在一段特定时间区间内是否达到某个特定水平。

⊖ 作者网页的技术报告（Technical Note 5）有关于计算 M 的数值算法。

场外市场有几种不同的障碍式期权在交易。因为它们通常比普通的期权便宜，所以障碍式期权颇受投资者的青睐。障碍式期权可分为**敲出期权**(knock-out option)和**敲入期权**(knock-in option)两类。当标的资产价格达到一定水平时，敲出期权不再存在；当标的资产价格达到一定水平时，敲入期权才开始存在。

式(16-4)和式(16-5)给出了一般欧式看涨和看跌期权在0时刻的价格

$$c = S_0e^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0e^{-qT}N(-d_1)$$

式中

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

下跌-敲出看涨期权(down-and-out call)是敲出期权的一种，这种期权是一种普通的看涨期权，但当资产价格下跌到一定障碍水平 H 时，期权自动消失。障碍水平低于初始资产水平。与之相对应的敲入看涨期权为**下跌-敲入看涨期权**(down-and-in call)，这是一种普通看涨期权，但只有当资产价格下跌到一定水平 H 时，这种期权才会生效。

当 H 等于或低于执行价格 K 时，下跌-敲出看涨期权在0点的价格为

$$c_{di} = S_0e^{-qT}(H/S_0)^{2\lambda}N(y) - Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}N(y - \sigma\sqrt{T})$$

式中

$$\lambda = \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2}$$

$$y = \frac{\ln[H^2/(S_0K)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

因为一个普通的看涨期权等于一个下跌-敲入看涨期权加上一个下跌-敲出看涨期权，因此，下跌-敲出看涨期权的价格满足

$$c_{do} = c - c_{di}$$

当 $H \geqslant K$ 时，

$$c_{do} = S_0N(x_1)e^{-qT} - Ke^{-rT}N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0e^{-qT}(H/S_0)^{2\lambda}N(y_1) + Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}N(y_1 - \sigma\sqrt{T})$$

以及

$$c_{di} = c - c_{do}$$

式中

$$x_1 = \frac{\ln(S_0/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$y_1 = \frac{\ln(H/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

上升-敲出看涨期权(up-and-out call)是一种普通看涨期权，但当资产价格到一定障碍水平 H 时，期权自动消失。**上升-敲入看涨期权**(down-and-in call)是一种普通看涨期权，只有当资产价格上升到一定水平 H 时，这种期权才会生效。当 H 小于 K 时，上升-敲出看涨期权价格为0；上升-敲入看涨期权的价格为 c。当 H 大于执行价格 K 时，我们有

$$c_{ui} = S_0N(x_1)e^{-qT} - Ke^{-rT}N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0e^{-qT}(H/S_0)^{2\lambda}[N(-y) - N(-y_1)]$$
$$+ Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}[N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})]$$

以及

$$c_{uo} = c - c_{ui}$$

障碍看跌期权的定义与障碍看涨期权类似。**上涨-敲出看跌期权**(up-and-out call)是一种普通的看跌期权，但当资产价格上涨到一定障碍水平 H 时，期权自动消失。**上升-敲入看跌期权**(up-and-in-put)为一种普通看跌期权，只有当资产价格下跌到一定水平 H 时，这种期权才会存在。当 H 大于或等于执行价格 K 时，我们有

$$p_{ui} = -S_0e^{-qT}(H/S_0)^{2\lambda}N(-y) + Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}N(-y+\sigma\sqrt{T})$$

以及

$$p_{uo} = p - p_{ui}$$

当 H 小于或等于执行价格 K 时，我们有

$$p_{uo} = -S_0N(-x_1)e^{-qT} + Ke^{-rT}N(-x_1+\sigma\sqrt{T}) + S_0e^{-qT}(H/S_0)^{2\lambda}N(-y_1) - Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}N(-y_1+\sigma\sqrt{T})$$

以及

$$p_{ui} = p - p_{uo}$$

下降-敲出看跌期权(down-and-out put)是一种看跌期权，但当资产价格下降到一定障碍水平 H 时，期权自动消失。**下降-敲入看跌期权**(down-and-in put)只有当资产价格下降到一定水平 H 时，这种期权才会生效。当 $H \geqslant K$ 时，$p_{do}=0$ 和 $p_{di}=p$。当 $H<K$ 时，我们有

$$p_{di} = -S_0N(-x_1)e^{-qT} + Ke^{-rT}N(-x_1+\sigma\sqrt{T}) + S_0e^{-qT}(H/S_0)^{2\lambda}[N(y)-N(y_1)] - Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}[N(y-\sigma\sqrt{T}) - N(y_1-\sigma\sqrt{T})]$$

以及

$$p_{do} = p - p_{di}$$

以上的定价公式均假设资产价格在将来时刻的分布为对数正态。一个关于障碍期权的重要特性为观察资产是否达到障碍值的频率。以上的解析结果假定，我们以连续形式观察资产是否达到障碍值，有时实际情况确实如此[㊀]。但在更多的时候合约会阐明观察 S 值具有一定的周期性。例如，每天中午 12 点。当资产被观察的形式为不连续时，Broadie、Galsserman 和 Kou 给出了一种对以上公式进行调节的解析公式[㊁]，结果如下：对于上升-敲入和上升-敲出期权，障碍水平 H 被 $He^{0.5816\sigma\sqrt{T/m}}$ 代替；对于下降-敲入和下降-敲出期权，障碍水平 H 被 $He^{-0.5816\sigma\sqrt{T/m}}$ 代替，其中 m 为资产被观察的次数(因此，T/m 为观察事件之间的间隔)。

障碍式期权同普通期权有很不一样的性质。例如，有时障碍式期权的 Vega 为负值。考虑一个上涨-敲出看涨期权，当标的资产的价格接近障碍水平时，波动率增加会导致标的资产价格达到障碍水平的概率增加，因此波动率的增加会促造成价值下降。

到现在为止所考虑的障碍期权的一个缺陷是，如果标的资产价格出现"尖峰"，那么将会导致期权被敲入或敲出。另一种期权是**巴黎期权**(Parisian option)，只有当资产价格高于或低于一段时间时，期权才会被敲入或敲出。例如，考虑一个下降-敲出巴黎看跌期权，执行价格为初始价格的 90%，障碍水平为初始价格的 75%。当资产价格低于障碍水平的天数达到 50 天时，期权将被敲出。期权可能会指明这里的 50 天为"连续 50 天"或"期权期限内任何 50 天"。对巴黎期权的定价要比对普通障碍期权更加困难。将蒙特卡洛模拟方法与二叉树方法改进后，可以用来对这类期

㊀ 一种跟踪股票价格是否从下面(上面)达到障碍水平的做法是向交易所发出限价指令，限价指令注明当障碍水平达到时卖出(买入)资产。此限价指令可以检验资产价格是否达到障碍水平。

㊁ 见 M. Broadie, P. Glasserman, and S. G. Kou, "A Continuity Correction for Discrete Barrier Options," *Mathematical Finance* 7, 4(October 1997): 325-49。

权定价（见26.5节和25.6节的讨论）。

25.9 二元式期权

二元式期权（binary option）是具有不连续收益的期权。一个简单的例子是**现金或空手看涨期权**（cash-or-nothing call option）。在到期日 T，如果标的资产价格低于执行价格，该期权的收益为0，但当标的资产价格高于执行价格时，该期权的收益为指定数量 Q。在风险中性世界中，期权到期时标的资产价格高出执行价格的概率为 $N(d_2)$，因此，现金或空手看涨期权的价格为 $Qe^{-rT}N(d_2)$。**现金或空手看跌期权**（cash-or-nothing put option）的定义与现金或空手看涨期权类似，在到期日 T，如果标的资产价格高于执行价格，该期权的收益为0，但当标的资产价格低于执行价格时，该期权的收益为规定数量 Q。现金或空手看涨期权的价格为 $Qe^{-rT}N(-d_2)$。

另一种二元式期权为**资产或空手看涨期权**（asset-or-nothing call）。在到期日 T，如果标的资产价格低于执行价格，该期权的收益为0，但当标的资产价格高于执行价格时，该期权的收益为标的资产本身。采用常用的符号，我们可以得出，资产或空手看涨期权的价格为 $S_0e^{-qT}N(d_1)$。**资产或空手看跌期权**（aseet-or-nothing put）的定义与资产或空手看涨期权类似，在到期日 T，如果标的资产价格高于执行价格，该期权的收益为0，但当标的资产价格低于执行价格时，该期权的收益为标的资产本身。资产或空手看跌期权的价格为 $S_0e^{-qT}N(-d_1)$。

一个普通的欧式看涨期权等于与一个资产或空手看涨期权长头寸与一个现金或空手看涨期权短头寸的组合，其中现金或空手看涨期权的现金收益为执行价格。类似地，一个普通的欧式看跌期权等于一个现金或空手看跌期权长头寸与一个资产或空手看跌期权短头寸的组合，其中现金或空手看跌期权现金收益为执行价格。

25.10 回望式期权

回望期权（lookback option）的收益与在期权有效期内标的资产的最大值或最小值有关。**浮动回望看涨期权**（floating lookback call）的收益等于最后的标的资产价格超出期权有效期内标的资产的最低价格的差价。**浮动回望看跌期权**（floating lookback put）的收益等于期权有效期内标的资产的最高价格超出最后的标的资产价格的差价。

欧式浮动回望期权具有精确的定价公式[⊖]，其中欧式浮动回望看涨期权的定价公式为

$$c_{fl} = S_0e^{-qT}N(a_1) - S_0e^{-qT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}N(-a_1) - S_{min}e^{-rT}\left[N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)}e^{Y_1}N(-a_3)\right]$$

式中

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S_{min}) + (r-q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$a_3 = \frac{\ln(S_0/S_{min}) + (-r+q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_1 = -\frac{2(r-q-\sigma^2/2)\ln(S_0/S_{min})}{\sigma^2}$$

S_{min}为资产价格到目前所取得的最小值（如果回望期权刚刚开始，$S_{min}=S_0$）。对于 $r=q$ 的情形，见练习题25.23。

⊖ 见 B. Goldman, H. Sosin, and M. A. Gatto, "Path-Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High," *Journal of Finance*, 34(December 1979): 1111-27; M. Garman, "Recollection in Tranquility," *Risk*, March(1989): 16-19。

欧式浮动回望看跌期权的定价公式为

$$p_{fl} = S_{max}e^{-rT}\left[N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)}e^{Y_2}N(-b_3)\right] + S_0e^{-qT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}N(-b_2) - S_0e^{-qT}N(b_2)$$

式中

$$b_1 = \frac{\ln(S_{max}/S_0) + (-r+q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$b_3 = \frac{\ln(S_{max}/S_0) + (r-q-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_2 = \frac{2(r-q-\sigma^2/2)\ln(S_{max}/S_0)}{\sigma^2}$$

S_{max}为资产价格到目前所取得的最大值（如果回望期权刚刚开始，$S_{max}=S_0$）。

浮动回望看涨期权是为了保证期权持有者能以期权有效期内资产所能达到的最低价格买入资产。类似地，浮动回望看跌期权是为了保证期权持有者能以期权有效期内资产所能达到的最高价格卖出资产。

【例 25-2】 考虑一个刚刚开始的关于某无股息股票的浮动回望看跌期权，股票价格为 50 美元，股票价格波动率为每年 40%，无风险利率为每年 10%，期限为 3 个月。这时 $S_{max}=50$，$S_0=50$，$r=0.1$，$q=0$，$\sigma=0.4$ 和 $T=0.25$。由以上公式得出 $b_1=-0.025$，$b_2=-0.225$，$b_3=0.025$，以及 $Y_2=0$。因此，欧式回望看跌期权的价格为 7.79。一个刚刚开始的在同一股票上的看涨期权价格为 8.04。

在一个固定回望期权中，执行价格是指定的。一个**固定回望看涨期权**（fixed lookback call option）的收益类似于一个普通欧式看涨期权，其唯一不同之处是最后的资产价格被期权期限内资产价格的最大值取代；一个**固定回望看跌期权**（fixed lookback put option）的收益类似于一个普通欧式看跌期权，其唯一不同之处是最后的资产价格被期权期限内资产价格的最小值取代。定义 $S^*_{max}=\max(S_{max}, K)$，其中 S_{max}为资产价格在期权期限截止到目前为止的最大值，K 为执行价格。同时，定义 p^*_{fl} 为浮动回望看跌期权的价格，这一看跌期权的与固定回望看涨期权的期限相同，固定回望看涨期权中资产截止到目前所取得最大值 S_{max}被 S^*_{max}取代。采用看跌-看涨期权平价关系中的论证方式，我们可以得出固定回望看涨期权的价格 c_{fix}满足以下关系式[⊖]

$$c_{fix} = p^*_{fl} + S_0e^{-qT} - Ke^{-rT}$$

类似地，令 $S^*_{min}=\min(S_{min}, K)$，我们可以得出固定回望看跌期权的价格 p_{fix}满足以下关系式

$$p_{fix} = c^*_{fl} + Ke^{-rT} - S_0e^{-qT}$$

式中 c^*_{fl} 为浮动回望看涨期权的价格，这一看涨期权与固定回望看跌期权的期限相同，固定回望看跌期权中资产截止到目前所取得最小值 S_{min}被 S^*_{min}取代。以上的讨论说明，对以上给出的浮动回望期权的公式进行修改，我们即可对固定回望期权定价。

回望期权对投资者很有吸引力，但与一般期权价格相比，这种期权的价格非常昂贵。与障碍期权相似，回望期权的价格与为了确定标的资产价格最大值和最小值而设定的对于资产价格观察频率有关。以上定价公式假定资产价格观察频率为连续。Broadie、Galsserman 和 Kou 给出了当观

⊖ 这一观点是由 H. Y. Wong 和 Y. K. Kwok 在以下文章中提出，"Sub-replication and Replenishing Premium: Efficient Pricing of Multi-state Lookbacks," *Review of Derivatives Research*, 6(2003), 83-106。

察时间为离散情形时，对于以上公式的调节方法[⊖]。

25.11 喊价式期权

喊价式期权(shout option)为欧式期权，期权持有者在期权有效期内可以向期权承约人(卖出方)做一项“喊价”。在期权到期时，期权持有者的收益等于普通期权收益与喊价时期权内涵值的最大值。假定期权执行价格为50美元，在标的资产价格为60美元时，期权持有者喊价。如果最终的标的资产价格小于60美元，期权持有者的收益为10美元。如果最终的标的资产价格大于60美元，期权持有者的收益等于标的资产价格超出50美元的余额。

喊价式期权同回望期权有些类似，但其价格会便宜很多。如期权持有者在时间τ，资产价格为S_τ时进行喊价，那么最终的期权收益为

$$\max(0, S_T - S_\tau) + (S_\tau - K)$$

式中K为执行价格，S_T为时间T时的资产价格。在时间τ，如果期权持有者喊价，其价格等于$S_\tau - K$的贴现值(在时间T收取)加上一个执行价格为S_τ的期权的价格，这一期权可用布莱克-斯科尔斯-默顿公式定价。

我们可采用通常构造的二叉树和三叉树来对喊价式期权进行定价。在树形结构上进行回退运算时，在每个节点上，我们均要计算喊价和不喊价所对应的期权价格，期权在节点上的值等于以上两个价格的最大值。喊价期权的定价过程与美式期权的定价过程相似。

25.12 亚式期权

亚式期权(Asian option)的收益同标的资产在期权有效期内价格的算术平均有关。**平均价格看涨期权**(average price call option)的收益为$\max(0, S_{ave} - X)$，**平均价格看跌期权**(Average price put option)的收益为$\max(0, X - S_{ave})$，其中S_{ave}为标的资产价格的平均值。平均价格期权比普通期权便宜，并且此种期权可能更适合公司资金部主管的需求。假设一家美国公司的资金部主管预计在明年内会陆续并均匀地接收其澳大利亚子公司1亿澳元的现金流，此主管有可能对一种能够保证该年内平均汇率高于某一水平的期权感兴趣，因为平均价格看跌期权比普通看跌期权会更能满足其需求。

如果假定S_{ave}服从对数正态分布，那么我们可以利用和普通期权类似的公式来对平均价格期权定价。但是，我们通常是假设标的资产价格服从对数正态分布，这样做是比较合理的。一种比较流行的处理方法是将一个对数正态分布的前两阶矩与S_{ave}的前两阶矩相匹配，然后再采用布莱克模型。假定M_1和M_2是S_{ave}的前两阶矩。平均价格看涨期权与看跌期权价值由式(17-9)和式(17-10)给出，其中

$$F_0 = M_1 \tag{25-3}$$

以及

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{M_2}{M_1^2}\right) \tag{25-4}$$

其中，平均值是按连续的方式计算的，r、q和σ均为常数(和DerivaGem的假设一样)：

$$M_1 = \frac{e^{(r-q)T} - 1}{(r-q)T}S_0$$

以及

⊖ 见 M. Broadie, P. Glasserman, and S. G. Kou, “Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent Options,” *Finance and Stochastics*, 2(1998): 1-28。

$$M_2=\frac{2e^{[2(r-q)+\sigma^2]T}S_0^2}{(r-q+\sigma^2)(2r-2q+\sigma^2)T^2}+\frac{2S_0^2}{(r-q)T^2}\left(\frac{1}{2(r-q)+\sigma^2}-\frac{e^{(r-q)T}}{r-q+\sigma^2}\right)$$

在更一般的情况下，当平均值是由时刻 $T_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 的价格计算时，

$$M_1=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}F_i \quad 和 \quad M_2=\frac{1}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{m}F_i^2e^{\sigma_i^2T_i}+2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j-1}F_iF_je^{\sigma_i^2T_i}\right)$$

其中，F_i 和 σ_i 分别为对应于期限 T_i 的远期价格和隐含波动率。网页 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes 中的 Technical Note 27 是对这个公式的证明。

【例 25-3】 考虑一个最新发行的无股息股票平均价格看涨期权，股票的当前价格为 50，执行价格为 50，股票价格的波动率为每年 40%，无风险利率为每年 10%，期限为 1 年，这时 $S_0=50$，$K=50$，$r=0.1$，$q=0$，$\sigma=0.4$，和 $T=1$。如果平均值是按连续计算得出的，$M_1=52.59$，$M_2=2\,922.76$。由式(25-3)和式(25-4)得出，$F_0=52.59$，$\sigma=23.54\%$，在式(16-9)中设定 $K=50$，$T=1$ 以及 $r=0.1$，得出期权价值为 5.62。当假定在计算平均值时对股票价格所观察的次数为 12、52 和 250 时，期权的价格分别为 6.00、5.70 和 5.63。

对以上分析进行修改，我们可以将其用于非新发行的期权，而且已经观察到一部分用于计算平均值的股票价格的情形。假定计算平均价格包括已经观察到价格的长度为 t_1 的时间段，而且 t_2 时间段为期权的剩余期限。假定资产价格在 t_1 时间段的平均值为 $\bar{S}$。期权的收益为

$$\max\left(\frac{\bar{S}t_1+S_{ave}t_2}{t_1+t_2}-K,0\right)$$

其中 S_{ave} 为资产价格在剩余期限内的平均值。以上公式定价于

$$\frac{t_2}{t_1+t_2}\max(S_{ave}-K^*,0)$$

其中

$$K^*=\frac{t_1+t_2}{t_2}K-\frac{t_1}{t_2}\bar{S}$$

当 $K^*>0$ 时，可以采用与刚刚开始的亚式期权定价相同的方式来对以上期权定价。在计算中，K 被 K^* 代替，最终结果要乘以 $t_2/(t_1+t_2)$。当 $K^*<0$ 时，期权肯定被行使，期权的价格为

$$\frac{t_2}{t_1+t_2}[M_1e^{-rt_2}-K^*e^{-rt_2}]$$

另外一种类型的亚式期权为**平均执行价格期权**(average strike option)。**平均执行价格看涨期权**(average strike call option)的收益为 $\max(0,\ S_T-S_{ave})$，而**平均执行价格看跌期权**(average strike put option)的收益为 $\max(0,\ S_{ave}-S_T)$。平均执行价格期权可以保证在一段时间内频繁买入标的资产的平均价格不会高于最终价格。另外，平均执行价格期权也可以保证在一段时间内频繁卖出标的资产的平均价格不会低于最终价格。我们可以将这类期权当成资产交换期权来定价，在这里假定 S_{ave} 服从对数正态分布。

25.13 资产交换期权

资产交换期权(option to exchange one asset for another，也被称为**交换期权**(exchange option))有多种形式。从美国投资者的观点来看，用日元来购买澳元的期权是把一种外币资产交换另一种外币资产的期权。股票投标是将一种股票交换成另一种股票的期权。

考虑一欧式资产交换期权，期权持有者有权在 T 时刻以价格 U_T 的资产来交换 T 时刻价格 V_T 的资产，期权收益为

$$\max(V_T - U_T, 0)$$

Margrabe 首先给出了资产交换期权的定价公式[⊖]。假定资产 U 和 V 均服从几何布朗运动，波动率分别为 σ_U 和 σ_V，进一步假定 U 和 V 的瞬时相关系数为 ρ，U 和 V 的收益率分别为 q_U 和 q_V。期权在 0 时刻的价格为

$$V_0 e^{-q_V T} N(d_1) - U_0 e^{-q_U T} N(d_2) \tag{25-5}$$

式中

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + (q_U - q_V + \hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

和

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V}$$

U_0 和 V_0 分别为资产 U 和 V 在 0 时刻的价格。

以上公式的证明将在第 27 章中给出。有意思的是式(25-5)与无风险利率 r 无关，这是因为当 r 增大时，两个资产在风险中性世界的增长率均增大，这刚好造成与无风险利率 r 的增长相互抵消。变量 $\hat{\sigma}$ 为 V/U 的波动率。与式(16-4)进行比较，我们得出期权公式等价 U_0 份标的变量为 V/U，执行价格为 1.0，无风险利率为 q_U，股息收益率为 q_V 的欧式期权的价格。马克·鲁宾斯坦证明了对于美式期权，我们也可以采用以上论点对期权定价[⊜]。美式期权价格等于等于 U_0 份标的变量为 V/U，执行价格为 1.0，无风险利率为 q_U，股息收益率为 q_V 的美式期权的价格。因此，我们可以采用第 20 章的二叉树来对美式期权定价。

获得两个资产中较好或较差资产的期权同交换期权密切相关，此类期权等于其中某种资产与资产交换期权的组合：

$$\min(U_T, V_T) = V_T - \max(V_T - U_T, 0)$$
$$\max(U_T, V_T) = U_T + \max(V_T - U_T, 0)$$

25.14 涉及多种资产的期权

涉及两种或更多风险资产的期权有时也被称为**彩虹期权**(rainbow option)。一个例子是第 6 章中描述的在 CBOT 交易的债券期货合约，此期货合约允许短头寸方在交割时从大量不同的债券中选择。

最为普遍的涉及多种资产的期权例子也许是**欧式篮筐式期权**(basket option)，该期权的收益同组合(篮筐)资产的价值有关，这里的资产常常为股票、股指及货币。假定篮筐中的资产均服从几何布朗运动，我们可以采用蒙特卡罗模拟来对篮筐式期权定价。通过计算篮筐资产在期权到期时的前两阶矩，并假定篮筐资产在期权到期时服从对数正态分布，我们可以得出一个更快的定价方法。这时，可以利用布莱克模型对篮筐式期权定价，其中相应的参数由式(25-3)和式(25-4)给定，这时

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} F_i \quad 和 \quad M_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F_i F_j e^{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j T}$$

式中，n 为资产的个数，T 为期权的期限，F_i 和 σ_i 为第 i 个资产的远期价格和波动率，ρ_{ij} 为第 i 个资产与第 j 个资产之间的相关系数。见 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes 里的 Techincal Note 28。

⊖ 见 W. Margrabe, "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another," *Journal of Finance*, 33(March 1978): 177-86。

⊜ 见 M. Rubinstein, "One for Another," *Risk*, July/August, 1991: 30-32。

25.15 波动率和方差互换

假定我们考虑的时间区间为 $0 \sim T$，**波动率互换**(volatility swap)是指将一段时间内资产价格所实现的波动率与某一事先约定的波动率进行互换的合约。资产价格已实现波动率通常是按在14.4节中描述的方法计算，在计算中一般假定资产收益的均值为0。假定在0与 T 之间共有 n 个观察日，资产价格所实现的波动率为

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{252}{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)\right]^2}$$

式中 S_i 为资产的第 i 个观察值(有时会将 $n-2$ 换成 $n-1$)。

对于固定波动率的支付方而言，波动率互换在时刻 T 的收益为 $L_{\text{vol}}(\bar{\sigma}-\sigma_K)$，其中 L_{vol} 为名义本金，σ_K 为固定波动率。期权对于资产价格和波动率风险暴露的形式很复杂，而波动率互换的形式却比较简单，因为互换只对波动率有风险暴露。

方差互换(variance swap)是指将一段时段($0 \sim T$)的资产价格所实现的方差 $\bar{V}$ 与某一事先约定的方差进行互换的合约。方差等于波动率的平方($\bar{V}=\bar{\sigma}^2$)。方差互换比波动率互换更容易定价，这是因为我们完全可以采用看涨和看跌期权来复制 $0 \sim T$ 之间的方差。对于固定方差的支付方而言，方差互换在时刻 T 的收益为 $L_{\text{var}}(\bar{V}-V_K)$，其中 L_{var} 为名义本金，V_K 为固定方差。方差互换的名义本金常常用相应的波动率名义本金来表达，转换公式为 $L_{\text{var}}=L_{\text{vol}}/(2\sigma_K)$。

25.15.1 方差互换的定价

作者网页上的技术报告(Technical Note 22)证明了对于资产价格的任意值 S^*，0与 T 之间的平均方差的期望值为

$$\hat{E}(\bar{V}) = \frac{2}{T}\ln\frac{F_0}{S^*} - \frac{2}{T}\left[\frac{F_0}{S^*}-1\right] + \frac{2}{T}\left[\int_{K=0}^{S^*}\frac{1}{K^2}e^{rT}p(K)\,\mathrm{d}K + \int_{K=S^*}^{\infty}\frac{1}{K^2}e^{rT}c(K)\,\mathrm{d}K\right] \quad (25\text{-}6)$$

式中 F_0 为资产在合约到期日 T 的远期价格，$c(K)$ 为期限为 T、执行价格为 K 的欧式看涨期权价格；$p(K)$ 为期限为 T、执行价格为 K 的欧式看跌期权价格。

以上公式给出了一种对方差互换的定价方法[⊖]。收入 $0 \sim T$ 之间的实际方差，并同时付出方差 V_K 的合约价值为

$$L_{\text{var}}[\hat{E}(\bar{V}) - V_K]e^{-rT} \quad (25\text{-}7)$$

式中 L_{var} 为合约的名义本金。假定已知执行价格为 $K_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的欧式期权价格，其中 $K_1 < K_2 < \cdots < K_n$。一种实现式(25-6)的标准方法是将 S^* 设定为小于 F_0 的第一个执行价格，积分的近似式为

$$\int_{K=0}^{S^*}\frac{1}{K^2}e^{rT}p(K)\,\mathrm{d}K + \int_{K=S^*}^{\infty}\frac{1}{K^2}e^{rT}c(K)\,\mathrm{d}K = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta K_i}{K_i^2}e^{rT}Q(K_i) \quad (25\text{-}8)$$

其中当 $2 \leqslant i \leqslant n-1$ 时，$\Delta K_i = 0.5(K_{i+1}-K_{i-1})$；$\Delta K_1 = K_2 - K_1$；$\Delta K_n = K_n - K_{n-1}$。当 $K_i < S^*$ 时，$Q(K_i)$ 是执行价格为 K_i 的欧式看跌期权价格；当 $K_i > S^*$ 时，$Q(K_i)$ 是执行价格为 K_i 的欧式看涨期权价格；当 $K_i = S^*$ 时，$Q(K_i)$ 是执行价格为 K_i 的欧式看涨期权和欧式看跌期权价格的平均值。

【例25-4】 考虑一个3个月期限的合约，该合约的持有者需要支付在3个月内股指所实现的

⊖ 见 K. Demeterfi, E. Derman, M. Kamal, and J. Zou, "A Guide to Volatility and Variance Swaps," *The Journal of Derivatives*, 6, 4(Summer 1999), 9-32。关于方差和波动率期权，见 P. Carr and R. Lee, "Realized Volaitility and Variance Options via Swaps," *Risk*, May 2007, 76-83。

方差率，同时收入的方差率为0.045，合约的面值为1亿美元。无风险利率为4%，股指的收益率为1%，股指的当前水平为1 020。假定对应于执行价格800美元、850美元、900美元、950美元、1 000美元、1 050美元、1 100美元、1 150美元、1 200美元的3个月期限的隐含波动率分别为29%、28%、27%、26%、25%、24%、23%、22%和21%。这时，$n=9$，$K_1=800$，$K_2=850$，…，$K_9=1\,200$，$F_0=1\,020e^{(0.04-0.01)\times 0.25}=1\,027.68$，以及$S^*=1\,000$。DerivaGem 给出$Q(K_1)=2.22$，$Q(K_2)=5.22$，$Q(K_3)=11.05$，$Q(K_4)=21.27$，$Q(K_5)=51.21$，$Q(K_6)=38.94$，$Q(K_7)=20.69$，$Q(K_8)=9.44$，$Q(K_9)=3.57$。再有，对于所有的$i$，$\Delta K_i=0.5$，因此

$$\sum_{i}^{n}\frac{\Delta K_i}{K_i^2}e^{rT}Q(K_i)=0.008\,139$$

由式(25-6)和式(25-8)得出

$$\hat{E}(\bar{V})=\frac{2}{0.25}\ln\left(\frac{1\,027.68}{1\,000}\right)-\frac{2}{0.25}\left(\frac{1\,027.68}{1\,000}-1\right)+\frac{2}{0.25}\times 0.008\,139=0.0621$$

由式(25-7)得出，方差互换的价值为(以百万美元计)$100\times(0.062\,1-0.045)e^{-0.04\times 0.25}=1.69$。

25.15.2 波动率互换的定价

为了对波动率互换定价，我们需要计算$\hat{E}(\bar{\sigma})$，其中$\bar{\sigma}$为时间$0\sim T$的波动率平均值。我们有以下方程

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\hat{E}(\bar{V})}\sqrt{1+\frac{\bar{V}-\hat{E}(\bar{V})}{\hat{E}(\bar{V})}}$$

将右端展开，我们得出

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\hat{E}(\bar{V})}\left\{1+\frac{\bar{V}-\hat{E}(\bar{V})}{2\hat{E}(\bar{V})}-\frac{1}{8}\left[\frac{\bar{V}-\hat{E}(\bar{V})}{\hat{E}(\bar{V})}\right]^2\right\}$$

两边取期望值，得出

$$\hat{E}(\bar{\sigma})=\sqrt{\hat{E}(\bar{V})}\left\{1-\frac{1}{8}\left[\frac{\text{var}(\bar{V})}{\hat{E}(\bar{V})^2}\right]\right\} \tag{25-9}$$

其中$\text{var}(\bar{V})$为$\bar{V}$的方差。因此，对于波动率互换定价，我们需要估计在合约期限内平均方差率的方差。对于收入$0\sim T$的已实现波动率，并同时付出波动率σ_K一方而言，合约的价值为

$$L_{\text{vol}}[\hat{E}(\bar{\sigma})-\sigma_K]e^{-rT}$$

这里假定合约双方的面值均为L_{vol}。

【例25-5】 对于例25-4的情形，考虑一个互换协议，在互换中收入实际波动率，付出23%波动率，面值为1亿美元。这时，$\hat{E}(\bar{V})=0.062\,1$。假定3个月的平均方差标准差为0.01，这意味着$\text{var}(\bar{V})=0.000\,1$，式(25-9)给出

$$\hat{E}(\bar{\sigma})=\sqrt{0.062\,1}\left(1-\frac{1}{8}\times\frac{0.000\,1}{0.062\,1^2}\right)=0.248\,4$$

互换的价值为(以百万美元计)

$$100\times(0.248\,4-0.23)e^{-0.04\times 0.25}=1.82$$

25.15.3 VIX 指数

在式(25-6)中，对数函数 ln 可以由其级数展开的前两项来近似

$$\ln\left(\frac{F_0}{S^*}\right) = \left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2$$

这意味着风险中性累积方差的期望可由以下公式计算

$$\hat{E}(\bar{V})T = -\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) \tag{25-10}$$

自 2004 年以来，VIX 波动率指数(见 14.11 节)的计算一直是基于式(25-10)。在任意一天，计算过程是对于市场交易的那些期限刚好大于 30 天和刚好小于 30 天的期权计算相应的$\hat{E}(\bar{V})T$。30 天的风险中性预期累计方差是对以上所计算出的两个数值进行插值而得出，然后将求得数值乘以 365/30，并取根号来最终得出指数的价值。具体计算细节在 www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf 文章中给出。

25.16 静态期权复制

如果我们采用第 18 章中所描述的方式来对冲特种期权，我们会发现有些特种产品比较容易处理，而有些产品，因为不连续的缘故，处理起来非常困难(见业界事例 25-1)。对于这些难以处理的情形，有一种叫做**静态期权复制**(static options replication)方式有时会有用[1]。静态对冲的目的是寻求市场上交易活跃的产品组合来近似地复制特种期权。卖空复制的期权组合将会达到对冲的目的[2]。

业界事例 25-1 对于特种产品进行 Delta 对冲是更加困难还是更加容易

如第 18 章所述，我们可以通过构造 Delta 中性交易，并不断对交易组合进行调整来保证 Delta 中性来对冲特种产品。这样做的同时，我们会发现对有些特种产品的对冲比对简单产品对冲更加容易，而对某些产品的对冲比对简单产品对冲更难。

例如，亚式看涨期权的对冲相对来讲就较为容易，随着时间的改变，我们会观察到越来越多的资产价格，而这些价格用于计算最后的平均值。这意味着随着时间的推移，最终期权收益的不定性会逐渐减小。因此，期权也就会逐渐变得越来越容易被对冲。在期权接近满期的最后几天，因为基础资产价格对期权价格影响越来越小，期权的 Delta 趋近于零。

与以上产生鲜明对照的是障碍式期权。对这种期权进行对冲的难度相对较大。考虑一个欧式看涨-敲出期权，期权标的变量为汇率，当前汇率比障碍水平高 0.0005，在汇率达到障碍水平时，期权价值变为零，当障碍没有达到时，期权的收益也许很好。障碍式期权的 Delta 在障碍值附近不连续，从而导致传统方式的对冲会很困难。

静态对冲的基本原理如下：当两个交易组合在其中边界上价值相同时，那么它们在边界的内部点上价值也相同。考虑一个 9 个月期限的关于某无股息股票的上涨-敲出看涨期权，股票价格为 50 美元，执行价格为 50 美元，障碍水平为 60，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 30%。

---

[1] 见 E. Derman, D. Ergener, and I. Kani, "Static Options Replication," *Journal of Derivatives* 2, 4 (Summer 1995): 78-95。

[2] 作者网页上的技术报告(Technical Note 22)给出了一个静态复制的例子。我们可以证明，一个资产的方差率可以通过交易标的资产的虚值期权来复制，由这一结果我们可以得出用于对冲方差互换的式(24-4)。

假定$f(S, t)$是当股价为S，时间为t时的期权价格。我们可以利用任意(S, t)空间的边界来产生复制交易组合。一种方便的做法如图25-1所示，边界由$S=60$和$t=0.75$定义。上涨-敲出看涨期权在边界值上的价格由以下表达式给出

$$f(S,0.75) = \max(S-50,0), \quad 当 S < 60 时$$

$$f(60,t) = 0, \quad 当 0 \leqslant t \leqslant 0.75 时$$

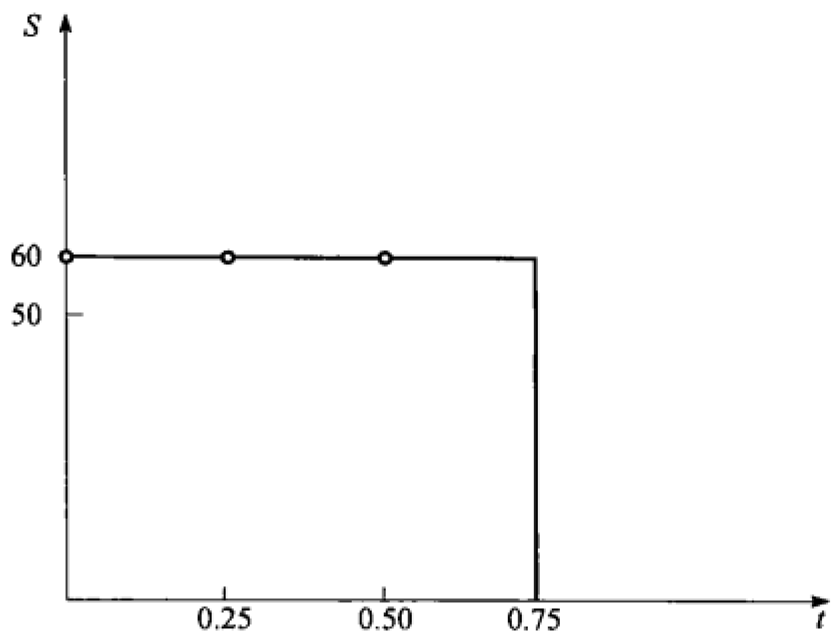


图25-1 用于静态期权复制的边界点

利用普通期权，我们可以有许多方式在边界上近似地匹配期权的价格。在第一个边界上与期权达到匹配的一个产品是执行价格为50，9个月期限的欧式看涨期权。因此，复制组合中的第一个产品就是该期权(我们将该期权记为A)。

一种与$f(60, t)$边界进行匹配的做法如下：

- 首先将期权期限分成N个长度为Δt的区间。
- 选择欧式看涨期权，期权执行价格为60美元，期限为$N\Delta t$(=9个月)来匹配边界点$\{60, (N-1)\Delta t\}$。
- 选择欧式看涨期权，期权执行价格为60美元，期限为$(N-1)\Delta t$来匹配边界点$\{60, (N-2)\Delta t\}$。

注意，我们按顺序选择期权来保证在已经被前面期权所匹配的边界上取值为0[⊖]。执行价格为60，期限为9个月的期权在已经被期权A匹配的竖直边界上的取值为0。在$i\Delta t$到期的期权在边界点$\{60, i\Delta t\}$上的值为0，这些点已经由$(i+1)\Delta t$，$(1 \leqslant i \leqslant N-1)$到期的期权匹配。

假定$\Delta=0.25$。除了期权A，复制组合还包括执行价格为60美元，期限分别为9个月、6个月和3个月的欧式期权。我们将这些期权分别称为B、C和D。在给定的波动率和利率的条件下，期权B在$\{60, 0.5\}$边界点上的价值为4.33，在这一点上期权A的价值为11.54，为了与边界点$\{60, 0.5\}$进行匹配，持有期权B的数量应为$-11.54/4.33=-2.66$。期权C在$\{60, 0.25\}$边界点上的价值为4.33，在这一点上期权A和B的组合的价值为-4.21，为了与边界点$\{60, 0.25\}$进行匹配，持有期权C的数量应为$4.21/4.33=0.97$。类似可以得出，为了与边界点$\{60, 0\}$进行匹配，持有期权D的数量应为0.28。

在表25-1中，我们将复制期权组合进行了总结(见DerivaGem应用工具软件的应用实例F)。复制期权组合的初始值为0.73(即时间为0，股价等于50时)。由本章开始的解析公式得出的价格为0.31。复制期权组合的价格与上涨-敲出期权的价格有很大出入，这是因为复制期权组合的价格只在第二个边界上的3个点与上涨-敲出期权的价格达到匹配。如果采用同样的做法，我们在第二个边界上的18个点(即采用每半个月到期的期权)与上涨-敲出期权的价格达到匹配，复制期权组合的价格为0.38。采用100个点，复制期权组合的价格为0.32。

表25-1 用于复制上涨-敲出欧式期权的欧式期权组合

期权	敲定价格	满期日(年)	头寸	初始价格
A	50	0.75	1.00	+6.99
B	60	0.75	−2.66	−8.21
C	60	0.50	0.97	+1.78
D	60	0.25	0.28	+0.17

为了对冲期权，我们可以卖空满足边界条件的复制期权组合。当达到边界的点时，复制组合中的相应交易必须被平仓。

⊖ 这不是必须条件。如果有K个边界点需要匹配，我们可以选择K个期权并通过对K个线性方程所组成的方程组求解来确定期权的头寸。

与 Delta 对冲相比，该类对冲的好处在于它不需要经常性的调整。静态对冲可应用的范围广泛，在对期权进行复制的过程中，用户可以自由选择匹配价格的边界与期权类型。

小 结

特种期权是指决定收益的规则比标准期权更为复杂的一类期权。我们在本章共讨论了 14 种特种期权：组合期权、非标准美式期权、缺口期权、远期开始期权、棘轮期权、复合期权、选择人期权、障碍式期权、两点式期权、回望期权、喊价式期权、亚式期权、资产交换期权以及涉及多种资产的期权等。利用第 14 章的布莱克-斯科尔斯-默顿公式的假设，我们讨论了如何对于这些特种期权定价。有些特种期权价格有解析式，但解析式的表达式远比一般的看涨或看跌期权表达式复杂；有些特种期权只有近似解析解；而对于一些特种期权，我们只能通过第 20 章中的数值方法进行推广来求其数值解。在第 26 章，我们将进一步讨论关于计算特种期权价格的数值算法。

有些特种期权的对冲要比对一般期权的对冲更为容易，有些会更难。一般来讲，亚式期权的对冲比较容易，这是因为当我们接近到期日时，期权的收益越来越确定。障碍式期权的对冲较为困难，这是因为在障碍附近，Delta 具有不连续性。一种对于特种期权的对冲方式是静态复制，其目的是寻找一个由一般期权所组成的交易组合，这一交易组合在某个边界上与特种期权的价值相同。对于特种期权的对冲可以通过卖空这个交易组合来实现。

推荐阅读

Carr, P., and R. Lee, "Realized Volatility and Variance: Options via Swaps," *Risk*, May 2007, 76–83.

Clewlow, L., and C. Strickland, *Exotic Options: The State of the Art*. London: Thomson Business Press, 1997.

Demeterfi, K., E. Derman, M. Kamal, and J. Zou, "More than You Ever Wanted to Know about Volatility Swaps," *Journal of Derivatives*, 6, 4 (Summer, 1999), 9–32.

Derman, E., D. Ergener, and I. Kani, "Static Options Replication," *Journal of Derivatives*, 2, 4 (Summer 1995): 78–95.

Geske, R., "The Valuation of Compound Options," *Journal of Financial Economics*, 7 (1979): 63–81.

Goldman, B., H. Sosin, and M. A. Gatto, "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High," *Journal of Finance*, 34 (December 1979); 1111–27.

Margrabe, W., "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another," *Journal of Finance*, 33 (March 1978): 177–86.

Milevsky, M. A., and S. E. Posner, "Asian Options: The Sum of Lognormals and the Reciprocal Gamma Distribution," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 3 (September 1998), 409–22.

Ritchken, P. "On Pricing Barrier Options," *Journal of Derivatives*, 3, 2 (Winter 1995): 19–28.

Ritchken P., L. Sankarasubramanian, and A. M. Vijh, "The Valuation of Path Dependent Contracts on the Average," *Management Science*, 39 (1993): 1202–13.

Rubinstein, M., and E. Reiner, "Breaking Down the Barriers," *Risk*, September (1991): 28–35.

Rubinstein, M., "Double Trouble," *Risk*, December/January (1991/1992): 53–56.

Rubinstein, M., "One for Another," *Risk*, July/August (1991): 30–32.

Rubinstein, M., "Options for the Undecided," *Risk*, April (1991): 70–73.

Rubinstein, M., "Pay Now, Choose Later," *Risk*, February (1991): 44–47.

Rubinstein, M., "Somewhere Over the Rainbow," *Risk*, November (1991): 63–66.

Rubinstein, M., "Two in One," *Risk* May (1991): 49.

Rubinstein, M., and E. Reiner, "Unscrambling the Binary Code," *Risk*, October 1991: 75–83.

Stulz, R. M., "Options on the Minimum or Maximum of Two Assets," *Journal of Financial Economics*, 10 (1982): 161–85.

Turnbull, S. M., and L. M. Wakeman, "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (September 1991): 377–89.

练习题

25.1 解释远期开始期权与选择人期权的区别。

25.2 描述具有同样期限的一个回望看涨期权和一个回望看跌期权组合的收益图。

25.3 考虑一个选择人期权，期权持有者有权在2年内任何时刻在欧式看涨期权和欧式看跌期权之间进行选择，无论何时做出选择，看涨期权和看跌期权的到期日和执行价格均相同。在2年到期前做出行使选择会最佳吗？解释原因。

25.4 假设 c_1 和 p_1 分别是执行价格为 K，期限为 T 的欧式平均价格看涨期权和欧式平均价格看跌期权的价格，c_2 和 p_2 分别是期限为 T 的欧式平均执行价格看涨期权和欧式平均执行价格看跌期权的价格，c_3 和 p_3 分别是执行价格为 K，期限为 T 的普通欧式看涨期权和普通欧式看跌期权的价格。证明：$c_1+c_2-c_3=p_1+p_2-p_3$。

25.5 书中给出了将选择人期权分解为一个期限为 T_2 的看涨期权和一个期限为 T_1 的看跌期权的方式。利用另外一个形式来将选择人期权分解为一个期限为 T_1 的看涨期权和一个期限为 T_2 的看跌期权。

25.6 25.8节中给出了两个下跌-敲出看跌期权的公式，第一个公式在障碍值 $H \leqslant K$ 时成立；第二个公式在障碍值 $H \geqslant K$ 时成立。证明当 $H=K$ 时，以上公式等同。

25.7 解释为什么当障碍水平大于执行价格时，敲出-看跌期权的价格为0。

25.8 假定某美式期权的执行价格增长率为 g，标的资产为某不提供任何股息的股票，证明如果 g 小于无风险利率 r，提早行使此美式期权一定不会是最优。

25.9 假定在期权开始时，执行价格高于股票价格10%，如何对这样的远期开始的期权定价。假定标的资产为无股息股票。

25.10 假定股票价格服从几何布朗运动，$A(t)$ 为0时刻到 t 时刻之间的股票价格算术平均值。$A(t)$ 服从什么过程？

25.11 解释为什么对于亚式期权的Delta对冲比一般期权的对冲更为容易？

25.12 计算以下欧式期权的价格，期权持有者有权在1年时以100盎司白银换取1盎司黄金。黄金和白银的当前价格分别为每盎司380美元和4美元，无风险利率为10%，两种商品的波动率均为每年10%，两种商品的相关系数为0.7，在计算中忽略存储费用。

25.13 一个关于某个资产的下跌-敲出期权和关于该资产期货的下跌-敲出期权是否相等？假定期货的到期日等于期权的到期日。

25.14 回答以下有关复合期权的问题：

(a) 欧式看涨-看涨期权与欧式看跌-看涨期权之间的平价关系式是什么？证明书中给出的公式满足平值关系式。

(b) 欧式看涨-看跌期权与欧式看跌-看跌期权之间的平值关系式是什么？证明书中给出的公式满足平值关系式。

25.15 当我们增加观测标的资产最小值的频率时，一个浮动回望期权的价格是增加还是减小？

25.16 当我们增加观测标的资产是否达到障碍水平的频率时，一个下跌-敲出看涨期权的价格是增加还是减小？一个下跌-敲入看涨期权的价格会如何变化？

25.17 解释为什么一个普通欧式看涨期权等于一个下跌-敲出看涨期权与一个下跌-敲入看涨期权的组合。

25.18 当6个月的S&P 500股指高于1 000时，一个衍生产品提供的收益100美元，否则提供收益为0。这里股指当前价格为960，无风险利率为每年8%，股指收益率为每年3%，股指波动率为每年20%，这一衍生产品的价格是多少？

25.19 考虑一个3个月期关于白银期货的下跌-敲出看涨期权，执行价格为每盎司20美元，障碍水平为18美元。当前的期

权价格为19美元，无风险利率为5%，白银价格的波动率为每年40%。解释期权的运作方式，并计算期权价格。具有同样条款的关于白银期货价格的普通看涨期权价格是多少？具有同样条款的关于白银期货价格的下跌-敲入看涨期权价格是多少？

25.20 一个刚刚开始的股指欧式浮动回望期权的期限为9个月。股指的当前水平为400，无风险利率为每年6%，股指股息收益率为每年4%，股指价格波动率为20%，利用DerivaGem计算期权价格。

25.21 估计一个刚刚开始的6个月期限的平均看涨期权价格，标的资产为某无股息股票，股票的初始价格为30美元，执行价格为30美元，无风险利率为5%，股票价格波动率为30%。

25.22 利用DerivaGem计算以下期权的价格

(a) 一个普通欧式期权，标的资产是当前价格为50美元的无股息股票，无风险利率为每年5%，波动率为每年30%，执行价格为50美元，期限为1年。

(b) 一个参数由(a)给出的欧式下跌-敲出看涨期权，障碍水平为45美元。

(c) 一个参数由(a)给出的欧式下跌-敲入看涨期权，障碍水平为45美元。

证明(a)中的欧式期权等于(b)中期权与(c)中期权的和。

25.23 当 $r=q$ 时，解释如何对以下公式进行修正：(a)在25.10节给出的浮动回望看涨期权定价公式；(b)25.12节给出的 M_1 和 M_2 的计算公式。

25.24 对25.15节中的例25-4的方差互换进行定价，假定对应于执行价格800美元、850美元、900美元、950美元、1 000美元、1 050美元、1 100美元、1 150美元、1 200美元的隐含波动率分别为20%、20.5%、21%、21.5%、22%、22.5%、23%、23.5%、24%。

作业题

25.25 当美元/英镑汇率在一年后高于1.5时，衍生产品提供的收益为10 000英镑，否则提供收益为0。当前美元/英镑汇率为1.48，美元和英镑的无风险利率分别为每年4%及每年8%，美元/英镑汇率波动率为每年12%，这一衍生产品价格为多少美元？

25.26 考虑以下上涨-敲出看涨期权：标的资产为无股息，当前价格为50美元的股票，期权执行价格为50美元，波动率为30%，无风险利率为5%，期限为1年，障碍水平为80美元。采用DerivaGem来对这一期权定价并画出以下图形：(a)期权价格与标的资产价格的关系，(b)期权Delta与标的资产价格的关系，(c)期权价格与波动率的关系。对以上结果提供直观解释。说明上涨-敲出看涨期权的Delta、Theta、Vega可正可负。

25.27 DerivaGem应用工具软件的应用实例F考虑了25.15节中的静态复制。这一例子说明了一种通过4个期权来实现(见25.15节)的对冲，以及两种通过16个期权来实现的对冲。

(a) 解释两种通过16个期权来实现的对冲的不同，用直观的方式说明为什么第二种对冲效果更好？

(b) 通过变换第三个和第四个期权的Tmat来改善采用4个期权所实现的对冲效果。

(c) 检验16个期权所组成的期权组合对于Delta、Gamma和Vega匹配的程度。

25.28 考虑一个关于某外汇的下跌-敲出看涨期权。初始汇率为0.90，期限为2年，执行价格为1.00，障碍水平为0.80，

国内无风险利率为5%，外币无风险利率为6%，汇率波动率为每年25%。利用 DerivaGem 来构造一个由5个期权构成的静态复制策略。

25.29 假定股指的当前水平为900，股息收益率为2%，无风险利率为5%，波动率为40%。利用附录中的结果来计算1年期，执行价格为900美元的平均看涨期权价格。为了计算均值，我们在每季度末对资产价格进行观测。将你的结果与 DerivaGem 结果进行比较，DerivaGem 假定一年平均价格的观察频率为连续。直观地解释两个价格的不同。

25.30 利用 DerivaGem 应用工具来比较以下每天的 Delta 对冲效率：(a)表(18-2)和表(18-3)所考虑的期权；(b)具有同样参数的平均价格看涨期权。利用 DerivaGem 应用工具软件的应用实例 C。为了计算平均价格看涨期权，你需要修改计算元 C16 的期权价格，计算元 H15 和 H16 的期权收益，以及 Delta(计算 G46 至 G186 以及 N46 至 N186)。点击功能键 F9 重复20次蒙特卡罗模拟。在每次运算中，记录期权承约费用以及对冲费用、全部20周的交易量、第11周至第20周的交易量。对结果进行评论。

25.31 修改 DerivaGem 应用工具软件的应用实例 D 来检验以下看涨看涨复合期权的 Delta、Gamma 对冲的效率，期权规模为100 000外币单位，汇率为0.67，本国无风险利率为5%，外币无风险利率为6%，汇率波动率为12%，第一个期权期限为20周，执行价格为0.015。第二个期权期限为40周，执行价格为0.68。解释你将如何修改计算表的计算元。评论对冲效率。

25.32 表现证书(outperformance certificate)(有时也被称为短跑证书(sprint certificate)、加速证书(accelerator certificate)或短跑者(speeder))是由欧洲银行向投资者发行的投资于某公司股票的投资方式。最初的投资等于股票价格 S_0。从0时刻到 T 时刻，如果股票价格增加，投资者在 T 时刻收益为 k 乘以股票的增值，其中 k 为大于1的常数。但在 T 时刻股票的增值被限定在一个极限 M 内。如果股票价格下跌，投资者的损失等于股票的跌值。在此证书中，投资者不会收到股息。

(a) 说明表现证书为一个组合期权。

(b) 股票价格等于50欧元，$k=1.5$，$M=70$ 欧元，无风险利率为5%，股票价格波动率为25%，在第2个月、第5个月、第8个月、第11个月股票股息预计为0.5欧元。采用 DerivaGem 计算一年期的表现证书的价格。

25.33 在25.15节里给出的例25-4中，假定互换的期限为1个月而非3个月，对期权进行定价。

25.34 普通看涨期权、二元式看涨期权以及缺口看涨期权之间的关系是什么？

25.35 构造以下形式的棘轮期权的定价公式：数量为 Q 的投资被用来在 n 个时间段末产生收益。在每个时间段的回报等于某个指数的回报(不算股息)与零的最大值。

PDG



第 26 章

再论模型和数值算法

到目前为止，我们在对于期权定价时均采用了资产价格服从几何布朗运动的假设，在此假设下所产生的布莱克-斯科尔斯-默顿公式和数值算法都比较简单。本章我们将引入一些新模型，并将解释如何改变数值算法来处理一些特殊问题。

在第 19 章，我们解释了交易员采用波动率曲面来克服几何布朗运动的不足。在对简单期权定价时，波动率曲面给出了在布莱克-斯科尔斯-默顿模型中应采用的波动率。遗憾的是，对于特种期权，在使用第 25 章的期权公式时，由波动率曲面我们不能求得应该使用的正确的波动率。假定对于 1 年的简单期权，当执行价格为 40 美元时，波动率曲面给出的波动率为 27%，这一波动率却不能用于执行价格等于 40 美元、1 年期的障碍期权(或其他特种期权)。

本章的第一部分讨论了几种模型来取代几何布朗运动，这些模型可用于特种期权的定价，并同时保证与简单期权价格的一致性。这些替代模型中资产价格所服从的过程对于简单期权的匹配比几何布朗运动更好。因此，我们将这些模型用于特种产品时会更有信心。

本章的第二部分，我们进一步讨论数值方法。我们将解释如何应用树形结构对**可转换债券**(convertible bond)以及其他**依赖路径期权**(path-dependent option)定价，并讨论对障碍式期权定价时存在的特殊问题以及解决方法。在最后，我们简要介绍如何建立关于两个相关变量的树形结构以及如何将蒙特卡罗模拟法用于具有提前行使权利的衍生产品定价。

在以前的章节中，我们讨论了以收益率为 q 的证券作为标的资产的衍生产品的定价。对于股指期权，q 应等于股指的收益率；对于汇率期权，q 应等于外币的无风险利率；对于期货期权，q 应等于无风险利率。

26.1 布莱克-斯科尔斯-默顿的替代模型

布莱克-斯科尔斯-默顿模型假设资产变化为连续，以及资产价格在将来的分布为对数正态分布。对于资产价格的变化，我们可以做其他假设。一种可能是仍假设资产变化为连续，但过程并非是几何布朗运动。另外一种假设是在资产连续变化的前提下附加跳跃性。还有一种假设是所有资产的价格变化均为跳跃形式。本节我们将讨论这三种假设。股票价格变化为连续的模型被称为**扩散模型**(diffusion model)；股票价格变化为连续但同时具有跳跃的模型被称为**跳跃-扩散混合模型**(mixed jump-diffusion model)；所有股票变化均为跳跃的模型被称为**纯跳跃模型**(pure jump model)。以上这些模型被统称为 **Levy 过程**(Levy process)[⊖]。

⊖ 大体讲，Levy 过程为具有稳态独立增加量的连续时间随机过程。

26.1.1 常方差弹性模型

一种关于布莱克-斯科尔斯-默顿模型的替代形式为**常方差弹性模型**(constant elasticity of variance, CEV)。该模型是关于股票价格 S 的一种特殊的扩散模型，表达式为

$$dS = (r-q)S dt + \sigma S^{\alpha} dz$$

式中 r 为无风险利率，dz 为一个维纳过程，σ 为波动率，α 为一个正常数[⊖]。

当 $\alpha=1$ 时，CEV 模型就是我们已经讨论过的几何布朗运动；当 $\alpha<1$ 时，波动率随股票价格的下降而增大，由此产生的资产价格概率分布与观察到的具有**左端肥尾**(heavy left tail)和**右端瘦尾**(less heavy right tail)的股票价格分布较为相似(见图 19-4)[⊜]；当 $\alpha>1$ 时，波动率随股票价格的增大而增大，由此产生的资产价格概率分布具有右端肥尾和左端瘦尾的特性，这对应于有时在期货期权中会观察到的隐含波动率为执行价格递增函数的波动率微笑(见作业题 17.23)。

在 CEV 模型下，欧式看涨和看跌期权的定价公式为，当 $0<\alpha<1$ 时，

$$c = S_0 e^{-qT}[1-\chi^2(a,b+2,c)] - Ke^{-rT}\chi^2(c,b,a)$$

$$p = Ke^{-rT}[1-\chi^2(c,b,a)] - S_0 e^{-qT}\chi^2(a,b+2,c)$$

当 $\alpha>1$ 时，

$$c = S_0 e^{-qT}[1-\chi^2(c,-b,a)] - Ke^{-rT}\chi^2(a,2-b,c)$$

$$p = Ke^{-rT}[1-\chi^2(a,2-b,c)] - S_0 e^{-qT}\chi^2(c,-b,a)$$

式中

$$a = \frac{[Ke^{-(r-q)T}]^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 v}, \qquad b = \frac{1}{1-\alpha}, \qquad c = \frac{S_0^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 v}$$

$$v = \frac{\sigma^2}{2(r-q)(\alpha-1)}[e^{2(r-q)(\alpha-1)T}-1]$$

$\chi^2(z, k, v)$代表非中心参数为 k，自由度为 v 的非中心χ^2 分布的累计分布。在作者的网页(www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes)上有关于计算$\chi^2(z, k, v)$的数值方法介绍(见 Technical Note 12)。

CEV 模型尤其适用于计算特殊股票期权。我们可以通过匹配简单模型价格的形式来选取参数，其实际操作可以通过对模型价格和实际价格差的二次方来求极小化。

26.1.2 默顿跳跃-扩散混合模型

默顿提出了一种跳跃-扩散混合模型[⊜]，定义：

λ——股票价格每年的平均跳跃次数；

k——平均跳跃幅度占股票价格的百分比。

跳跃幅度百分比是由模型中概率分布抽样得出。

在时间 Δt 内，一次跳跃发生的概率为 $\lambda\Delta t$，因此由跳跃而触发的平均增长率为 λk。在风险中性世界里，标的资产服从的过程为

⊖ 见 J. C. Cox and S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976): 145-66。

⊜ 原因如下：当股票价格下跌时，波动率的上升会使得股票低价位出现的可能性增大；当股票价格上涨时，波动率的下跌会使得股票高价位出现的可能性减小。

⊜ 见 R. C. Merton, "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976): 125-44。

$$\frac{dS}{S}=(r-q-\lambda k)dt+\sigma dz+dp$$

式中 dz 为维纳过程，dp 为泊松过程（Poission process），σ 为几何布朗运动中的波动率。假定 dz 和 dp 相互独立。

默顿模型的一个重要特例是当跳跃幅度百分比的对数服从正态分布的情形。假定正态分布的标准差为 s，默顿证明了欧式期权价格可以写成

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!}f_n$$

其中 $\lambda'=\lambda(1+k)$，变量 f_n 为股息率为 q，方差率为

$$\sigma^2+\frac{ns^2}{T}$$

无风险利率为

$$r-\lambda k+\frac{n\gamma}{T}$$

的布莱克-斯科尔斯-默顿期权价格，其中 $\gamma=\ln(1+k)$。

同布莱克-斯科尔斯-默顿模型相比，这一模型给出的分布的左右端都较为肥大，因此我们可以利用这一模型来对货币期权定价。类似于 CEV 模型，模型参数的选择是通过对模型价格与市场价格差的平方求极小值来确定的。

通过模特卡罗模拟，我们可以实现像默顿模型这样涉及跳跃的模型。当跳跃由泊松过程所生成时，在时间 t 正好有 m 个跳跃的概率是

$$\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

其中 λ 是一年中的平均跳跃次数，或者说 λt 是在时间 t 内的平均跳跃次数。

假设每年平均发生 0.5 次跳跃。在两年中有 m 个跳跃的概率等于[⊖]

$$\frac{e^{-0.5\times 2}(0.5\times 2)^m}{m!}=0.3679$$

表 26-1 给出了在两年内跳跃次数为 0，1，2，3，4，5，6，7 和 8 的概率及累计概率（像该表中这样的数字可以通过 Excel 中的 POISSON 函数来得到）。

为了模拟两年内的跳跃过程，在每次模拟实验中都需要确定

- 跳跃的次数
- 跳跃的幅度

表 26-1 2 年内跳跃次数的概率

跳跃次数 m	跳跃概率	累计概率
0	0.3679	0.3679
1	0.3679	0.7358
2	0.1839	0.9197
3	0.0613	0.9810
4	0.0153	0.9963
5	0.0031	0.9994
6	0.0005	0.9999
7	0.0001	1.0000
8	0.0000	1.0000

为了确定跳跃的次数，每次模拟实验中我们首先取一个 0 和 1 之间的随机数，然后利用表 26-1。如果随机数是在 0 和 0.3679 之间，没有跳跃发生；如果随机数是在 0.3679 和 0.7358 之间，有 1 次跳跃发生；如果随机数是在 0.7358 和 0.9197 之间，有 2 次跳跃发生；等等。为了确定跳跃的幅度，在每次模拟跳跃时，我们都需要从跳跃幅度的分布中提取一个样本。一旦确定了跳跃次数和跳跃幅度，我们就可以得到本次实验中变量的模拟值。

在默顿的混合跳跃-扩散模型中，跳跃是叠加在对股票价格通常所假设的对数正态扩散过程上的。这时过程有两个部分（通常的扩散部分与跳跃部

⊖ 在这一情形中，$m=1$。——译者注

分)，对每部分都要单独取样。对扩散部分可以按照 20.6 节和 20.7 节所描述的方式取样，而跳跃部分可以按刚才描述的方式取样。对衍生产品定价时，我们必须使资产的总回报率(来自两部分)等于无风险利率。这说明在默顿模型中，扩散部分的漂移项等于 $r-q-\lambda k$。

26.1.3 方差-Gamma 模型

方差-Gamma 模型(variance-gamma model)是非常流行的纯跳跃模型的一个特例㊀。对于这一模型，我们首先定义 g 为服从均值率为 1.0，方差率为 v 的 Gamma 过程的变量在时间 T 内的变化。Gamma 过程是一种纯跳跃过程，其中小的跳跃经常发生，但大的跳跃只是偶尔发生。g 的概率分布密度函数为

$$\frac{g^{T/v-1}e^{-g/v}}{v^{T/v}\Gamma(T/v)}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 代表 Gamma 函数。这一函数可以通过 Excel 的 GAMMADIST(· , · , · , ·)函数来计算，函数的第一个变量为 g，第二个变量为 T/v，第三个变量为 v，第四个变量为 TRUE 或者为 FALSE，其中变量等于 TRUE 的情形给出累积概率函数，FALSE 给出概率密度函数。

像通常那样，定义 S_T 为资产在 T 时刻的价格，S_0 为资产的当前价格，r 为无风险利率，q 为股息收益率。在风险中性世界里，假定方差-Gamma 模型时，$\ln S_T$ 在条件 g 下服从正态分布，条件期望值为

$$\ln S_0 + (r-q)T + \omega + \theta g$$

条件标准差为

$$\sigma\sqrt{g}$$

其中

$$\omega = \frac{T}{v}\ln(1-\theta v-\sigma^2 v/2)$$

在方差-Gamma 模型中共有 3 个参数，即 v、σ 和 θ㊁，参数 v 为 Gamma 过程的方差率，σ 为波动率，θ 定义了偏态(skewness)。当 $\theta=0$ 时，$\ln S_T$ 为对称；当 $\theta<0$ 时，$\ln S_T$ 为负偏态(类似股价情形)；当 $\theta>0$ 时，$\ln S_T$ 为正偏态。

假定标的资产服从方差-Gamma 模型，我们想利用 Excel 来抽取 0 ~ T 的资产变化的 10 000 个随机样本。作为初始设定，我们分别设定计算表的元素 E1、E2、E3、E4、E5、E6 和 E7 为 T、v、θ、σ、r、q 和 S_0，元素 E8 为 ω，其值为

= $E$1 * LN(1 -$E$3 * $E$2 -$E$4 * $E$4 * $E$2/2)/$E$2

之后的计算过程为：

- 利用 GAMMAINV 函数来对 g 进行抽样。我们设定计算元 A1、A2、…、A10 000 为

  = GAMMAINV(RAND( ),$E$1/$E$2,$E$2)

- 对于每一个 g，我们在期望值为 θg，标准差为 $\sigma\sqrt{g}$ 的正态分布中抽取一个样本，这可以将 B1 设定为

  = A1 * $E$3 + SQRT(A1) * $E$4 * NORMSINV(RAND( ))

  在计算元 B2，B3，…，B10 000 进行类似运算。

- 股票价格 S_T 由以下表达式给定

㊀ 见 D. B. Madan, P. P. Carr, and E. C. Chang, "The Variance-Gamma Process and Option Pricing," *European Finance Review*, 2(1998): 79-105。

㊁ 从现实世界变化到风险中性世界时，并非所有的参数都发生变化。纯扩散模型中的波动率即为一个实例。

$$S_T = S_0\exp[(r-q)T+\omega+z]$$

定义计算元 C1 为

= $E$7 * EXP(($E$5 -$E$6) * $E$1 + B1 +$E$8)

在计算元 C2，C3，…，C10 000 时进行类似运算，计算元 C1，C2，…，C10 000 的结果即为 S_T 的样本值。

当 $S_0=100$，$T=0.5$，$v=0.5$，$\theta=0.1$，$\sigma=0.2$ 和 $r=q=0$ 时，图 26-1 展示了 S_T 在方差-Gamma 假设的概率分布。作为对照，我们同时也画出了波动率 $\sigma=0.2$（即 20%）几何布朗运动的概率分布图。虽然图 26-1 显示的不是非常清楚，但我们仍大约可以看出方差-Gamma 模型的尾部比对数正态分布要肥大。

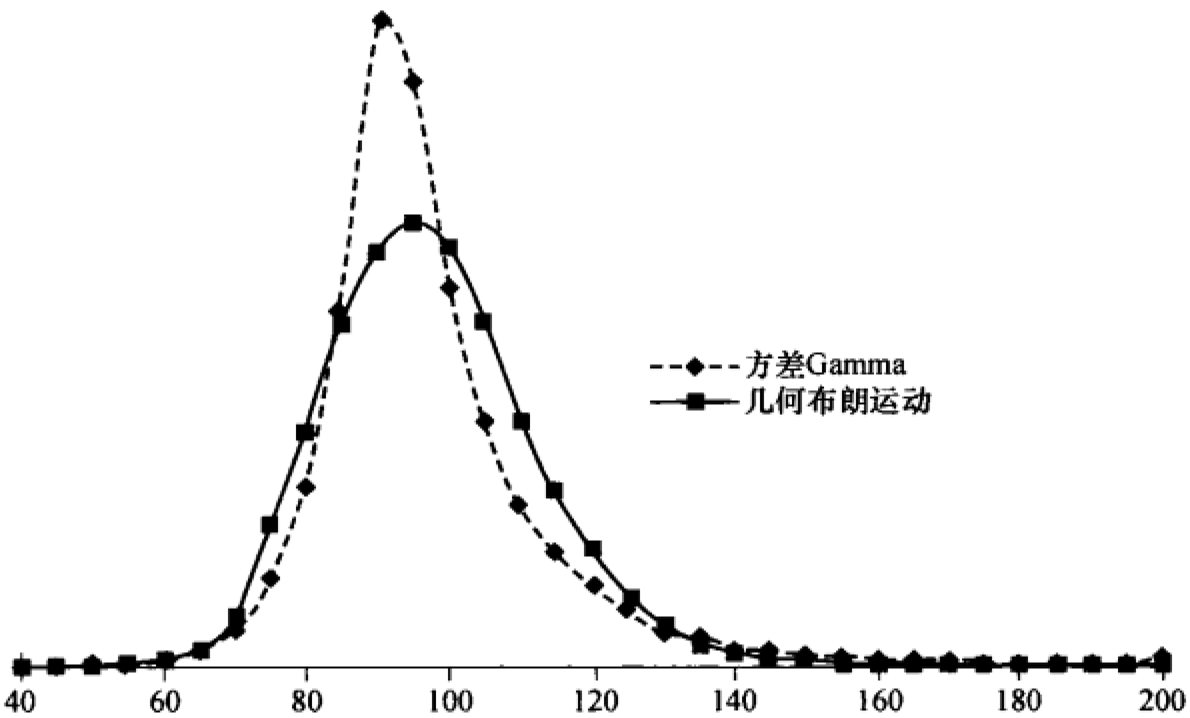


图 26-1　方差-Gamma 过程和几何布朗运动所产生概率分布

一种描述方差-Gamma 分布的方式是将 g 视为在时间 T 内信息到达的速度。如果 g 很大，信息到达量也很多，以上计算过程第二步的正态分布的均值和方差也较大；如果 g 很小，信息到达量也很少，以上计算过程的第二步的正态分布的均值和方差也较小。参数 T 为通常的时间测度，g 有时被视为度量经济时间（economic time）或者经时间调解后信息量（time adjusted for flow of information）的参数。

Madan 等人（1998）提供了欧式期权的半解析（semi-analytic）公式。方差-Gamma 分布往往会产生 U 字形波动率微笑，这一波动率微笑不一定为对称。对于短期产品，波动率微笑十分明显；对于长期产品，波动率微笑逐渐消失。方差-Gamma 模型价格与股权和简单货币期权产品价格可以取得一致。

26.2　随机波动率模型

布莱克-斯科尔斯-默顿模型假定波动率为常数。在实际中，如在第 22 章讨论的那样，波动率随时间变化。方差-Gamma 模型波动率通过参数 g 反映了这种性质，低参数 g 代表信息到达的速度较慢，波动率也较低；高参数 g 代表信息到达的速度较快，波动率也较高。

与方差-Gamma 模型不同的另一种选择是明确假定波动率变量所遵循的过程。我们首先假设描述标的变量的几何布朗运动中的波动率为时间的函数。因此，在风险中性世界里，标的资产价格服从

$$dS=(r-q)Sdt+\sigma(t)Sdz \tag{26-1}$$

这时布莱克-斯科尔斯-默顿公式的方差率应改为期权期限内方差率的平均值(见练习题26.6)，其中方差率等于波动率的平方。假定在1年内，在前6个月股票波动率为20%，在后6个月波动率为30%，平均方差率为

$$0.5\times0.20^2+0.5\times0.30^2=0.065$$

在布莱克-斯科尔斯-默顿公式中，我们采用的方差率应等于0.065，相应的波动率为 $\sqrt{0.065}=0.255$，即25.5%。

式(26-1)假定了资产的瞬时波动率完全可以预测，而实际中的波动率变化过程是随机的，这一现象导致了涉及两个随机变量的，一种更为复杂的模型，即股票价格和其波动率均为随机的模型。

研究人员使用了以下模型

$$\frac{dS}{S}=(r-q)dt+\sqrt{V}dz_S \tag{26-2}$$

$$dV=a(V_L-V)dt+\xi V^{\alpha}dz_V \tag{26-3}$$

式中 a，V_L，ξ 和 α 均为常数，dz_S 和 dz_V 为维纳过程，V 为资产的方差率，这里的方差率以速度 a 被拉回到水平 V_L。

Hull 和 White 证明了当波动率为随机，但与资产价格无关时，欧式期权的价格等于布莱克-斯科尔斯-默顿价格在期权期限内在平均方差率分布上的积分㊀，欧式看涨期权的价格为

$$\int_0^{\infty}c(\bar{V})g(\bar{V})d\bar{V}$$

式中 $\bar{V}$ 为方差率的平均值；c 是以 $\bar{V}$ 为变量的布莱克-斯科尔斯-默顿价格，g 为 $\bar{V}$ 在风险中性世界里的概率密度函数。这一结果说明，在平值期权或接近平值期权的情形下，布莱克-斯科尔斯-默顿价格高估了期权价格；在深度虚值或实值期权情形下，布莱克-斯科尔斯-默顿价格低估了期权价格。这一结果与我们所观察到的货币期权隐含波动率的结构一致(见19.2节)。

当标的资产价格与波动率相关时，这时情况就更加复杂。我们只有通过蒙特卡罗模拟来求取期权价格。在 $\alpha=0.5$ 的特殊情形，Hull 和 White 给出了级数近似，Heston 给出了一个解析结果㊁。当标的资产价格与波动率具有负的相关性时，我们计算出的隐含波动率与由股票市场观察的结果相似(见19.3节)㊂。

在第22章，我们曾经讨论过指数加权移动平均(EWMA)和 GARCH(1，1)模型，这些模型可以替代随机波动率模型。Duan 证明了以 GARCH(1，1)为基础，我们可以得出一个内在一致的期权定价模型㊃(关于 GARCH(1，1)与随机波动率的等价性，见练习题22.14)。

在应用随机波动率模型时，我们首先应保证由随机波动率模型得出的简单期权价格与市场价格一致，然后我们可以将随机波动率模型应用于特种期权㊄。当期权期限小于1年时，从绝对意义上看，随机波动率对于期权价格的影响很小(对于深度虚值期权，期权价格的百分比变化可能很大)；当期权期限增大时，其影响也逐渐增大。随机波动率对于期权 Delta 对冲参数的影响较

㊀ 见 J. C. Hull and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42(June 1987): 281-300，这一结果与方差率所遵循的过程无关。

㊁ 见 J. C. Hull and A. White, "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility," *Advances in Futures and Options Research*, 3(1988): 27-61; S. L. Heston, "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options," *Review of Financial Studies*, 6, 2(1993): 327-43。

㊂ 见第26.1节的第三个页下注。

㊃ 见 J.-C. Duan, "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, vol. 5(1995), 13-32; 及 J.-C. Duan, "Cracking the Smile," *RISK*, vol. 9(December 1996), 55-59。

㊄ 关于模型应用特例，见 J. C. Hull and W. Suo, "A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 2(June 2002): 297-318。

大，市场上的交易员已经认识到这一点，如第 18 章中所述，这些交易员通过计算 Vega 来检测自身对于波动率变化的风险暴露。

26.3 IVF 模型

到目前为止，在所讨论的模型中，我们可以选取参数以使得在任意一天模型价格均与简单期权价格比较接近。金融机构有时想进一步使模型价格与简单产品价格达到完全一致[一]。在 1994 年，Derman 和 Kani，Dupire 以及 Rubinstein 提出了这样的模型[二]，这类模型在后来被称为**隐含波动率函数**(implied volatility functional，IVF)模型，或**隐含树形**(implied tree)模型。不管波动率曲面的形状如何，这一模型均可以与任意一天所观察到的欧式期权价格达到完全的匹配。

在风险中性世界里，模型中的资产价格服从以下随机过程

$$dS = [r(t) - q(t)]Sdt + \sigma(S,t)Sdz$$

式中 $r(t)$ 为在 t 时刻到期的瞬时远期利率，$q(t)$ 为依赖于时间的股息收益率，波动率 $\sigma(S,\ t)$ 为 S 和 t 的函数，其选择是保证模型价格与所有在市场上观察到的欧式期权价格一致。Dupire、Andersen 和 Brotherton-Ratcliffe 均证明了 $\sigma(S,\ t)$ 可由以下解析公式来计算[三]

$$[\sigma(K,T)]^2 = 2\frac{\partial c_{mkt}/\partial T + q(T)c_{mkt} + K[r(T) - q(T)]\partial c_{mkt}/\partial K}{K^2(\partial^2 c_{mkt}/\partial K^2)} \tag{26-4}$$

式中 $c_{mkt}(K,\ T)$ 是执行价格为 K，期限为 T 的欧式期权市场价格。当市场上存在足够多的欧式看涨期权时，这一方程可用来估计函数 $\sigma(S,\ t)$[四]。

与隐式差分法结合，Andersen 和 Brotherton-Ratcliffe 采用式(26-4)而实施了这个模型。Derman 和 Kani、Rubinstein 通过构造标的资产树形结构给出了另一种方法，这里的树形结构与市场上简单期权的价格一致。

在实际应用过程中，我们需要每天对 IVF 模型进行校正以确保模型价格与简单期权价格的一致性，这种模型成为能与简单期权价格保持一致并能为特种期权定价的工具。在第 19 章的讨论中我们曾指出简单期权定义了资产价格在将来时间的概率分布。通过校正过程，IVF 模型所给出的资产价格在所有将来时间的概率分布与市场一致。这意味着，如果期权的收益对应于某一给定时刻，例如，全部或空手(all-or-nothing)抑或资产或空手(asset-or-nothing)，IVF 模型给出的价格一定为正确价格。但是，模型给出的资产在两个时间或多个时间的联合分布下不一定正确，这意味着，模型给出的复合期权和障碍期权的价格不一定正确[五]。

26.4 可转换债券

我们现在将讨论如何修改第 20 章中提出的数值方法来处理一些特殊定价问题，我们首先考虑**可转换债券**(convertible bond)定价问题。

可转换债券是由公司发行的债券，债券持有者在将来某些时刻有权将债券转换为公司的股

[一] 这么做有一个实际原因。如果银行采用的模型不具备这一特性，银行的交易员可能会对银行的内部模型进行套利。

[二] 见 B. Dupire，"Pricing with a Smile,"*Risk*，February(1994)：18-20；E. Derman and I. Kani，"Riding on a Smile,"*Risk*，February(1994)：32-39；M. Rubinstein，"Implied Binomial Trees"*Journal of Finance*，49，3(July 1994)，771-818。

[三] 见 B. Dupire，"Pricing with a Smile,"*Risk*，February(1994)：18-20；L. B. G. Andersen and R. Brotherton-Ratcliffe"The Equity Option Volatility Smile：An Implicit Finite Difference Approach,"*Journal of Computation Finance* 1，No. 2(Winter 1997/98)：5-37。Dupire 考虑了 r 和 q 等于 0 的情形；Andersen 和 Brotherton-Ratcliffe 考虑了更一般的情形。

[四] 这里有必要对观察到的波动率曲面进行光滑处理。

[五] Hull 和 Suo 假定所有衍生产品价格均由随机波动率模型来确定，并由此检验了 IVF 模型。他们发现对于复合期权，模型表现不错，但对于障碍期权，模型可能会产生很大的误差。见 J. C. Hull and W. Suo，"A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model,"*Journal of Financial and Quantitative Analysis*，37，2(June 2002)：297-318。

票，**转换率**(conversion ratio)是一个单位债券可以转换的股票数量(该比率可能是时间的函数)。这种债券几乎总可以被赎回(callable)，即债券发行者有权按预先指定的价格在某些时间将债券赎回。在债券被赎回时，债券持有者有权将债券转换为股票，这也是债券发行方强迫债券持有方提前将债券转换的一种方式，有时债券发行方的赎回看涨期权只有当股票价格在一定水平上才会生效。

在对可转换债券定价时，信用风险起着非常重要的作用。忽略信用风险会高估券息和本金的价值，计算出的债券价格会不准确。Ingersoll 提出了一个类似 23.6 节中所讨论的默顿(1974)模型来对可转换债券定价的方法[⊖]。在模型中，Ingersoll 假定债券发行方的资产服从几何布朗运动，并以此来建立股权价格、可转换债券以及其他与资产价格相关的债权的模型。模型假设只有当资产价值超出负债价值时，债权拥有者才能得到全部付款，因此信用风险以这种方式被考虑在内。

在实际中，一个被广泛应用的简单模型是直接模拟债券发行方的股票价格，在这一模型中，股票价格被假设为服从几何布朗运动，与一般几何布朗运动不同之处是在每个小的时间区间 Δt 内，公司有 $\lambda\Delta t$ 的概率会违约。公司违约时，股价会变为 0，但债券会有一定的回收率。参数 λ 为在 23.2 节中所讨论的风险中性违约密度。

股票价格所服从的过程可以通过修改一般的二叉树来表达，在每个节点上我们有：

- 在每个时间 Δt 后，价格按比率 u 上涨的概率为 p_u。
- 在每个时间 Δt 后，价格按比率 d 下降的概率为 p_d。
- 在每个时间 Δt 后，公司违约(即股票价格变为 0)的概率为 $\lambda\Delta t$，更准确地讲，这一违约概率为 $1-e^{-\lambda\Delta t}$。

以下参数保证了树形价格变化的前两阶矩与股票价格分布一致

$$p_u=\frac{a-de^{-\lambda\Delta t}}{u-d},\qquad p_d=\frac{ue^{-\lambda\Delta t}-a}{u-d},\qquad u=e^{\sqrt{(\sigma^2-\lambda)\Delta t}},\qquad d=\frac{1}{u}$$

式中 $a=e^{(r-q)\Delta t}$，r 为无风险利率，q 为股票的收益率。

树形的期限被设定为可转换债券的期限，在树形的后端，债券价格依赖于那时债券所有人持有的转换期权，然后我们在树形结构上倒推计算。在每个可以进行债券转换的节点上，我们均要检验转换是否为最优。同时，在可允许将债券赎回的节点我们还要检验债券发行方是否会将债券赎回，这时我们还要检验债券转换是否为最优。这些决策定价使得在节点上，债券价格为

$$\max[\min(Q_1,Q_2),Q_3]$$

式中 Q_1 为倒推过程中所产生的价格(假定债券还没被转换，也没被赎回)，Q_2 为可赎回价格，Q_3 为转换价格。

【例 26-1】 考虑一个由 XYZ 公司发行的只有 9 个月期限，面值为 100 美元的零息债券。假定在 9 个月内，债券持有者可将债券转换为两只 XYZ 的股票，而且该债券可以在 9 个月内的任意时刻以 113 美元的价格被赎回。股票的最初价格为 50 美元，波动率为每年 30%，股票不支付股息，公司的违约密度为每年 1%，对应于所有期限的无风险利率均为 5%。假定在违约发生时，债券价值为 40 美元(按通常定义，回收率为 40%)。

图 26-2 显示了股票的树形结构，该树形共有 3 步，它可用于这一可转换债券的定价。每个节点上方的数值为股票价格，下方数值为可转换债券的价格。树形结构的三个参数为

$$u=e^{\sqrt{(0.09-0.01)\times0.25}}=1.1519,d=1/u=0.8681$$
$$a=e^{0.05\times0.25}=1.0126,p_u=0.5167,p_d=0.4808$$

⊖ 见 J. E. Ingersoll, "A Contingent Claims Valuation of Convertible Securities," *Journal of Financial Economics*, 4, (May 1977), 289-322。

公司违约(即转换到最低节点)的概率为 $1-e^{-0.01\times0.25}=0.002\,497$。在3个违约节点上，股票价格为0，债券价格为40。

我们首先考虑树形的最终节点。在节点G和H上，债券将被转换，转换后的价格是股票价格的2倍；在节点I和J上，债券将不会被转换，其价格为100。

在树形结构上倒推计算，我们可以得出在前面树形节点上债券的价格。例如，考虑节点E，如果债券被转换，其价格为 $2\times50=100$ 美元；如果债券不被转换，这时会有：(a)0.516 7的概率转移到节点H，其中债券的价格为115.19美元；(b)0.480 8的概率转移到节点I，其中债券的价格为100美元；(c)0.002 497的概率公司会违约，其中债券的价格为40美元。因此，当债券不被转换时，其价格为

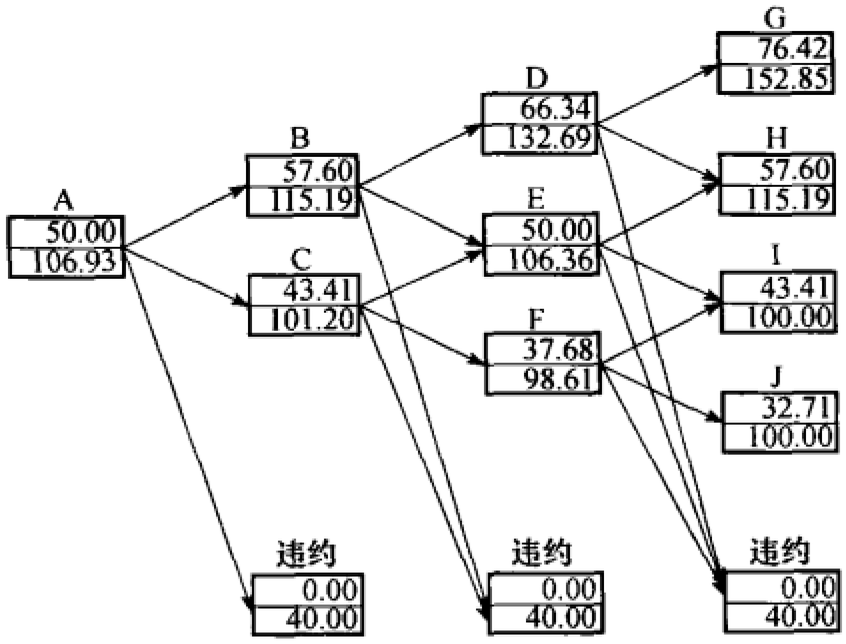


图26-2　用于给可转换债券定价的树形

注：节点上方数值为股票价格；下方数值为可转换债券价格。

$$(0.516\,7\times115.19+0.480\,8\times100+0.002\,497\times40)\times e^{-0.05\times0.25}=106.36\text{ 美元}$$

这一价格比转换价格100美元要高，因此在节点E，我们将不会转换证券。最后，因为赎回价格113美元高于106.36美元，在节点E上债券发行方不会将债券赎回。

考虑另一个节点*B*，如果债券被转换，其价格为 $2\times57.597=115.19$ 美元；如果债券不被转换，采用类似节点*E*上的计算可以得出债券价格为118.31美元，债券持有者不会将债券进行转换，但这时债券发行方会以113美元的价格将债券赎回，这时债券持有者将债券转换所取得的收益会比债券被赎回所取得收益好，因此债券持有者会将债券转换。在*B*点的债券价格为115.19美元。采用类似的做法可以得出债券在节点*D*的价格。在没有转换时，债券价格为132.79美元。但是，如果债券被赎回会导致强行转换，在这一节点债券价格会减至为132.69美元。

可转换证券的价格等于在节点*A*上的价格，即106.93美元。

当债券支付券息时，在计算中必须将其考虑在内。在每个节点上，在债券不被转换的前提下，将来时刻债券所支付任何券息的贴现值都应当被考虑在内。风险中性违约密度 λ 可以通过债券价格或违约互换的溢价来估计。在更一般的实施过程中，λ、σ 和 r 均可为时间的函数。这时，我们可以通过三叉树而不是二叉树来计算(见20.4节)。

我们这里讨论模型的缺点是违约概率与股票价格无关，这一观点促使一些研究人员建议利用一些隐式差分方法来实施这种模型，其中违约密度可以是股票和时间的函数[⊖]。

26.5　依赖路径衍生产品

一个**依赖路径衍生产品**(path-dependent derivative)(也被称为**依赖历史衍生产品**(history-dependent derivative))是指收益与标的资产的路径有关，而不仅仅只与标的资产的最终价格有关的衍生产品。**亚式期权**(Asian option)和**回望期权**(lookback option)是依赖路径衍生产品的例子。如第25章所示，亚式期权的收益与标的资产价格的平均值有关；回望期权的收益与资产价格在路径上取得的最大值或最小值有关。当不存在解析解时，一种对依赖路径衍生产品定价的方法是在

⊖ 见L. Andersen and D. Buffum, "Calibration and Implementation of Convertible Bond Models," *Journal of Computational Finance*, 7, 1(Winter 2003/04), 1-34。这些作者假设违约密度函数与 S^{α} 成反比，其中 S 为股票价格，α 为一个正常数。

第 20 章中讨论过的蒙特卡罗模拟法。在蒙特卡罗模拟法中，我们首先计算标的资产变量在风险中性时间所遵循的路径，然后计算期权收益，并以无风险利率对收益进行贴现，由此我们得出一个样本。这样我们可以产生许许多多的样本，而样本的均值即为衍生产品价格的近似值。

如果想达到一定的精度，蒙特卡罗模拟法的运算时间可能会很长，这是蒙特卡罗模拟法最大的问题。再有，我们很难将蒙特卡罗法用于美式期权(即衍生产品的收益依赖路径，同时期权的持有方有权提前行使期权)。本节我们将说明如何拓展在第 20 章所讨论的二叉树法来对依赖路径衍生产品定价[⊖]。这里的方法可以用来处理依赖路径美式期权定价。对于依赖路径欧式衍生产品，这一方法比蒙特卡罗法更加有效。

为了保证这一方法可以运作，以下两个条件必须成立：

- *衍生产品收益只与标的变量路径的一个函数 F 有关。*
- *F 在时刻 $t+\tau$ 的取值可以由 F 在时刻 t 的取值及标的变量在 $t+\tau$ 的取值来计算。*

26.5.1　回望期权例解

为了说明算法，我们首先考虑关于无股息股票的美式浮动回望期权[⊜]。如果期权在时刻 τ 被行使，期权收益等于 0 与 τ 之间股票的最大值与股票当前值的差。我们假定股票的初始价格为 50 美元，股票价格的波动率为每年 40%，无风险利率为每年 10%，期权的期限为 3 个月，股票价格的变动由一个三步二叉树来表达。采用通常的符号，这意味着，$S_0=50$，$\sigma=0.4$，$r=0.10$，$\Delta t=0.08333$，$u=1.1224$，$d=0.8909$，$a=1.0084$，以及 $p=0.5073$。

图 26-3 展示了树形结构。节点上方的数值为股票价格；下一层的数值为股票价格在到达该节点可能路径上的最大值；最下层的数值为衍生产品的价格。对应每个可能的最大值，均会有一个衍生产品价格。

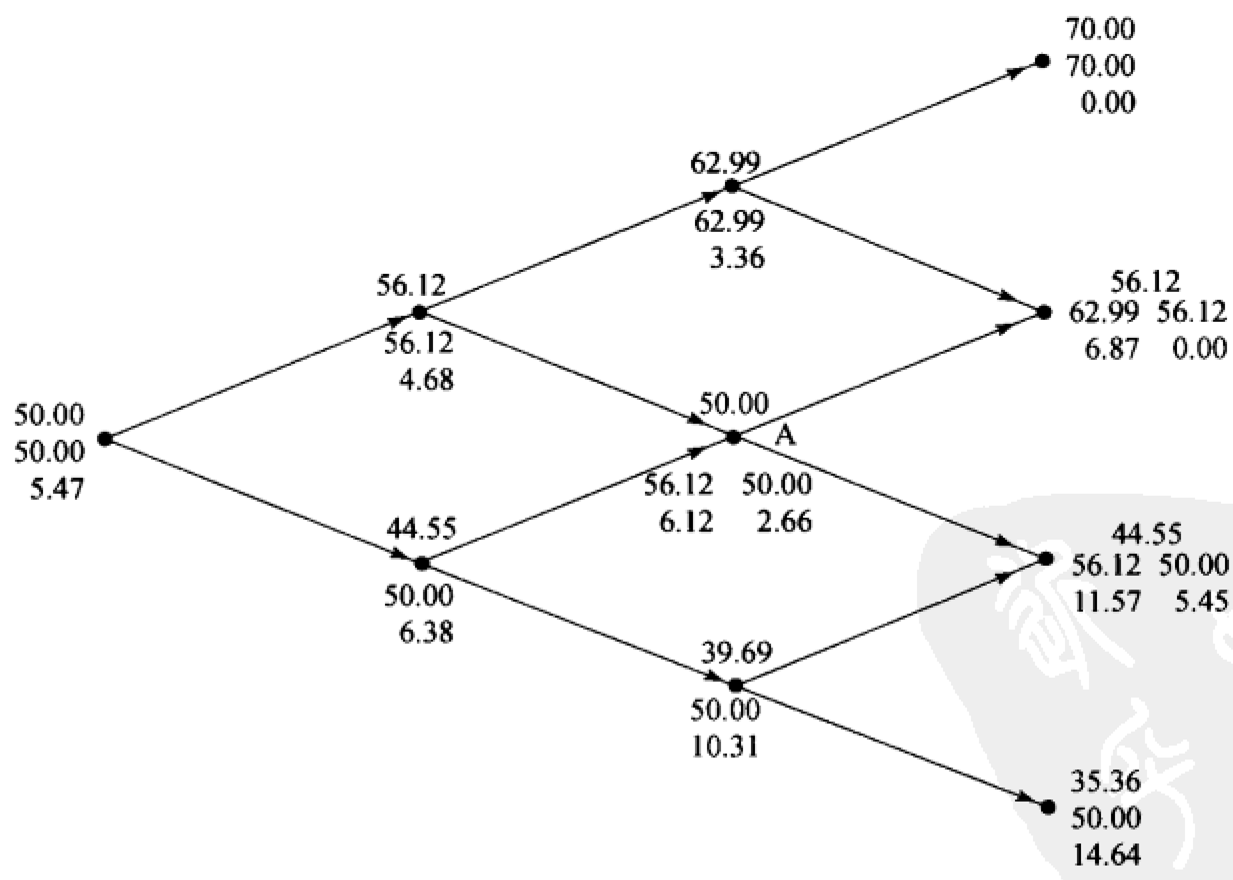


图 26-3　用于美式回望期权的定价树形结构

⊖ 这一方法最先由 Hull 和 White 提出，见 J. Hull and A. White，"Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options，"*Journal of Derivatives*，1，1(Fall 1993)：21-31。

⊜ 这一例子只是为了说明针对依赖路径产品的一般计算方法，关于美式回望期权更有效的定价方法，见作者网页上的技术报告(Technical Note 13)。

期权在树形最后节点上的取值等于股票的最大值减去实际股票价格。为了说明倒推计算过程，假定我们正处在节点 A 上，相应的股票价格为 50 美元。在这一点上，股票的最大值或者为 56.12 美元，或者为 50 美元。我们首先考虑最大值为 50 美元的情形。如果股票价格增大，股票的最大值变为 56.12 美元，相应的期权价格为 0；如果如果股票价格减小，股票的最大值仍为 50 美元，相应的期权价格为 5.45 美元。在没有提前行使的条件下，在节点 A 上，对应最大值为 50 美元的情形，期权价格等于

$$(0 \times 0.5073 + 5.45 \times 0.4927)e^{-0.1\times 0.08333} = 2.66 \text{ 美元}$$

显然在节点 A，我们不应该提前行使期权，因为由行使期权所带来的收益为 0。通过一个类似的计算我们可以得出，在节点 A 对应于最大值为 56.12 美元的情形，期权价格等于

$$(0 \times 0.5073 + 11.57 \times 0.4927)e^{-0.1\times 0.08333} = 5.65 \text{ 美元}$$

这时，提前行使期权的收益为 6.12 美元，因此提前行使期权为最优。按照以上说明的方式，在树形结构进行倒推计算，我们得出美式回望期权的价格为 5.47 美元。

26.5.2 推广

随着时间步数的增长，如果节点上的路径函数 F 的取值个数增长不太快，从数值计算的角度来看，以上描述的方法切实可行。以上考虑的回望期权例子满足以上条件，因为在一个 n 步二叉树上，每一节点对应的不同最大值不会超过 n。

幸运的是，以上方法可以推广到路径函数 F 取很多值的情形。基本处理方式如下：在每个节点上，我们只对路径函数 F 的少数有代表意义的取值进行计算，当我们需要其他点的路径函数值时，我们采用插值法从已知的数值上求得。

计算的第一步是以向前推进的方式在树形结构上的每一个节点建立路径函数的最大值和最小值。假定路径函数时刻 $\Delta t + \tau$ 的取值可以由路径函数时刻在时刻 τ 的取值和标的变量在 $\Delta t + \tau$ 的取值来计算，路径函数在时刻 $\Delta t + \tau$ 的最大值和最小值可以直接地由路径函数在时刻 τ 的最大值和最小值来计算。计算的第二步是在每个节点上选取具有代表意义的路径函数值，做法有很多种。一种做法是选取最大值和最小值以及介于它们之间的等距离中间值。当我们在树形上倒推计算时，对于每个路径函数的代表值，我们都要计算相应衍生产品的价值。

我们将通过考虑 25.12 节中例 25-2 的平均价格看涨期权来说明计算过程，这里期权的收益依赖于股票平均价格。股票的初始价格为 50 美元，执行价格为 50 美元，无风险利率为 10%，股票价格波动率为 40%，期限为 1 年。在计算中，我们采用 20 步的二叉树。二叉树的参数为 $\Delta t = 0.05$，$u = 1.0936$，$d = 0.9144$，$p = 0.5056$，以及 $\Delta t = 0.4944$。路径函数为股票价格的算术平均。

图 26-4 显示了树形上的一部分运算。节点 X 为 0.2 年时（树形的第四步）的中心节点，节点 Y 和 Z 为 0.25 年时与 X 节点相连接的节点，股票在 X 节点的价格为 50 美元。向前归纳可以得出，在节点 X，股票平均值的最大值为 53.83，股票平均值的最小值为 46.65（在计算平均值时，我们包括最初以及最后的股票价格）。节点 X 分叉出节点 Y 和 Z。在节点 Y，股票价格为 54.68，平均值的上下界分别为 57.39 和 47.99；在节点 Z，股票价格为 45.72，平均值的上下界分别为 52.48 和 43.88。

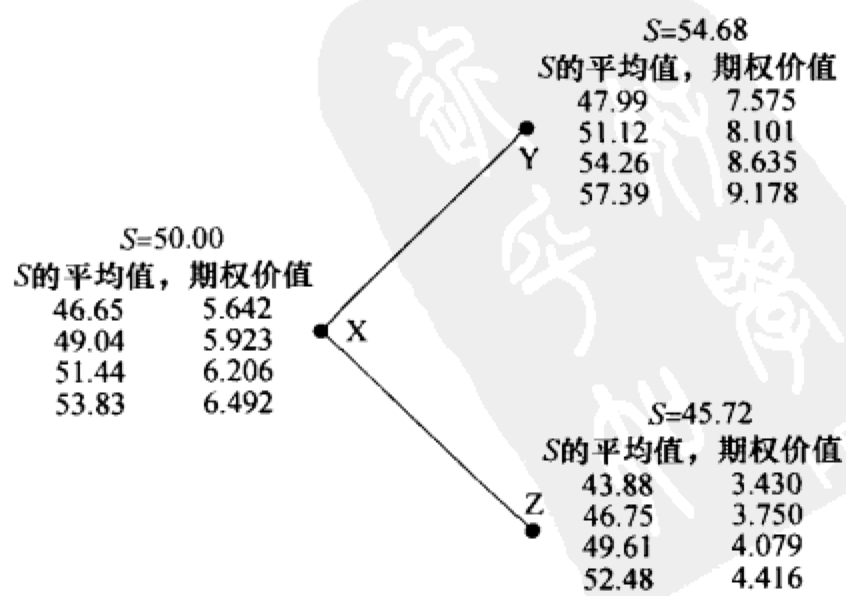


图 26-4 算术平均值期权定价的局部计算

假定我们选择的路径函数代表值为介于最大值与最小值之间 4 个等距离点(包括最大与最小值本身)。因此，在节点 X，我们考虑 46.65、49.04、51.44 和 53.83；在节点 Y，我们考虑 47.99、51.12、54.26 和 57.39；在节点 Z，我们考虑 43.88、46.75、49.61 和 52.48。假定我们已经采用了向后归纳计算出了节点 Y 和 Z 上的代表值所对应的期权价值。图 26-4 展示了计算结果(例如，在节点 Y，当平均值等于 51.12 时，相应的期权价值为 8.101)。

考虑在节点 X 上当平均值等于 51.44 时的计算。如果股票价格上升到节点 Y，新的平均值为

$$\frac{5\times 51.44+54.68}{6}=51.98$$

在节点 Y 上，对应于这一新的平均值，衍生产品的价值等于平均值为 51.12 和 54.26 所对应衍生产品价值的插值，即

$$\frac{(51.98-51.12)\times 8.635+(54.26-51.98)\times 8.101}{54.26-51.12}=8.247$$

类似地，如果股票价格下降到节点 Z，新的平均值为

$$\frac{5\times 51.44+45.72}{6}=50.49$$

通过插值，我们得出相应的衍生产品价值为 4.182。

因此，对应于平均值 51.44，衍生产品的价值为

$$(0.5056\times 8.247+0.4944\times 4.182)e^{-0.1\times 0.05}=6.206$$

节点 X 上其他代表值也可以通过类似的方法处理。当我们完成 0.2 年的节点的计算后，就可以转移到 0.15 年的节点上。

在 0 时刻，由整个树形得出的期权价值为 7.17。当时间步数和节点上的代表值数量增加时，期权价格趋于正确解。由 60 步树形和 100 个平均代表值得出的期权价格为 5.58。在例 25-2 中计算出的解析近似解为 5.62。

这里所讨论的方法的主要优点在于它可用于美式期权。对于美式期权，计算过程同以上描述相似，唯一区别是对于每个代表值，我们均要测试是否应提前行使期权(在实际中，提前行使期权的决定与路径函数的取值以及标的资产的价值有关)。假定以上期权为美式期权，由 20 步树形与 4 个平均代表值得出的期权价格为 7.77；由 60 步树形与 100 个平均代表值得出的期权价格为 6.17。

这里描述的方法可以用于许多不同的情形，本节开始我们列出了该方法可行性的 2 个条件。在方法实施的过程中，采用二次插值的效率会高于线性插值。

26.6 障碍式期权

在第 25 章，我们给出了标准障碍式期权的解析定价公式。本节我们考虑当没有解析解时，对于障碍期权定价的数值算法。

原则上讲，我们可以采用第 20 章中讨论的二叉树和三叉树来对障碍期权定价。考虑一个上涨-敲出期权，我们可以采用与标准期权定价相同的算法，只是当节点高出障碍值时，我们需要设定期权的价格为 0。

三叉树比二叉树的精确度更好，但对于障碍期权，三叉树的收敛也很慢。为了取得合理的精确度，我们需要采用很大的步数。产生这一现象的原因是，树形结构采用的障碍与实际障碍有所不同[⊖]。定义**内部障碍**(inner barrier)为刚好落在真正障碍内的树形结构上的节点(离树形结构的

⊖ 关于这一问题的讨论，见 P. P. Boyle and S. H. Lau, "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method," *Journal of Derivatives*, 1, 4(Summer 1994): 6-14。

中心更近）；**外部障碍**（outer barrier）为刚好落在真正障碍外的树形结构上的节点（离树形结构的中心更远）。图 26-5 显示了在障碍为水平的前提下，三叉树的内部障碍和外部障碍。在一般的计算中，通常都隐含地假设外部障碍为真正障碍，因为障碍条件首先在外部障碍使用。假定时间步长为 Δt，垂直空间的步长与 $\sqrt{\Delta t}$同阶，这意味着，真正的障碍与外部障碍的差别所带来的误差也应与 $\sqrt{\Delta t}$同阶。

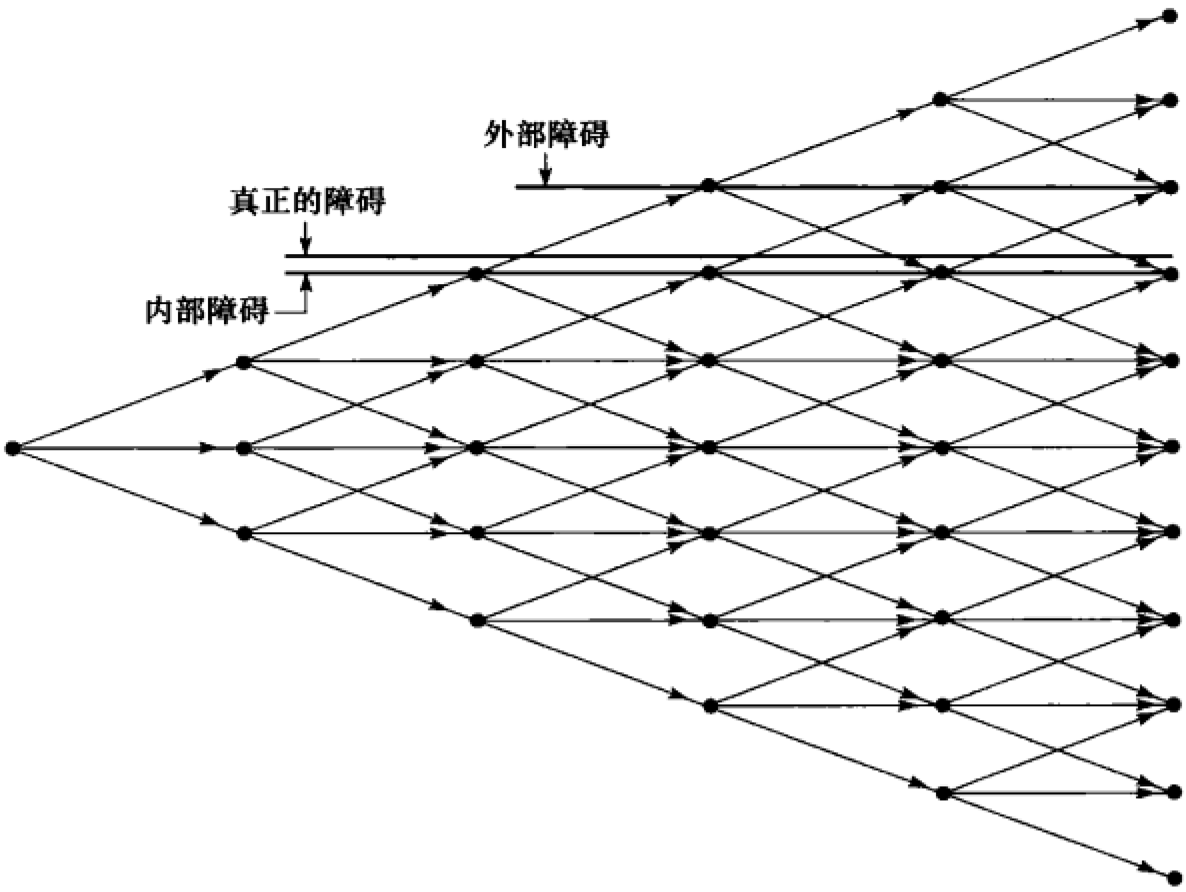


图 26-5 对障碍式期权定价的三叉树

一种解决这一问题的方法如下：

- 假定内部障碍为真正障碍，计算期权价格。
- 假定外部障碍为真正障碍，计算期权价格。
- 对以上两个价格进行插值。

另外一种解决问题的方法是确保节点落在障碍上。假定股票的初始价格为 S_0，障碍为 H。在三叉树上，资产价格变化共有三种可能：价格上升比率为 u，价格不变，价格下降比率为 d，其中 $d=1/u$。我们可以选择 u 来保证节点落在障碍边界上，u 满足的条件为

$$H = S_0 u^N$$

即

$$\ln H = \ln S_0 + N \ln u$$

其中 u 为一个正（或负）的整数。

在 20.4 节讨论三叉树时，我们曾建议 u 的取值为 $e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}$，因此 $\ln u = \sigma\sqrt{3\Delta t}$。对这里所考虑的情形，一个选择 $\ln u$ 的原则是保证 $\ln H = \ln S_0 + N\ln u$ 条件成立的同时，确保 $\ln u$ 尽可能接近于 $\sigma\sqrt{3\Delta t}$，这意味着

$$\ln u = \frac{\ln H - \ln S_0}{N}$$

其中

$$N = \text{int}\left[\frac{\ln H - \ln S_0}{\sigma\sqrt{3\Delta t}} + 0.5\right]$$

这里 int(x)代表 x 的整数部分。

这样，我们可以得出图 26-6 所示的树形结构。假定 p_u，p_m 和 p_d 代表树的节点上价格上升、不变、下跌的概率，以下选择可以保证树形结构与收益的前两阶矩相匹配

$$p_d = -\frac{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t}{2\ln u} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2(\ln u)^2},\quad p_m = 1 - \frac{\sigma^2 \Delta t}{(\ln u)^2},\quad p_u = \frac{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t}{2\ln u} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2(\ln u)^2}$$

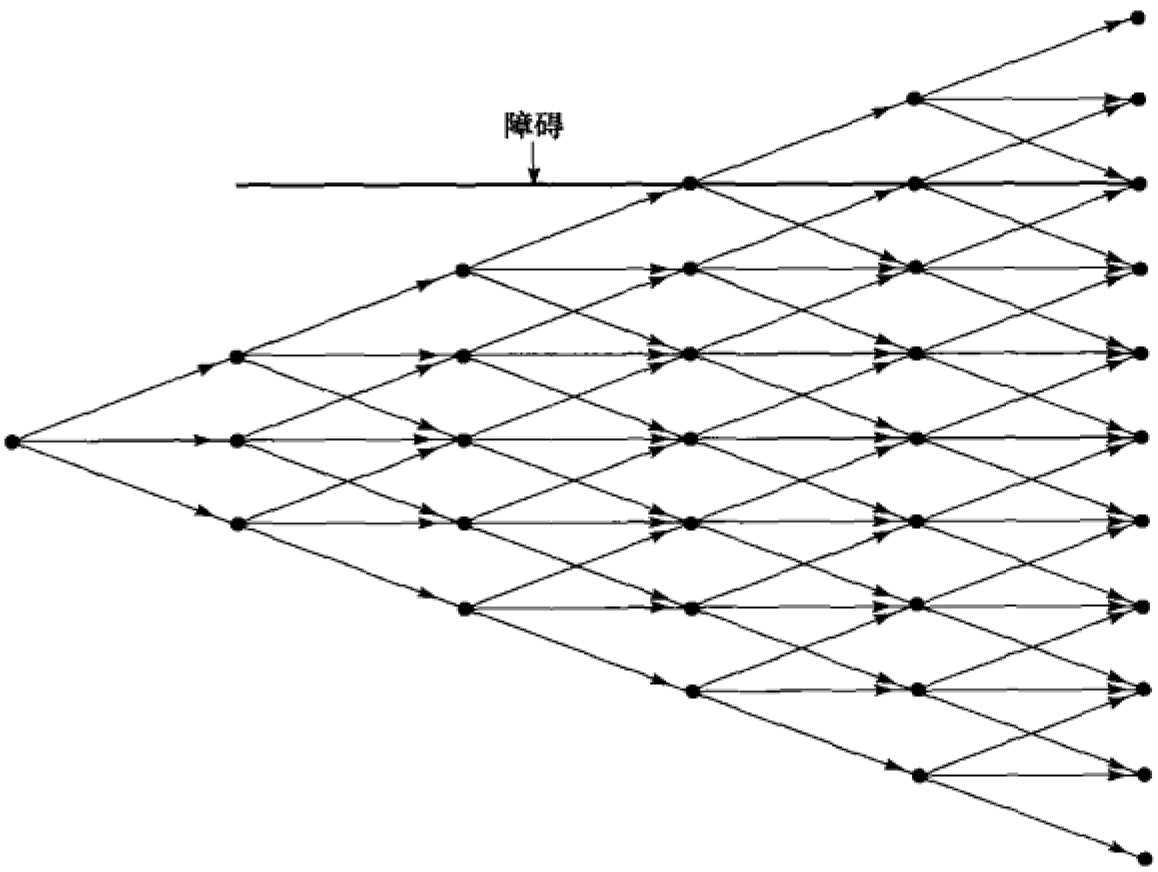


图 26-6 节点落在障碍上的树形

利用自适用网格模型

在股票的初始价格与障碍有一定距离时，以上讨论的方法效果很好。当资产初始价格与障碍水平很近时，我们可以采用 20.4 节引入的自适用网格模型[⊖]。这一模型的核心思想是，在树形结构上，当资产价格的使用是在关键区域时，树形结构会自行由粗网格变为细网格。

为了给障碍期权定价，当资产价格接近障碍时，我们需要更细致的网格。图 26-7 说明了该类树形的设计过程。树形的几何形状保证节点落在障碍上，概率的选择保证标的资产所服从的两阶矩得以匹配。图 26-7 的粗线条代表粗网格树形，细线条代表细网格树形。在计算过程中，我们首先以通常的方式在粗网格树形上倒推计算，在附加网格上我们采用虚线所示的分叉进行计算，最后在树形上进行倒推计算。

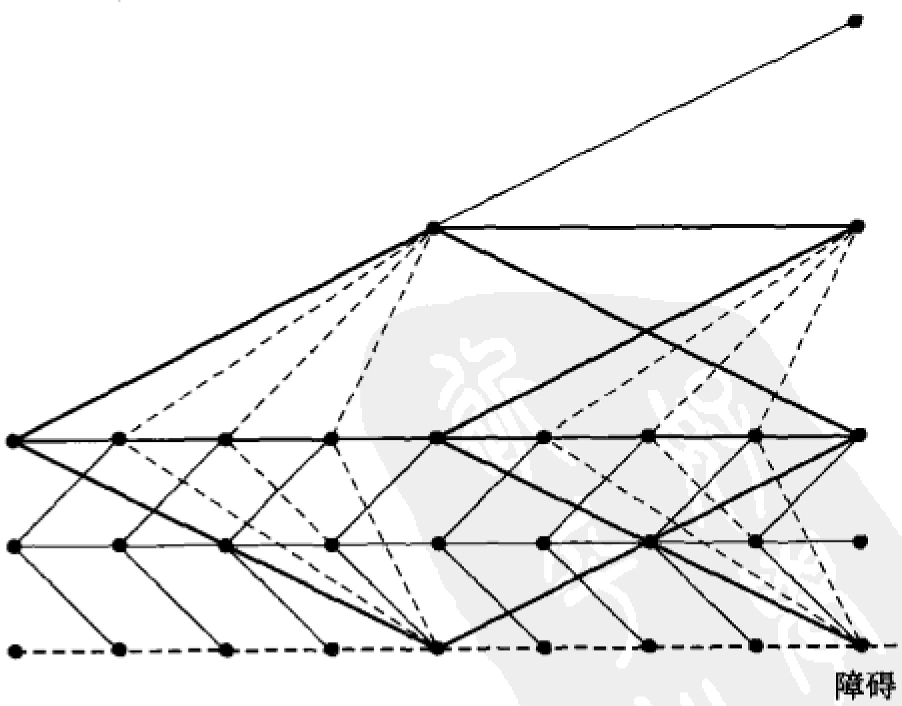


图 26-7 用于障碍期权定价的自适用网格模型

⊖ 见 S. Figlewski and B. Gao, "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, 53(1999): 313-51。

26.7 与两个相关资产有关的期权

另外一个难以用数字计算处理的问题是与两个相关变量有关的美式期权定价。为此研究人员提出了许多种方法。本节我们将讨论其中的三种方法。

26.7.1 变量替换

对于两个不相关的变量，我们可以很容易地构造代表变量变动的三维树形结构。构造过程如下：首先我们构造两个分别代表单个变量变动的二维树形，然后我们将这两个树形结合在一起。三维树形分支所对应的概率等于二维树形概率的乘积。例如，两只股票价格分别为 S_1 和 S_2，每只股票价格的变动可由 CRR 二叉树来表示。假定，S_1 价格上升比率为 u_1 的概率是 p_1，S_1 价格下降比率为 d_1 的概率是$1-p_1$；S_2 价格上升比率为 u_2 的概率是 p_2，S_2 价格下降比率为 d_2 的概率是 $1-p_2$。在三维树形上，每一个节点会产生 4 个价格变化，相应的概率为

p_1p_2：S_1 价格上升，S_2 价格上升；

$p_1(1-p_2)$：S_1 价格上升，S_2 价格下降；

$(1-p_1)p_2$：S_1 价格下降，S_2 价格上升；

$(1-p_1)(1-p_2)$：S_1 价格下降，S_2 价格下降。

接下来，我们考虑 S_1 和 S_2 相关的情形。假定在风险中性世界，S_1 和 S_2 分别服从

$$dS_1 = (r-q_1)S_1dt + \sigma_1S_1dz_1$$
$$dS_2 = (r-q_2)S_2dt + \sigma_2S_2dz_2$$

其中维纳过程 dz_1 和 dz_2 的瞬时相关系数为 ρ。这意味着

$$d\ln S_1 = (r-q_1-\sigma_1^2/2)dt + \sigma_1dz_1$$
$$d\ln S_2 = (r-q_2-\sigma_2^2/2)dt + \sigma_2dz_2$$

我们定义两个相互无关的变量[㊀]

$$x_1 = \sigma_2\ln S_1 + \sigma_1\ln S_2$$
$$x_2 = \sigma_2\ln S_1 - \sigma_1\ln S_2$$

以上变量服从

$$dx_1 = [\sigma_2(r-q_1-\sigma_1^2/2) + \sigma_1(r-q_2-\sigma_2^2/2)]dt + \sigma_1\sigma_2\sqrt{2(1+\rho)}dz_A$$
$$dx_2 = [\sigma_2(r-q_1-\sigma_1^2/2) - \sigma_1(r-q_2-\sigma_2^2/2)]dt + \sigma_1\sigma_2\sqrt{2(1-\rho)}dz_B$$

其中 dz_A 和 dz_B 为互不相关的维纳过程。

变量 x_1 和 x_2 可以分别用两个单独的二叉树来描述。在 Δt 时间，x_i 增加 h_i 的概率为 p_i，减小 h_i 的概率为 $1-p_i$。变量 h_i 和 p_i 的选择确保了 x_i 的前两阶矩得以匹配。因为变量 x_1 和 x_2 相互无关，我们可以采用以上描述的方式来产生三维树形。在树形的每个节点上，我们可以采用以下反变换由 x_1 和 x_2 计算出 S_1 和 S_2

$$S_1 = \exp\left[\frac{x_1+x_2}{2\sigma_2}\right],\quad S_2 = \exp\left[\frac{x_1-x_2}{2\sigma_1}\right]$$

在三维树形上，对于衍生产品价格的倒推计算与二维树形的倒推计算相似。

26.7.2 采用非长方形的树形结构[㊁]

鲁宾斯坦提出了一种建立两个相关股票价格的三维树形的方法[㊂]，在任意的时间点，树形的

㊀ 这一想法最先由 Hull 和 White 提出，见 J. Hull and A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25(1990): 87-100。

㊁ 非长方形的树形结构是指三维树形的横切面为非长方形。——译者注

㊂ 见 M. Rubinstein, "Return to Oz," *Risk*, November(1994): 67-70。

节点位置不一定为长方形。由节点(S_1, S_2)出发，其中 S_1 为第一只股票价格，S_2 为第二只股票价格，股票价格有 0.25 的概率变为以下值

$$(S_1u_1, S_2A), (S_1u_1, S_2B), (S_1d_1, S_2C), (S_2d_1, S_2D)$$

其中

$$u_1 = \exp[(r - q_1 - \sigma_1^2/2)\Delta t + \sigma_1\sqrt{\Delta t}]$$
$$d_1 = \exp[(r - q_1 - \sigma_1^2/2)\Delta t - \sigma_1\sqrt{\Delta t}]$$

以及

$$A = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\Delta t + \sigma_2\sqrt{\Delta t}(\rho + \sqrt{1-\rho^2})]$$
$$B = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\Delta t + \sigma_2\sqrt{\Delta t}(\rho - \sqrt{1-\rho^2})]$$
$$C = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\Delta t - \sigma_2\sqrt{\Delta t}(\rho - \sqrt{1-\rho^2})]$$
$$D = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\Delta t - \sigma_2\sqrt{\Delta t}(\rho + \sqrt{1-\rho^2})]$$

当相关系数为 0 时，以上方法构造的树形与 20.4 节的方法通过单独构造 S_1 和 S_2 的树形合成的三维树形等价。

26.7.3　调整概率

对于 S_1 和 S_2，第三种构造三维树形的方法如下：首先假定相关系数为 0，构造树形结构，然后调整概率来反映相关系数[㊀]。对于单一的 S_1 和 S_2，我们采用 20.4 节的方法构造二叉树，价格上升和下降的概率均为 0.5。在没有相关性的前提下，合成二叉树的概率如表 26-2 所示。对于概率调整后，合成二叉树的概率变为了表 26-3 的形式。

表 26-2　相关系数为 0 时三维树形的概率

S_2-move	S_1-move	
	下方	上方
上方	0.25	0.25
下方	0.25	0.25

表 26-3　相关系数为 ρ 时三维树形的概率

S_2-move	S_1-move	
	下方	上方
上方	$0.25(1-\rho)$	$0.25(1+\rho)$
下方	$0.25(1+\rho)$	$0.25(1-\rho)$

26.8　蒙特卡罗模拟与美式期权

蒙特卡罗模拟法很适合用于对依赖路径期权或与多变量有关的期权定价。树形结构和有限差分法可用于美式期权的定价。如果期权既是美式期权，又依赖路径时会如何？如果一个美式期权与几个随机变量有关将如何处理？在 26.5 节中，我们讨论了如何改进二叉树算法来考虑与路径有关的若干情形。一些研究人员尝试不同的算法以使得蒙特卡罗法可用于美式期权的定价[㊁]。在这里，我们将讨论两种不同的算法。

26.8.1　最小二乘法

对于美式期权定价，我们必须在可以提前行使期权的时间上对继续持有期权还是行使期权做出选择。行使期权所得价值通常比较容易决定。包括 Longstaff 和 Schwartz 在内的一些研究人员提出了一种在蒙特卡罗模拟过程中确定继续持有期权所得价值的方法[㊂]。在必须做出是否提前行使

㊀ 这一方法在 Hull 和 White 处理利率树形时首先提出，见 J. Hull and A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models," *Journal of Derivatives*, Winter(1994): 37-48。

㊁ 对这一问题，Tilley 最先给出了一个解法，见 J. A. Tilley, "Valuing American Options in a Path Simulation Model," *Transactions of the Society of Actuaries*, 45(1993): 83-104。

㊂ 见 F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least Squares Approach," *Review of Financial Studies*, 14, 1(Spring 2001): 113-47。

期权决定的时间点上，Longstaff 和 Schwartz 提出了采用最小二乘法来确定继续持有期权的价值与某些相关变量之间的最佳匹配关系。这一方法最好可以通过例子来解释，在这里我们采用的例子来自于 Longstaff 和 Schwartz 的文章。

考虑一个无股息股票上的 3 年期美式看跌期权，在第一年末、第二年末和第三年末期权持有人可以行使期权。无风险利率为每年 6%（连续复利），当前的股票价格为 1.00，期权执行价格为 1.10。假定我们模拟了 8 条如表 26-4 所示的股票价格路径（这只是为了说明问题，在实际中，我们要采用更多的模拟次数）。如果期权只在第三年末行使，行使期权所得的资金流等于期权的内涵价值，相应结果列在表 26-5 的最后一列。

表 26-4　看跌期权例子的模拟路径

路径	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	0.93	0.97	0.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	0.76	0.77	0.90
7	1.00	0.92	0.84	1.01
8	1.00	0.88	1.22	1.34

表 26-5　期权只在第三年末被行使所对应的现金流

路径	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.07
4	0.00	0.00	0.18
5	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.20
7	0.00	0.00	0.09
8	0.00	0.00	0.00

如果期权在第二年末为实值期权，期权持有者必须决定是否应提前行使期权。由表 26-4 得出，路径 1、3、4、6 和 7 在第二年末时期权处于实值状态。对于这些路径，假定以下近似关系：

$$V = a + bS + cS^2$$

式中 S 为股票在第二年末时的价格，V 为当继续持有期权时的价值被贴现到第二年末时的价值。S 的 5 个观察值为 1.08、1.07、0.97、0.77 和 0.84。由表 26-5 得出，相应 V 的价值分别为 0.00、$0.07e^{-0.06\times1}$、$0.18e^{-0.06\times1}$、$0.20e^{-0.06\times1}$ 和 $0.09e^{-0.06\times1}$，我们采用这些数据求得使

$$\sum_{i=1}^{5}(V_i - a - bS_i - cS_i^2)^2$$

达到最小的系数 a、b 和 c。式中 S_i 和 V_i 分别为 S 和 V 的第 i 个观察值。求解得出 $a=-1.070$，$b=2.983$，$c=-1.813$，因此最佳匹配方程为

$$V = -1.070 + 2.983S - 1.813S^2$$

因此，对于路径 1、3、4、6 和 7，在第二年末继续持有期权的价值为 0.0369、0.0461、0.1176、0.1520 和 0.1565。由表 26-4 得出，行使期权的价值分别为 0.02、0.03、0.13、0.33 和 0.26。这意味着在路径 4、6 和 7 上，我们在第二年末应行使期权。对于这 8 条路径，表 26-6 总结了期权或在第三年末行使，或在第二年末行使所产生的现金流。

表 26-6　期权只在第二年末或第三年末被行使所对应的现金流

路径	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.07
4	0.00	0.13	0.00
5	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.33	0.00
7	0.00	0.26	0.00
8	0.00	0.00	0.00

我们接下来考虑期权在第一年末为实值期权的情形，期权在路径 1、4、6、7 和 8 上为实值期权。由表 26-4 得出，在第一年末，相应的股票价格分别为 1.09、0.93、0.76、0.92 和 0.88。由表 26-6 得出，继续持有期权的价值被贴现到第一年末时的价格分别为 0.00、$0.13e^{-0.06\times1}$、$0.33e^{-0.06\times1}$、$0.26e^{-0.06\times1}$ 和 0.00。最小二乘关系式为

$$V = 2.038 - 3.335S + 1.356S^2$$

因此，对于路径 1、4、6、7 和 8，在第一年末继续持有期权的价值分别为 0.109 2、0.288 6、0.117 5 和 0.153 3。由表 26-4 得出，行使期权所得价值分别为 0.01、0.17、0.34、0.18 和 0.22。表 26-7 总结了期权在三年中的每一年末均可被行使所产生的现金流。期权价格等于所有现金流以无风险利率进行贴现后的平均值，即

$$\frac{1}{8}(0.07e^{-0.06\times3}+0.17e^{-0.06\times1}+0.34e^{-0.06\times1}+0.18e^{-0.06\times1}+0.22e^{-0.06\times1})=0.1144$$

因为以上数值大于 0.10，所以立即行使期权不为最优。

这里介绍的方法可以以几种形式得以推广。如果期权可以在任意时刻被行使，我们可以增加可行使期权的时刻（类似于二叉树）来对期权进行估计。也可以假设 V 和 S 之间的关系式更加复杂，例如，我们可以假定 V 是 S 的立方函数，而不是二次函数。当提前行使权利与几个变量有关时，我们也可以采用以上的算法计算，并假设 V 和 S 变量之间具有某种函数形式，其中的参数仍可由最小二乘法来确定。

表 26-7 期权的现金流

路径	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.07
4	0.17	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00
6	0.34	0.00	0.00
7	0.18	0.00	0.00
8	0.22	0.00	0.00

26.8.2 将行使边界参数化的方法

有一些研究人员，如 Andersen，提出了另一种对提前行使边界进行参数化从而对美式期权的模拟定价的方法。边界确定的方式是由期权的到期日开始向后倒推，在每一步以迭代的形式求取最佳参数[⊖]。为了说明这一方法，我们仍采用以上的看跌期权例子，并仍假定表 26-4 为模拟生成的 8 个路径。这时，提前行使的边界是以 S 的关键值 $S^*(t)$ 来确定的。在时刻 t，如果股票价格小于 $S^*(t)$，期权被提前行使；如果股票价格大于 $S^*(t)$，期权不会被提前行使。$S^*(3)$ 的值为 1.10，即当 $t=3$ 时，如果股票价格小于 1.10，期权被行使；如果股票价格大于 1.10，期权不会被行使。我们接下来确定如何计算 $S^*(2)$。

假定 $S^*(2)$ 的取值小于 0.77，期权在任意一个路径上都不会被行使。在第二年末，期权在 8 个路径下的价值分别为 0.00、0.00、$0.07e^{-0.06\times1}$、$0.18e^{-0.06\times1}$、0.00、$0.20e^{-0.06\times1}$、$0.09e^{-0.06\times1}$ 和 0.00。平均值为 0.063 6。接下来，假定 $S^*(2)=0.77$。这时，在第二年末，期权在 8 个路径下的价值分别为 0.00、0.00、$0.07e^{-0.06\times1}$、$0.18e^{-0.06\times1}$、0.00、0.33、$0.09e^{-0.06\times1}$ 和 0.00。平均值为 0.0813。类似地，当 $S^*(2)$ 分别等于 0.84、0.97、1.07 和 1.08 时，相应的期权价值分别为 0.103 2、0.098 2、0.093 8 和 0.096 3。以上分析说明，$S^*(2)$ 的最佳（即使得期权价格的平均值为最大）选择是 0.84（更准确地讲，$0.84\leqslant S^*(2)<0.97$）。当 $S^*(2)$ 等于这一最佳选择时，在第二年末，期权在 8 个路径下的价值分别为 0.00、0.00、0.065 9、0.169 5、0.00、0.33、0.26 和 0.00，其平均值为 0.103 2。

接下来，我们确定如何计算 $S^*(1)$。假定 $S^*(1)<0.76$，期权在任意一个路径上都不会在第 1 年时被行使，期权在第一年末时的价格为 $0.1032e^{-0.06\times1}=0.0972$。假定 $S^*(1)=0.76$。这时，在第一年末，期权在 8 个路径下的价值分别为 0.00、0.00、$0.0659e^{-0.06\times1}$、$0.1695e^{-0.06\times1}$、0.00、0.34、$0.26e^{-0.06\times1}$ 和 0.00，其平均值为 0.100 8。类似地，当 $S^*(1)$ 分别等于 0.88、0.92、0.93 和 1.09 时，相应的期权价值分别为 0.128 3、0.120 2、0.121 5 和 0.122 8。以上分析说明，

⊖ 见 L. Andersen, "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model," *Journal of Computational Finance*, 3, 2(Winter 2000): 1-32。

$S^*(1)$的最佳选择是0.88（更准确地讲，$0.88 \leqslant S^*(1) < 0.92$）。在没有提前行使的情况下，0时刻的期权价值为$0.1283e^{-0.06\times1}=0.1208$，这一价值大于在0时刻立即行使期权的价值0.10。

在实际中，我们要进行成千上万的模拟来确定以上所描述的行使边界。一旦行使边界被确定以后，我们将舍弃为确定行使边界所模拟的路径，并重新做的模拟来利用所得到的行使边界对期权定价。我们的例子中的美式期权比较简单，因为在任意时刻都可以通过一个股票价格来定义出提前行使边界。在更复杂的情形，我们必须对如何将边界进行参数化做一些假设。

26.8.3 价格的上界

以上讨论的两种方法往往会低估美式期权的价格，这是因为我们提供的提前行使期权边界并非为最优。由于这个原因，Andersen 和 Broadie 提出了一个计算期权上界方法[⊖]。与计算期权价格的下界的算法并用，Andersen 和 Broadie 方法可以求出更加准确的期权价格估计值，其准确度高于仅仅采用计算下界的算法所得出的估计值。

小 结

研究人员已经提出了一些与现实世界所观察到的波动率微笑相吻合的模型。由常数波动率弹性模型所得出的波动率微笑与我们观察到的股票期权波动率微笑较为相似；跳跃-扩散模型所得出的波动率微笑与我们观察到的货币期权的波动率微笑较为相似；方差-Gamma 模型的覆盖面很广，这一模型既可以产生我们观察到的货币期权的波动率微笑，也可以产生股票期权的波动率微笑。内涵波动率函数模型的覆盖面更广，该模型可以与欧式期权市场价格的任意形式完全匹配。

一种自然的对依赖路径的期权定价方法是蒙特卡罗法。蒙特卡罗法的缺点是其计算速度缓慢，而且难以用于对美式衍生产品定价。幸运的是，树形结构可以用于对许多类型与依赖路径期权产品定价，其做法是在树形的每一节点上计算一些具有代表意义的数值，并在树形结构中反推计算时，对于每一个路径值计算出相应的衍生产品价格。

我们可以将二叉树进行推广以用于对可转换债券定价。对应于公司违约的情形，我们要在树形结构上引入额外一个分叉。在倒退计算过程需要考虑债券持有者是否将债券转换，以及发行方是否会将债券赎回。

树形结构可用于多种形式的障碍期权定价，但当树形结构的步数增加时，数值解收敛于精确解的速度较为缓慢。一种改善收敛速度的方法是改变树形的几何结构以保证树形结构的节点落在障碍边界上。另外一种做法是假定障碍值与目标期权的障碍值不同，并采取插值的方式来对期权定价。第三种方法是在接近障碍值时，对标的资产的变化值提供更为细致的网格。

对于与两个相关变量有关的期权定价时，一种做法是将相关变量转换为相互无关的变量，然后对每一个经过转换的变量建立树形结构，再产生一个三维树形。在树形结构的每一个节点上，通过一个反变换，我们可以求出标的资产的价格。第二种做法是将树上的节点位置做出安排以反映相关性条件。第三种做法是建立没有任何相关性的树形结构，然后再对概率进行调整来反映相关性条件。

蒙特卡罗法对于美式期权的应用并不十分自然，但我们通过两种做法来使得蒙特卡罗法可以用于对美式期权定价。第一种做法采用最小二乘法将继续持有期权的价值（即不行使期权）与某些相关变量联系起来；第二种做法将提前行使期权的边界进行参数化，参数化的过程是从树形结构的末端开始倒退计算。在每一步，行使期权的边界是以迭代的形式计算得出的。

⊖ 见 L. Andersen and M. Broadie, "A Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multi-Dimensional American Options," *Management Science*, 50, 9(2004), 1222-34。

推荐阅读

Andersen, L., "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model," *Journal of Computational Finance*, 3, 2 (Winter 2000): 1–32.

Andersen, L. B. G., and R. Brotherton-Ratcliffe, "The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite Difference Approach," *Journal of Computational Finance*, 1, 2 (Winter 1997/98): 3–37.

Bodurtha, J. N., and M. Jermakyan, "Non-Parametric Estimation of an Implied Volatility Surface," *Journal of Computational Finance*, 2, 4 (Summer 1999): 29–61.

Boyle, P. P., and S. H. Lau, "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method," *Journal of Derivatives*, 1, 4 (Summer 1994): 6–14.

Conze, A., and R. Viswanathan, "Path Dependent Options: The Case of Lookback Options," *Journal of Finance*, 46 (1991): 1893–1907.

Cox, J. C. and S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976), 145–66.

Derman, E., and I. Kani, "Riding on a Smile," *Risk*, February (1994): 32–39.

Duan, J.-C., "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5 (1995): 13–32.

Duan, J.-C., "Cracking the Smile," *Risk*, December (1996): 55–59.

Dupire, B., "Pricing with a Smile," *Risk*, February (1994): 18–20.

Figlewski, S., and B. Gao, "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, 53 (1999): 313–51.

Heston, S. L., "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options," *Review of Financial Studies*, 6, 2 (1993): 327–43.

Hull, J., and A. White, "Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options," *Journal of Derivatives*, 1, 1 (Fall 1993): 21–31.

Hull J. C., and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42 (June 1987): 281–300.

Hull, J. C. and W. Suo, "A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 2 (2002): 297–318.

Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach," *Review of Financial Studies*, 14, 1 (Spring 2001): 113–47.

Madan D. B., P. P. Carr, and E. C. Chang, "The Variance-Gamma Process and Option Pricing" *European Finance Review*, 2 (1998): 7–105.

Merton, R. C., "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976): 125–44.

Rebonato, R., '*Volatility and Correlation: The Perfect Hedger and the Fox*, 2nd edn. Chichester: Wiley, 2004.

Ritchken, P, and R. Trevor, "Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes," *Journal of Finance* 54, 1 (February 1999): 377–402

Rubinstein, M., "Implied Binomial Trees," *Journal of Finance*, 49, 3 (July 1994): 771–818.

Rubinstein, M., "Return to Oz," *Risk*, November (1994): 67–70.

Stutzer, M., "A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation," *Journal of Finance*, 51 (December 1996): 1633–52.

Tilley, J. A., "Valuing American Options in a Path Simulation Model," *Transactions of the Society of Actuaries*, 45 (1993): 83–104.

练习题

26.1 验证CEV模型下的期权公式满足看跌-看涨期权平价关系式。

26.2 当采用默顿的跳跃-扩散模型时，解释你应该如何应用蒙特卡罗法来产生路径的样本？

26.3 验证当跳跃的幅度服从对数正态分布时，由默顿的跳跃-扩散模型得出的期权价格满足看跌看涨期权平价关系式。

26.4 假定从今天到6个月，资产波动率为20%；从6个月到12个月，资产波动率为22%；从12个月到24个月，资产波动率为24%。当利用布莱克-斯科尔斯-默顿公式对一个2年期的期权定价时，我们应采用什么样的波动率？

26.5 考虑默顿的跳跃-扩散模型，其中跳跃使资产价格变为0。假定每一年的平均跳跃次数为λ。证明当无风险利率为$r+\lambda$而不是r时，欧式看涨期权的价格等于价格无跳跃时的看涨期权价格。存在跳跃的可能会使得期权的价格增加还是减小？（提示：在无跳跃、一个跳跃、多跳跃的情况分别对期权定价，在时间T内，资产价格无跳跃的概率为$e^{-\lambda T}$）。

26.6 在0时刻，一个无股息股票的价格为S_0，假设我们将$0\sim T$的时间区间分为两个部分，时间长度分别为t_1和t_2。在第一个时间区间内，无风险利率和波动率分别为r_1和σ_1；在第二个时间区间内，无风险利率和波动率分别为r_2和σ_2。假定世界为风险中性。

(a) 利用第14章的结果来确定股票价格在时刻T的分布，并将最终结果以r_1、r_2、σ_1、σ_2、t_1、t_2和S_0来表达。

(b) 假定$\bar{r}$为0时刻与T时刻之间的平均利率，$\bar{V}$为0时刻与T时刻之间的平均方程率。股票价格在时刻T的分布是什么？将最终结果以$\bar{r}$、$\bar{V}$、T和S_0来表达。

(c) 当共有3个时间段，3个不同的利率和3个不同的波动率时，(a)和(b)的结果会如何改变？

(d) 证明当无风险利率r和波动率σ分别为时间的已知函数时，在风险中性世界里，股票价格在S_0时刻的概率分布满足

$$\ln S_T \sim \phi\left[\ln S_0+\left(\bar{r}-\frac{\bar{V}}{2}\right)T, VT\right]$$

式中$\bar{r}$为r的均值，$\bar{V}$为σ^2的均值，S_0为股票今天的当前价格，$\phi(m, v)$为具有均值m和方差v的正态分布。

26.7 假定资产价格服从由式(26-2)和式(26-3)所定义的随机过程，说明模拟这一随机波动率模型中的资产价格路径的方程。

26.8 “IVF模型并不一定正确地描述了波动率曲面变化。”解释这一论点。

26.9 “当利率为常数时，IVF模型正确地给出了收益只与某单一时刻的资产价格有关的衍生产品的价格。”解释这一论点。

26.10 采用一个三步二叉树来对一个美式回望货币期权定价，当前汇率为1.6，无风险利率为每年5%，外币的无风险利率为每年8%，汇率波动率为15%，期限为18个月。在计算中，采用26.5节中给出的算法。

26.11 当参数v趋于0时，方差-Gamma模型会如何变化？

26.12 采用一个三步二叉树来对一个美式看跌期权定价，期权标的变量为某无股息股票价格的几何平均值，股票当前价格为40美元，执行价格为40美元，无风险利率为每年10%，股票价格波动率为每年35%，期限为3个月。几何平均值的计算由今天开始直到期权的到期日。

26.13 在26.5节中所描述的对于依赖路径期权定价的方法是否可用于对以下2年期的美式期权定价？期权的收益为$\max(S_{ave}-K, 0)$，其中S_{ave}为在期权被行使前3个月的资产的平均价格。解释你的答案。

26.14 验证图26-4中的数字6.492是正确的。

26.15 检查26.8节的例子中考虑的8个路径。最小二乘法和边界参数化所得出的提前行使策略有什么不同？对于给定的路径样本，哪一个给出的期权价格会更高？

26.16 考虑一个无股息股票上的欧式看跌期权，股票当前价格为100美元，执行价格为110美元，无风险利率为每年5%，期限为1年。假定在期权期限内平均方差率等于0.06的概率为0.20、等于0.09的概率为0.50、等于0.12的概率为0.30。

波动率与股票价格无关。估计期权的价格，计算中使用 DerivaGem 软件。

26.17 当我们有两个障碍时，如何设计树形以保证节点落在障碍边界上？

26.18 考虑一个 18 个月期限的某公司零息债券，面值为 100。在 18 个月内，债券持有者随时可将债券转换为 5 股公司的股票。假定股票的当前价格为 20 美元，股票不支付股息，对于所有期限的无风险利率均为每年 6%（连续复利），股票价格的波动率为每年 25%。假定违约密度为每年 3%，债券回收率为 35%，债券发行方可以以 110 美元的价格将债券赎回。利用一个三步树形计算债券的价格，转换期权的价值为多少（剔除发行方的看涨期权）？

作业题

26.19 一个股指上新的欧式回望看涨期权的期限为 9 个月。股指的当前水平为 400，无风险利率为每年 6%，股息收益率为每年 4%，股指波动率为 20%。采用 26.5 节中的算法来对这一期权定价，将你的结果与 DerivaGem 软件的解析结果进行比较。

26.20 假定表 19-2 给出了对于 6 个月货币期权定价的波动率。假定本国以及外国的无风险利率均为每年 5%，汇率的当前值为 1.0。考虑由一个期限为 6 个月，执行价格为 1.05 美元的欧式看涨期权长头寸和一个期限为 6 个月，执行价格为 1.10 美元的欧式看涨期权短头寸所组成的牛市价差。

(a) 牛市价差的价值为多少？

(b) 对于两个期权，我们应该使用什么样的单一波动率来保证牛市价差价格的正确性？（在计算中，同时使用 DerivaGem 应用工具与 Excel 计算表的 Goal Seek 或 Solver）。

(c) 你的结果是否验证了在本章开始时提出的特种期权定价所采用的波动率可能会与直觉相抵触这一观点？

(d) IVF 模型是否给出了牛市价差的正确价格？

26.21 假定执行价格为 1.13 美元，重复 26.8 节对于看跌期权的分析。在分析中，采用最小二乘法和期权行使边界参数化法。

26.22 考虑默顿跳跃-扩散模型，其中标的资产为某无股息股票。跳跃发生的次数为每年一次，跳跃大小的百分比均值为 2%，跳跃比率的对数的标准差为 20%。股票价格为 100 美元，无风险利率为 5%，扩散过程中的波动率为 15%，期限为 6 个月。利用 DerivaGem 应用工具来计算当执行价格分别为 80 美元、90 美元、100 美元、110 美元和 120 美元时的隐含波动率。你所得出的波动率微笑或者偏度所隐含的股票价格的概率分布有什么样的性质？

26.23 一个由 ABC 公司发行的 3 年期可转换债券的面值为 100 美元，在每年末，债券支付券息 5 美元。这一债券在第一年和第二年末可以转换为 ABC 公司的股票。在第一年末，在券息发放后，这一债券可以转换成 3.6 股股票；在第二年末，在券息发放后，这一债券可以转换成 3.5 股股票。股票的当前价格为 25 美元，股票波动率为 25%，股票不支付股息。无风险利率为每年 5%（连续复利）。由 ABC 发行的债券的收益率为 7%（连续复利），回收率为 30%。

(a) 利用一个 3 步树计算债券的价格。

(b) 转换期权的价值为多少？

(c) 债券在前 2 年内可以按 115 美元的价格赎回，这一赎回期权将如何改变债券和转换期权的价值？

(d) 股票在第 6 个月、第 18 个月、第 30 个月将支付 1 美元的股息，这将如何改变分析过程，在分析中不需要给出详细的计算结果。

[提示：利用式(23-2)来估计平均违约密度。]



第 27 章

鞅与测度

到目前为止，在对期权定价时，我们总是假设利率为常数。为了对第 28 ~ 32 章将要讨论的利率衍生产品定价做准备，我们在本章将放松这个假设。

风险中性定价原理表明，衍生产品的价格可以通过以下方式来确定：(a)假设标的资产收益率的期望值等于无风险利率，并由此计算衍生产品收益的期望值；(b)对得到的收益期望值以无风险利率进行贴现。当无风险利率是常数时，风险中性定价提供了一个明确、毫不含糊的工具。但当利率是随机时，这个方法的意思并不是很清楚。标的资产的收益率期望值等于无风险利率是什么意思？是指每天的收益率期望值是无风险利率，或每年的收益率期望值是一年期的无风险利率，或在 5 年时间的开始时所期望的收益率是 5 年利率？对收益的期望值用无风险利率进行贴现又指什么？比如，我们能对预计在 5 年后所实现的收益用今天的 5 年无风险利率进行贴现吗？

本章我们将解释当无风险利率为随机时风险中性定价的理论基础，并且说明在任何情形下都可以有许多风险中性世界。我们首先定义一个**风险市场价格**(market price of risk)参数，然后证明在一个很短的时间区间里衍生产品的收益率高于无风险利率的部分与标的随机变量的风险市场价格之间有一个线性关系。我们把风险市场价格是零的情形称为**传统风险中性世界**(traditional risk-neutral world)。我们将会发现在某些情况下，一些其他关于风险市场价格的假设也是很有用处的。

要想完全理解风险中性定价，**鞅**(martingale)与**测度**(measure)是很关键的概念。鞅是一个没有漂移的过程，而测度是我们表示证券价格的一种单位。本章的关键结果是**等价鞅测度**(equivalent martingale measure)，它表明如果我们用可交易的证券价格作为衡量单位，那么将存在一个风险市场价格使得所有的证券价格都是鞅。

在本章中，我们将看到等价鞅测度的许多用处。我们将利用它来推广布莱克模型(见 17.8 节)，并由此对利率是随机情况下的股票期权定价，也对资产替换期权定价。在第 28 章里，将利用这些结果去理解利率衍生产品定价的标准市场模型。我们在第 29 章里对一些非标准衍生产品进行定价，而这些结果将会在第 31 章中帮助我们建立 LIBOR 市场模型。

27.1 风险市场价格

我们首先考虑只依赖于一个变量 θ 的衍生产品性质。假设 θ 所服从的过程是

$$\frac{d\theta}{\theta} = m\,dt + s\,dz \tag{27-1}$$

式中 dz 是个维纳过程，参数 m 和 s 分别表示 θ 的增长率的期望和波动率。我们假定这些参数只依赖于 θ 和 t。变量 θ 并不一定是投资资产的价格，它可以代表与金融市场不大相关的东西，比如像新奥尔良市中心的温度。

假定f_1与f_2是两个只依赖于θ和t的衍生产品价格。这些可以是期权，也可以是在以后某个时间以θ和t函数形式提供收益的产品价格。我们假设在所考虑的时间区间中，f_1与f_2不提供任何收入[⊖]。

假设f_1与f_2所服从的过程为

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{f_1} = \mu_1 \mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}z$$

与

$$\frac{\mathrm{d}f_2}{f_2} = \mu_2 \mathrm{d}t + \sigma_2 \mathrm{d}z$$

式中，μ_1，μ_2，σ_1和σ_2都是θ和t的函数，其中的“dz”项必须与式(27-1)中的dz一致，因为它们代表f_1与f_2中不确定性的唯一来源。

我们现在用类似于14.6节中的布莱克-斯科尔斯分析将价格f_1与f_2联系起来。把f_1与f_2的过程离散化

$$\Delta f_1 = \mu_1 f_1 \Delta t + \sigma_1 f_1 \Delta z \tag{27-2}$$

和

$$\Delta f_2 = \mu_2 f_2 \Delta t + \sigma_2 f_2 \Delta z \tag{27-3}$$

我们可以利用$\sigma_2 f_2$个单位的第一个衍生产品和$-\sigma_1 f_1$单位的第二个衍生产品建立一个瞬时无风险的组合，这样可以将Δz项去掉。如果用Π来表示这个组合的价值，那么

$$\Pi = (\sigma_2 f_2) f_1 - (\sigma_1 f_1) f_2 \tag{27-4}$$

和

$$\Delta\Pi = \sigma_2 f_2 \Delta f_1 - \sigma_1 f_1 \Delta f_2$$

将式(27-2)和式(27-3)代入，这个式子变成了

$$\Delta\Pi = (\mu_1 \sigma_2 f_1 f_2 - \mu_2 \sigma_1 f_1 f_2)\Delta t \tag{27-5}$$

由于这个组合是瞬时无风险的，它必须挣取无风险利率。因此，

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

将式(27-4)和式(27-5)代入上式可以得到

$$\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1 = r\sigma_2 - r\sigma_1$$

或

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \tag{27-6}$$

注意式(27-6)的左边只依赖于f_1过程中的参数，而右端只依赖于f_2过程中的参数。我们定义λ为式(27-6)两边的值，那么

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} = \lambda$$

去掉下标，我们证明了如果f是一个只依赖于θ和t的衍生产品价格，并且服从

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z \tag{27-7}$$

那么

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda \tag{27-8}$$

参数λ通常被称为θ的**风险市场价格**(market price of risk，在衡量交易组合表现的背景下，这个量

⊖ 以下的分析可以推广到提供收入的情况(见习题27.7)。

被称为 Sharpe 指数）。它可能依赖于 θ 和 t，但却不依赖于衍生产品 f 的特征。我们的分析表明，如果没有套利机会，那么在任何时间上如果衍生产品 f 只依赖于 θ 和 t，$(\mu-r)/\sigma$ 的值都必须是一样的。

变量 θ 的风险市场价格对于依赖于 θ 的证券在其风险与收益之间的平衡关系起着一个度量的作用。式(27-8)可以写成

$$\mu - r = \lambda\sigma \tag{27-9}$$

我们可以从直观上来理解这个方程。注意变量 σ 可以被不严格地理解成在 f 中的 θ 风险。在方程的右边，我们将 θ 风险的数量乘上 σ 风险的市场价格。表达式的左边是衍生产品在所得收益里高于无风险利率的部分，这部分可以被理解成对风险的补偿。式(27-9)与资本资产定价模型有些相似，它们都将高于无风险利率的部分和风险联系了起来。本章我们不考虑如何去测量风险的市场价格，这在第 34 章里当考虑实物期权问题时将会有所讨论。

值得一提的是，我们很自然地会将参数 σ 称为 f 的波动率，它是式(27-7)中 dz 的系数。但事实上 σ 的值可能是负的。当 f 与 θ 有负相关性时(即 $\partial f/\partial\theta$ 是负的)，情况正是这样。其实 σ 的绝对值 $|\sigma|$ 才是 θ 的波动率。理解这一点的方式之一是，当在 f 的过程中将 dz 换为 $-dz$ 时，两个过程具有相同的统计性质。

我们在第 5 章里特别指出了投资资产与消费资产的区别。如果有足够多的投资者是为了投资的目的而买卖某种资产，那么这个资产被称为投资资产，而拥有消费资产的主要目的是为了消费。式(27-8)对所有不提供收入，而且只依赖于 θ 和 t 的投资资产都成立。如果 θ 本身正好也是个投资资产，那么

$$\frac{m-r}{s} = \lambda$$

但在其他情况下，这个关系并不一定是成立的。

【例 27-1】 考虑这样一个衍生产品，它的价格和原油价格之间有正的相关性，而且不依赖别的随机变量。假设它提供 12% 的年预期收益率与 20% 的年波动率，如果无风险利率为每年 8%，这说明原油的风险市场价格是

$$\frac{0.12-0.08}{0.2} = 0.2$$

注意原油是消费资产而不是投资资产，因而不能在式(27-8)中让 μ 等于在原油上投资的收益率期望，并且 σ 要等于原油价格的波动率。

【例 27-2】 考虑两个证券，它们都与 90 天的利率有正的相关性。假如第一个证券的收益率期望是每年 3%，而波动率是每年 20%。第二个证券的波动率是每年 30%。假设瞬时无风险利率是每年 6%。利用第一个证券的收益率期望与波动率可以计算风险市场价格为

$$\frac{0.03-0.06}{0.2} = -0.15$$

将式(27-9)改写一下就可以得到第二个证券的收益率期望为

$$0.06 - 0.15 \times 0.3 = 0.015$$

或每年 1.5%。

其他世界

衍生产品价格 f 服从

$$df = \mu f dt + \sigma f dz$$

式中μ依赖于投资者对风险的选择。在一个风险市场价格为0的世界里，λ等于0。从式(27-9)可以得到$\mu=r$，于是f服从

$$df = rf dt + \sigma f dz$$

我们将称此为**传统风险中性世界**(traditional risk-neutral world)。

在对风险市场价格λ做了一些其他假设后，我们还可以定义其他内在一致的世界。一般来讲，由式(27-9)我们可以得出

$$\mu = r + \lambda\sigma$$

于是

$$df = (r + \lambda\sigma) f dt + \sigma f dz \tag{27-10}$$

一个变量的风险市场价格决定了所有依赖于这个变量的证券的增长率。当我们从一个风险市场价格换成另外一个时，证券价格增长率的期望值会改变，但它的波动率却不会改变。这是一个服从扩散过程的变量的一般性质，我们在12.7节中曾对此有过说明。选择一个风险市场价格也被称为是定义了一个**概率测度**(probability measure)。对于某个特殊风险市场价格，我们可以得到一个“现实世界”及其在实际中所观察到的证券价格增长率。

27.2 多个状态变量

假设有n个变量θ_1，θ_2，…，θ_n，$i=1$，2，…，n，它们服从以下形式的随机过程：

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i dt + s_i dz_i \tag{27-11}$$

$i=1$，…，n，其中dz_i是维纳过程，参数m_i和s_i分别表示增长率的期望与波动率，它们可以依赖于θ_i和时间。在第13章后附录13A中的式(13A-10)，我们提供了一个可以用于多个变量的伊藤引理。这个结果表示，一个只依赖于θ_i的证券价格f具有n个随机部分，并且可以表示成

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i dz_i \tag{27-12}$$

在这个方程里，μ表示证券的收益率期望，$\sigma_i dz_i$表示在这个收益中可以归咎于θ_i的部分，μ和σ_i都可能依赖于θ和时间。

在网页 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes 的 Technical Note 30 中我们证明了

$$\mu - r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i \tag{27-13}$$

式中λ_i是θ_i的风险市场价格。这个方程将投资者对一个证券的额外收益率要求与λ_i和σ_i联系了起来。式(27-9)是这个方程在$n=1$时的特例。这个式子右端的$\lambda_i\sigma_i$衡量投资者对一个证券由于受θ_i影响而要求额外收益率补偿的程度。如果$\lambda_i\sigma_i=0$，那么没有影响。如果$\lambda_i\sigma_i>0$，那么投资者要求有更高的收益率来补偿由θ_i所引进的风险。当$\lambda_i\sigma_i<0$时，对θ_i的依赖性使得投资者对其所要求的收益率比不依赖θ_i时低。当一个证券会降低而不是增加一个典型投资者的投资组合风险时，情况$\lambda_i\sigma_i<0$才会成立。

【例27-3】 一只股票依赖于三个标的变量：原油价格、黄金价格和一个股票指数。假如这三个变量的风险市场价格分别是0.2、-0.1和0.4，还假定我们已经估计出了式(27-12)中相对于这三个变量的σ_i分别是0.05、0.1和0.15. 这只股票中比无风险利率高出的额外收益率为

$$0.2 \times 0.05 - 0.1 \times 0.1 + 0.4 \times 0.15 = 0.06$$

即每年6.0%。如果有其他变量也影响这只股票的价格，那么只要这些变量的风险市场价格为零，我们的结论仍然成立。

式(27-3)与 Stephen Ross 在 1976 年发展的套利定价理论有着密切的关系[⊖]。连续时间下的资本资产定价模型(CAPM)可以被看成是这个方程的特殊情况，CAPM 认为投资者会要求额外收益来补偿由于和市场收益风险的相关性而带来的风险，而对其他的风险并不要求补偿。与股票市场收益相关的风险通常被称为**系统风险**(systematic risk)，而其他的风险被称为**非系统风险**(nonsystematic risk)。如果 CAPM 是正确的话，那么 λ_i 对 θ_i 变化与市场收益之间的相关系数成比例。当 θ_i 与市场收益不相关时，λ_i 是零。

27.3 鞅

鞅是一个没有漂移的随机过程[⊜]。如果一个变量 θ 的过程具有以下形式：

$$d\theta = \sigma dz$$

那么该变量就是一个鞅，式中 dz 是个维纳过程。变量 σ 本身也可以是随机的，它可以依赖于 θ 和其他的随机变量。鞅具有一个性质：它在将来任何时间的期望值都等于今天的取值。这意味着

$$E(\theta_T) = \theta_0$$

式中，θ_0 和 θ_T 分别表示 θ 在时间 0 和 T 的取值。为了理解这个结果，我们注意在一个很小的时间区间上 θ 的变化服从均值为 0 的正态分布，因而 θ 在一个很小的时间区间上变化的期望值是零。θ 在时间 $0 \sim T$ 之间的变化是由它在许多很小时间区间上变化的和组成的，因此 θ 在时间 $0 \sim T$ 之间变化的期望值必须是零。

等价鞅测度结果

假设 f 和 g 是两个只依赖于一个不确定因素的可交易衍生产品的价格。我们假设这些证券在我们考虑的时间区间内不提供任何收入[⊜]。定义

$$\phi = \frac{f}{g}$$

变量 ϕ 是 f 关于 g 的相对价格。这可以理解成把 f 的价格基于 g(而不是美元)来做单位。证券价格的 g **叫做计价单位**(numeraire)。

等价鞅测度结果说明了在没有套利机会时，对于某个风险市场价格的选择，ϕ 是个鞅。不但如此，对一个给定的计价单位证券 g，而在同一个风险市场价格的选择下，所有的证券价格 f 都会使 ϕ 成为鞅，而且所选择的风险市场价格正好是 g 的波动率。换句话说，当风险市场价格等于 g 的波动率时，对所有的证券价格 f，比值 f/g 都是鞅。(注意，风险的市场价格与波动率具有同样的维数，即两变量均为时间的平方根，因此风险的市场价格的选择也为有效。)

为了证明这个结果，我们假设 f 和 g 的波动率分别是 σ_f 和 σ_g。当一个世界里的风险市场价格是 σ_g 时，从式(27-10)我们可以得到

$$df = (r + \sigma_g\sigma_f)f dt + \sigma_f f dz$$

$$dg = (r + \sigma_g^2)g dt + \sigma_g g dz$$

利用伊藤引理，可以得到

$$d\ln f = (r + \sigma_g\sigma_f - \sigma_f^2/2)dt + \sigma_f dz$$

$$d\ln g = (r + \sigma_g^2/2)dt + \sigma_g dz$$

⊖ 见 S. A. Ross, "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing," *Journal of Economic Theory*, 13 (December 1976): 343-62。

⊜ 更准确地讲，对于一系列过程变量 X_0，X_1，…，X_n，…，如果对于所有 $i>0$ 时，$E(X_i \mid X_{i-1}, X_{i-2}, \cdots, X_0) = X_{i-1}$，其中 E 为期望算子，那么该列变量被称为鞅。

⊜ 习题 27.8 将这里的分析扩展到了证券提供收入的情形。

于是

$$d(\ln f - \ln g) = (\sigma_g\sigma_f - \sigma_f^2/2 - \sigma_g^2/2)\,dt + (\sigma_f - \sigma_g)\,dz$$

即

$$d\left(\ln \frac{f}{g}\right) = -\frac{(\sigma_f - \sigma_g)^2}{2}dt + (\sigma_f - \sigma_g)\,dz$$

利用伊藤引理，可以从 $\ln(f/g)$ 得出 f/g

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = (\sigma_f - \sigma_g)\frac{f}{g}dz \tag{27-14}$$

这说明 f/g 是个鞅，并证明等价鞅测度结果，我们把以 g 的波动率 σ_g 作为风险市场价格的世界叫做基于 g 作为计价单位的**远期风险中性**(forward risk neutral)世界。

由于在一个关于 g 是远期风险中性世界里 f/g 是个鞅，由本节开始时的结果，我们有

$$\frac{f_0}{g_0} = E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

即

$$f_0 = g_0 E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \tag{27-15}$$

其中 E_g 表示在一个关于 g 为远期中性世界里的期望。

27.4 计价单位的其他选择

我们现在给出几个关于应用等价鞅测度结果的例子。第一个例子说明这与我们一直用到现在的传统风险中性定价结果是一致的。其他的例子为第 28 章中关于债券期权、利率上限以及互换期权定价做准备。

27.4.1 货币市场账户作为计价单位

美元货币市场账户是一个证券，它在时间 0 的价值是 1 美元，并且在任何时刻都挣取瞬时无风险利率 r[⊖]。变量 r 可以是随机的。如果我们令 g 表示货币市场账户，那么它以 r 的速度增长，于是

$$dg = rg\,dt \tag{27-16}$$

g 的漂移项是随机的，但它的波动率是零。由 27.3 节的结论，我们知道在风险市场价格为零的世界里，f/g 是鞅，这正是我们以前定义的传统风险中性世界。从式(27-15)可以得到

$$f_0 = g_0\,\hat{E}\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \tag{27-17}$$

其中 $\hat{E}$ 表示在传统风险中性世界里的期望。

在这种情况下，$g_0 = 1$，以及

$$g_T = e^{\int_0^T r\,dt}$$

于是式(27-17)变成了

$$f_0 = \hat{E}\left(e^{-\int_0^T r\,dt} f_T\right) \tag{27-18}$$

或

$$f_0 = \hat{E}\left(e^{-\bar{r}T} f_T\right) \tag{27-19}$$

⊖ 货币市场账户是如下证券当 Δt 趋于零时的极限。在第一个长度为 Δt 的短时间区间上按初始 Δt 段利率投资。在时间 Δt 时，再以 Δt 时的利率投资在下一个 Δt 时间段上；在时间 $2\Delta t$ 时，再按新的 Δt 段利率投资在下一个 Δt 时间段上，等等。其他货币中的货币市场账户与美元类似。

其中$\bar{r}$是r在时间$0 \sim T$之间的平均值。这个方程给出了一种对利率衍生产品定价的方法，即在传统风险中性世界里对短期利率r进行模拟，在每一个试验里我们可以计算收益，并用短期利率r在模拟样本路线上的平均值来贴现。

当我们假设短期利率r是常数时，式(27-19)简化成了

$$f_0 = e^{-rT}\hat{E}(f_T)$$

这正是我们在以前章节中建立的风险中性定价关系。

27.4.2 零息债券价格作为计价单位

定义一个在时间T收益为1美元的零息债券在时间t的价格$P(t, T)$，我们现在探讨当取g为$P(t, T)$时会意味着什么。我们用E_T表示在一个对$P(t, T)$为远期风险中性世界里的期望。由于$g_T = P(T, T) = 1$和$g_0 = P(0, T)$，式(27-15)给出

$$f_0 = P(0,T)E_T(f_T) \tag{27-20}$$

注意式(27-20)与式(27-19)之间的区别。在式(27-19)里，贴现是在期望算子里面取值，而在式(27-20)里，贴现是由$P(0, T)$来表示，而且是取在期望算子的外面。当我们利用关于$P(t, T)$为远期风险中性的世界时，对一个仅在时间T有收益的证券定价时可以简化许多。

考虑任意变量θ[⊖]。关于θ的一个到期日为T的远期合约是一个在时间T收益为$\theta_T - K$的合约，这里θ_T是θ在时间T的值，我们用f表示这个远期合约的价值。从式(27-20)我们有

$$f_0 = P(0,T)[E_T(\theta_T) - K]$$

θ的远期价格F是使得f_0等于零的K值。这样我们有

$$P(0,T)[E_T(\theta_T) - F] = 0$$

或

$$F = E_T(\theta_T) \tag{27-21}$$

式(27-21)表明，在一个对于$P(t, T)$为远期风险中性的世界里任何变量(利率除外)的远期价格都等于它未来即期价格的期望值。注意远期价格与期货价格的区别，17.7节我们曾证明了在一个传统风险世界里，一个变量的期货价格等于它在将来时间即期价格的期望。

式(27-20)表明，我们可以这样对一个收益在时间T的证券定价：首先在一个对于在时间T到期的债券价格为风险中性的世界里计算收益的期望值，然后以在时间T到期的无风险利率进行贴现。式(27-21)说明，在计算所收益期望时，可以假定标的变量的期望值等于其远期价格。

27.4.3 债券作为计价单位时的利率

在下一个结果里，我们定义$R(t, T, T^*)$为在时间t所观察到的$T \sim T^*$之间的远期利率。它的复利区间是$T^* - T$(比如，如果$T^* - T = 0.5$，利率为半年复利一次，如果$T^* - T = 0.25$，利率是按季度复合，等等)。对一个在时间T和T^*之间的零息债券，它在时间t所观察到的远期价格是

$$\frac{P(t,T^*)}{P(t,T)}$$

因为远期利率是相应债券的远期价格所隐含的利率，也就是说

$$\frac{1}{[1 + (T^* - T)R(t,T,T^*)]} = \frac{P(t,T^*)}{P(t,T)}$$

于是

⊖ 以后我们将会看到，关于利率的远期合约与关于其他变量的远期合约是不同的。远期利率是由远期债券价格所隐含的利率。

$$R(t,T,T^*) = \frac{1}{T^* - T}\left[\frac{P(t,T)}{P(t,T^*)} - 1\right]$$

或

$$R(t,T,T^*) = \frac{1}{T^* - T}\left[\frac{P(t,T) - P(t,T^*)}{P(t,T^*)}\right]$$

如果我们令

$$f = \frac{1}{T^* - T}[P(t,T) - P(t,T^*)]$$

和 $g = P(t, T^*)$，那么等价鞅测度结果说明在一个关于 $P(t, T^*)$ 为风险中性的世界里 $R(t, T, T^*)$ 是个鞅。这意味着

$$R(0,T,T^*) = E_{T^*}[R(T,T,T^*)] \tag{27-22}$$

式中 E_{T^*} 表示在关于 $P(t, T^*)$ 为风险中性世界里的期望。

变量 $R(0, T, T^*)$ 是在时间 0 所观察的用于时间 T 和 T^* 之间的远期利率，因此式(27-22)表明在一个对期限为 T^* 的零息债券为风险中性的世界里，远期利率等于在将来时刻利率的期望。与式(27-20)中的结果一起，这个结果将为我们在第 28 章中关于利率上限的讨论提供很大帮助。

27.4.4 年金因子作为计价单位

作为等价鞅测度结果的下一个应用，我们考虑一个从时间 T 开始的利率互换，它的付款时间是在 T_1，T_2，…，T_N。定义 $T_0 = T$，假设这个互换的本金是 1 美元，在时间 $t(t \leqslant T)$ 的远期互换率(使得互换合同的价值为零的定息方利率)为 $s(t)$。互换合同对于支付固定利率的价值为

$$s(t)A(t)$$

式中

$$A(t) = \sum_{i=0}^{N-1}(T_{i+1} - T_i)P(t,T_{i+1})$$

在第 7 章，我们证明了当给最后一个互换日期的支付双方都加上本金时，互换合同的浮动利息方在合同开始时的价值等于它的本金。这说明了如果我们在时间 T_N 对浮息方加上 1 美元，那么它在时间 T 的值是 1 美元(这是因为当贴现率为 LIBOR/互换利率时，LIBOR 浮动利率债券所有支付款项的贴现值等于债券的本金)。时间 T_N 时的 1 美元在时间 t 的价值是 $P(t, T_N)$，而在时间 T_0 的 1 美元在时间 t 的价值是 $P(t, T_0)$。因此，浮息方的价值在时间 t 为

$$P(t,T_0) - P(t,T_N)$$

令定息方和浮息方的价值相等，我们得到

$$s(t)A(t) = P(t,T_0) - P(t,T_N)$$

或

$$s(t) = \frac{P(t,T_0) - P(t,T_N)}{A(t)} \tag{27-23}$$

令 f 等于 $P(t, T_0) - P(t, T_N)$，g 等于 $A(t)$，利用等价鞅测度结果我们可以得到

$$s(t) = E_A[s(T)] \tag{27-24}$$

式中 E_A 表示在关于 $A(t)$ 为风险中性的世界里的期望。因此，在一个关于 $A(t)$ 为远期风险中性的世界里，未来互换率的期望值等于目前的互换率。

对于任何一个证券 f，式(27-15)说明

$$f_0 = A(0)E_A\left[\frac{f_T}{A(T)}\right] \tag{25-25}$$

这个结果与式(27-24)一起将对第 28 章推导欧式利率互换期权标准市场模型起关键作用。

27.5 多个独立因子的情况

我们可以把27.3节与27.4节的结果推广到多个独立因子的情形[⊖]。假如有 n 个独立因子，而 f 和 g 在传统风险中性世界里服从的过程是

$$df = rfdt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f dz_i$$

和

$$dg = rgdt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i} g dz_i$$

利用27.2节里的结果，其他内部一致的风险中性世界可由下式定义

$$df = \left[r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{f,i}\right] fdt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f dz_i$$

和

$$dg = \left[r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{g,i}\right] gdt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i} g dz_i$$

其中 $\lambda_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 n 个风险市场价格，真实的世界可以看成是这些世界中的一个特例。

我们把在 $\lambda_i = \sigma_{g,i}$ 的特殊情况称为关于 g 为远期风险中性的世界。由于 dz_i 之间都是不相关的，利用伊藤引理，我们可以证明 f/g 所服从过程的漂移项是零（见练习题27.12）。27.3节和27.4节中其他的结果（从式(27-15)往后）也都仍然成立。

27.6 改进布莱克模型

在17.8节中我们曾指出，布莱克模型是利用标的资产的远期或期货价格对欧式期权定价的流行工具。接下来我们将放宽常数利率的假设，并说明当利率为随机变量时，我们仍可以采用布莱克模型利用远期或期货价格对欧式期权定价。

考虑一个标的资产执行价格为 K、期限为 T 的欧式看涨期权。由式(27-20)得出，这个看涨期权的价格为

$$c = P(0,T)E_T[\max(S_T - K, 0)] \tag{27-26}$$

式中 S_T 是标的股票在时间 T 的价格，E_T 表示一个关于 $P(t, T)$ 为远期风险中性世界里的期望值。定义 F_0 和 F_T 分别为在 T 时刻到期的远期合约在0时刻和 T 时刻的价格，因为 $S_T = F_T$，

$$c = P(0,T)E_T[\max(F_T - K, 0)]$$

假设 F_T 在所考虑的远期风险中性世界里是对数正态，而且 $\ln(F_T)$ 的标准方差等于 $\sigma_F\sqrt{T}$，这是因为远期价格所服从随机过程中的波动率为 σ_F，附录14A证明

$$E_T[\max(F_T - K, 0)] = E_T(F_T)N(d_1) - KN(d_2) \tag{27-27}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[E_T(F_T)/K] + \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_T(F_T)/K] - \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F\sqrt{T}}$$

由式(27-21)我们得出 $E_T(F_T) = E_T(S_T) = F_0$，因此

$$c = P(0,T)[F_0 N(d_1) - KN(d_2)] \tag{27-28}$$

⊖ 独立性条件并不关键，如果因子不独立，我们可以将其正交化。

式中

$$d_1 = \frac{\ln[F_0/K] + \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[F_0/K] - \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

类似地，

$$p = P(0,T)[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \tag{27-29}$$

式中 p 是执行价格为 K、期限为 T 的欧式看跌期权的价格。以上模型即为布莱克模型。当利率为随机变量时，这一模型对投资资产以及消费资产均适用，式中 F_0 为资产的远期价格，变量 σ_F 可以被解释为远期资产价格的波动率（常数）。

27.7 资产交换期权

下面我们考虑将一个价值为 U 的投资资产转换成一个价值为 V 的投资资产的期权。在 25.13 节中我们对这种期权已经讨论过。假设 U 和 V 的波动率分别是 σ_U 和 σ_V，它们之间的相关系数是 ρ。

首先假定这两个资产不提供收入。将计价单位 g 选成 U，而且在式(27-15)中令 $f=V$，我们有

$$V_0 = U_0 E_U \left(\frac{V_T}{U_T} \right) \tag{27-30}$$

式中 E_U 表示在一个关于 U 为风险中性世界里的期望值。

然后我们在式(27-15)中令 f 为所考虑期权的价值，即资产交换期权的价值。于是 $f_T = \max(V_T - U_T, 0)$，这样会得到

$$f_0 = U_0 E_U \left[\frac{\max(V_T - U_T, 0)}{U_T} \right]$$

即

$$f_0 = U_0 E_U \left[\max\left(\frac{V_T}{U_T} - 1, 0 \right) \right] \tag{27-31}$$

而 V/U 的波动率 $\hat{\sigma}$ 满足（见练习题 27.14）

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V$$

利用附录 14A，式(27-31)可以写成

$$f_0 = U_0 \left[E_U \left(\frac{V_T}{U_T} \right) N(d_1) - N(d_2) \right]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + \hat{\sigma}^2 T/2}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \quad 和 \quad d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

由式(27-30)我们得到

$$f_0 = V_0 N(d_1) - U_0 N(d_2) \tag{27-32}$$

这就是在资产不提供收入的情况下将一个资产换成另一个资产的期权价格。

练习题 27.8 证明了当 f 和 g 以 q_f 和 q_g 的速度提供票息时，式(27-15)变为

$$f_0 = g_0 e^{(q_f - q_g)T} E_g \left(\frac{f_T}{g_T} \right)$$

因此，式(27-30)和式(27-31)变为

$$E_U \left(\frac{V_T}{U_T} \right) = e^{(qU - qV)T} \frac{V_0}{U_0}$$

和

$$f_0 = e^{-qUT}U_0E_U\left[\max\left(\frac{V_T}{U_T}-1,0\right)\right]$$

式(27-32)变为

$$f_0 = e^{-qVT}V_0N(d_1) - e^{-qUT}U_0N(d_2)$$

而 d_1 和 d_2 则被重新定义成

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0)+(qU-qV+\hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \text{ 和 } d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

这正是式(25-5)所给出关于资产交换期权的结果。

27.8 计价单位变换

本节我们考虑计价单位的变换对一个随机变量所服从过程的影响。首先假设市场变量是一个可交易证券的价格 f。如果在一个世界里 dz_i 的风险市场价格为 λ_i，我们将会有

$$df = \left[r + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sigma_{f,i}\right]fdt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{f,i}fdz_i$$

与此类似，当风险市场价格为 λ_i^* 时，

$$df = \left[r + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*\sigma_{f,i}\right]fdt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{f,i}fdz_i$$

从这里我们可以看到，从第一个世界转换到第二个世界将会使一个可交易证券 f 的增长率期望增加

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^* - \lambda_i)\sigma_{f,i}$$

下面我们考虑一个不是可交易证券价格的变量 v。对于风险市场价格的变化，在网页 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes 里的 Technical Note 20 中证明了 v 增长率期望的变化与可交易证券价格增长率的变化是一样的，增长量为

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^* - \lambda_i)\sigma_{v,i} \tag{27-33}$$

其中 $\sigma_{v,i}$ 为 v 波动率的第 i 个成分。

当我们从一个计价单位 g 变化成另一个计价单位 h 时，$\lambda_i = \sigma_{g,i}$ 和 $\lambda_i^* = \sigma_{h,i}$。定义 $w = h/g$ 和 w 波动率的第 i 个成分为 $\sigma_{w,i}$。由伊藤引理(见练习题 27.14)，我们得出

$$\sigma_{w,i} = \sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}$$

于是式(27-33)变成了

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^{n}\sigma_{w,i}\sigma_{v,i} \tag{27-34}$$

我们把 w 称为**计价单位比率**(numeraire ratio)。式(27-34)等价于

$$\alpha_v = \rho\sigma_v\sigma_w \tag{27-35}$$

其中 σ_v 是 v 的总波动率，σ_w 是 w 的总波动率，ρ 是 v 和 w 之间的瞬时相关系数。[⊖]

⊖ 为了说明这一点，我们注意在很短一段时间 Δt 内，v 和 w 的变化 Δv 和 Δw 可由以下方程给出：

$$\Delta v = \cdots + \Sigma\sigma_{v,i}v\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta w = \cdots + \Sigma\sigma_{w,i}w\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$$

由于 dz_i 之间互不相关，可得到当 $i\neq j$ 时 $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0$，并且由 ρ 的定义，我们有

$$\rho_v\sigma_v w\sigma_w = E(\Delta v\Delta w) - E(\Delta v)E(\Delta w)$$

忽略比 Δt 高的项时可以得出

$$\rho\sigma_v\sigma_w = \Sigma\sigma_{w,i}\sigma_{v,i}$$

这个结果简单得令人惊奇。当从一个计价单位转换成另外一个计价单位时，一个变量 v 的增长率将会增加，而增加的幅度是 v 百分比变化和计价单位比率百分比变化的瞬时协方差。在第29章我们将把这个结果用在对时间调整和 Quanto 调整的问题上。

本章的结果的一个特殊情形是从现实世界转换成传统风险中性世界（这时所有的风险市场价格均为零）。由式(27-33)可知 v 增长率的变化为 $-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sigma_{v,i}$，这对应于当 v 是可交易证券价格时式(27-13)中的结果。我们还证明了当 v 不是可交易证券价格时这个结果也是成立的。一般来讲，将一个不是可交易证券价格的变量从一个世界转换到另一个世界与可交易证券价格的情形是相同的。

小结

一个变量的风险市场价格定义了依赖于这个变量的可交易证券的风险和收益之间的平衡关系。当只有一个变量时，一个衍生产品高于无风险利率的额外收益率等于风险市场价格乘以它的波动率。当有许多变量时，额外收益率等于每个变量的风险市场价格与相应波动率的乘积之和。

关于衍生产品定价的一个强有力工具是风险中性定价方法。我们在第12章和第14章中已经引进了这个概念。风险中性定价原理说明，对衍生产品定价时，如果假定世界是风险中性的，那么我们所得出的衍生产品的价格不但在风险中性世界里正确，而且在其他世界里也一样正确。在传统风险中性世界里，所有变量的风险市场价格都是零。本章我们扩充了风险中性定价原理。当利率是随机时，我们证明了可以有许多不但有意思，而且也很有用处的不同于传统风险中性世界的选择。

一个鞅是个没有漂移的随机过程，任何一个服从鞅的过程都有以下简单性质：它在将来任何时刻的期望值都等于它现在的值。等价鞅测度说明，如果 g 是某个证券的价格，那么在一个关于 g 为远期风险中性的世界里，对于所有的证券 f 的比值 f/g 都是鞅。因此，当适当地选择计价单位 g 时，我们可以简化对许多依赖于利率衍生产品的定价。

本章采用了等价鞅测度原理推广出了当利率为随机变量时的布莱克模型，以及资产互换欧式期权定价模型，在第28～32章中，这些模型对利率衍生产品定价会非常有用。

推荐阅读

Baxter, M., and A. Rennie, *Financial Calculus*. Cambridge University Press, 1996.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," *Econometrica*, 53 (1985): 363–84.

Duffie, D., *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3rd edn. Princeton University Press, 2001.

Garman, M., "A General Theory of Asset Valuation Under Diffusion State Processes," Working Paper 50, University of California, Berkeley, 1976.

Harrison, J.M., and D.M. Kreps, "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," *Journal of Economic Theory*, 20 (1979): 381–408.

Harrison, J.M., and S.R. Pliska, "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and Their Applications*, 11 (1981): 215–60.

练习题

27.1 一个不是投资资产价格的变量的风险市场价格是如何定义的？

27.2 假设黄金价格的风险市场价格是零。如果储藏费是每年1%，无风险利率是每年6%，那么金价的增长率期望是多少？假设黄金不提供收入。

27.3 考虑两个依赖于同一市场变量的证券，它们的收益率期望分别是8%和12%。第一个证券的波动率是15%，瞬时无风险利率是4%。第二个证券的波动率是多少？

27.4 一个原油公司成立的唯一目的是在得克萨斯州内的一个小区域里寻找原油。公司的价格主要依赖于两个随机变量：原油价格与原油储备量。讨论第二个变量的风险市场价格应该是正、是负还是零。

27.5 一个衍生产品价格与两个不分红的可交易证券的价格有关。通过构造由衍生产品以及两个可交易证券的无风险组合，推导衍生产品价格所满足的微分方程。

27.6 假设利率 x 服从以下过程

$$dx = a(x_0 - x)dt + c\sqrt{x}dz$$

式中 a、x_0 和 c 是常数。我们进一步假设 x 的风险市场价格是 λ，在传统风险中性世界里，x 所服从的过程是什么？

27.7 当证券 f 以 q 的速度提供收益时，证明式(27-9)变成了 $\mu + q - r = \lambda\sigma$（提示：将从 f 得到的收入再投资于 f 中，这样可以构造一个新的不提供收入的证券 f^*）。

27.8 当 f 和 g 分别以 q_f 和 q_g 的速度提供收益时，式(27-15)变为

$$f_0 = g_0 e^{(q_f - q_g)T} E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

（提示：将从 f 得到的收入再投资于 f，从 g 得到的收入再投资于 g，这样我们可以构造新的不提供收入的证券 f^* 和 g^*。）

27.9 "一个利率将来值的期望大于它在现实世界里的期望值"。这个结论对以下变量的风险市场价格有什么影响？(a)一个利率；(b)一个证券价格。你认为这个结论有可能成立吗？给出理由。

27.10 变量 S 是一个以货币A为计量的投资资产，它以 q 的速度提供收益。在现实世界里，它服从过程

$$dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz$$

可以定义必要的变量，给出在以下情况下 S 的过程，以及相应的风险市场价格。

(a) 在一个对货币A是传统风险中性的世界里。

(b) 在一个对货币B是传统风险中性的世界里。

(c) 在一个对货币A中，在时间 T 到期的零息债券为风险中性的世界里。

(d) 在一个对货币B中，在时间 T 到期的零息债券为风险中性的世界里。

27.11 解释远期利率的定义与其他变量的远期价值之间的区别，这些变量可以是股票价格、商品价格、货币兑换率。

27.12 证明在以下假设下，27.5节中的结论

$$df = \left[r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{f,i}\right] f dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f dz_i$$

和

$$dg = \left[r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{g,i}\right] g dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i} g dz_i$$

其中 dz_i 是互不相关的，当 $\lambda_i = \sigma_{g,i}$ 时，f/g 是个鞅。

27.13 证明当 $w = h/g$，而 h 和 g 都依赖于 n 个维纳过程时，w 波动率的第 i 个成分是 h 的第 i 个成分减去 g 的第 i 个成分。（提示：利用式(13A-11)得出 $\ln g$ 和 $\ln h$ 的过程）。

作业题

27.14 一个证券的价格依赖于两个随机变量：黄铜价格和日元/美元兑换率。证券的价格与这两个变量有正向关系。假如这两个变量的风险市场价格分别是0.5和0.1，如果黄铜价保持不变，那么证券的波动率将是每年8%；如果日元/美元兑换率保持不变，那么证券的波动率将是每年12%。无风险利率是每年7%，证券的增长率期望是多少？如果两个变量是不相关的，那么证券的

波动率是多少？

27.15 假设在时间 T 到期的零息债券价格服从以下过程

$$dP(t,T) = \mu_P P(t,T)\,dt + \sigma_P P(t,T)\,dz$$

而一个依赖于这个债券的衍生产品价格服从过程

$$df = \mu_f f\,dt + \sigma_f f\,dz$$

假设随机性只有一个来源，而且 f 不提供收入。

(a) f 在时间 T 到期合约的远期价格 F 是什么？

(b) 在一个关于 $P(t, T^*)$ 为远期风险中性的世界里，F 服从什么过程？

(c) 在传统的风险中性的世界里，F 服从什么过程？

(d) 在一个关于 $P(t, T^*)$ 为远期风险中性的世界里，F 的过程是什么？这里 $T^* \neq T$，假设 σ_P^* 是这个债券的波动率。

27.16 考虑一个非利率的变量。

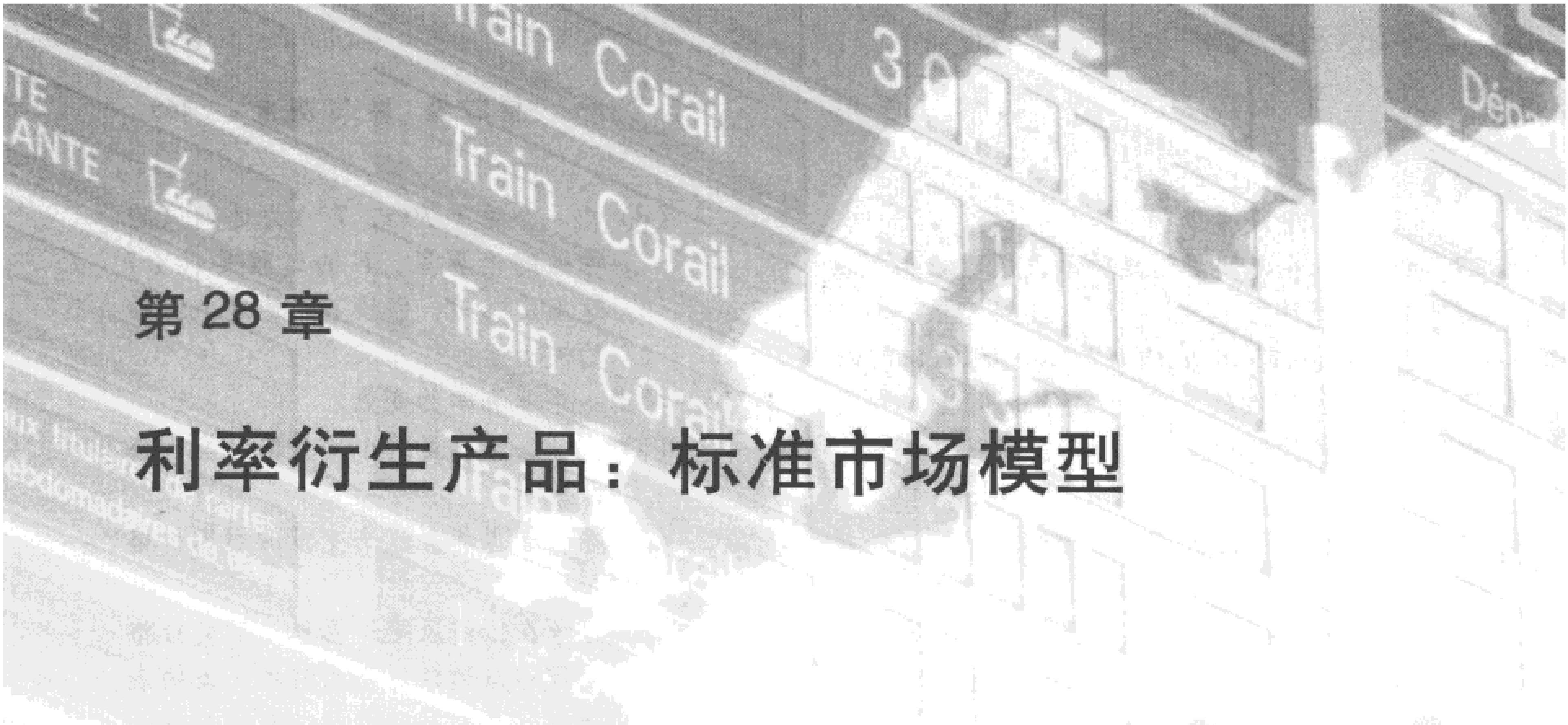
(a) 在什么世界里这个变量的期货价格是鞅？

(b) 在什么世界里这个变量的远期价格是鞅？

(c) 推导在传统风险世界里，期货价格的漂移与远期价格漂移项之差的表达式。必要时可以定义新的变量。

(d) 在5.8节中当期货价格高于远期价格时，我们曾给出一些观点，证明你的结果与这些观点是一致的。

PDG



第 28 章

利率衍生产品：标准市场模型

利率期权是指收益在某种程度上依赖于利率水平的期权产品。在 20 世纪八九十年代，利率衍生产品的交易量在场外市场和交易所内都增长得非常迅速。许多新产品都是为了满足客户的特殊需要。交易人员所面临的一个关键挑战是寻找好的有效的方法来对这些产品进行对冲和定价。对利率衍生产品定价要比对股票和货币衍生产品定价困难得多，原因有许多方面。

- 单一利率的行为比一个股票价格或汇率要复杂得多。
- 对许多利率产品的定价都需要建立一个模型来描述整个零息利率曲线。
- 利率曲线上的每一点都有不同的波动率。
- 利率既被用来贴现，又被用来确定衍生产品的收益。

本章将讨论场外交易中最流行的三种利率期权产品：债券期权、利率上限与下限以及互换期权。我们将讨论这些产品的运作方式以及如何采用标准市场模型来对这些产品定价。

28.1 债券期权

债券期权(Bond option)是指在将来某确定时刻 T 以某一确定价格 K 买入或卖出某个债券的权利。除了在场外市场进行交易外，债券期权常常隐含在一些债券内，其作用是在债券发行时达到吸引发行者或投资者的目的。

28.1.1 内含债券期权

具有内含期权债券的一个例子是**可赎回债券**(callable bond)，这种债券含有允许发行债券的公司在将来某时刻以事先约定的价格买回债券的条款，因此这种债券的持有人向发行人卖出了一个看涨期权。该期权中的执行价格，即**赎回价格**(call price)，是该债券发行人在赎回债券时必须支付给债券持有者的价格。可提前赎回债券通常在债券发行的最初几年内不能赎回[称为**锁定区间**(lock-out period)]，此后的赎回价格通常是时间的递减函数。例如，在某个 10 年期可提前赎回债券在债券发行的最初两年内，债券发行人没有赎回债券的权利，随后该债券的发行人有权在第三年和第四年以 110 美元的价格赎回；在第五年和第六年以 107.50 美元的价格赎回；在第七年和第八年以 106 美元的价格赎回；在第九年和第十年以 103 美元的价格将债券赎回。这个看涨期权的价值反映在债券的收益率报价中。一般附有可赎回条款债券比没有可赎回条款债券的收益率要高。

具有内含期权的另一类债券是**可退还债券**(puttable bond)，这种债券含有允许债券持有人在将来某一时间内以预先约定价格提前将债券退还给债券发行人并收回现金的条款。债券持有人在买入债券本身的同时，也买入了债券的看跌期权。对于债券持有人而言，由于看跌期权增加了债

券本身的价值，附有可退还条款的债券比没有这种条款的债券收益率要低。一个简单可退还债券的例子为 10 年期可退还债券，此债券的持有人有权在第五年末得到偿还(有时这类债券也被称为**可撤销债券**(retractable bond))。

贷款和储蓄产品有时也具有内含债券期权。例如，假定某金融机构的 5 年定期存款可以被提前提取而没有任何惩罚，那么它就包含一个债券美式看跌期权(存款是一个投资者有权在任何时刻以其面值卖给金融机构的债券)。类似地，在贷款和有抵押贷款中可以提前付清的权利也是关于债券的看涨期权。

最后，我们注意到银行或其他金融机构所提供的贷款许诺(loan commitment)可以看成是关于债券的看跌期权。例如，考虑某银行给某个潜在借款人报出 5 年期的年利率为 5%，此报价在随后的 2 个月内有效。在这种情况下，该客户事实上取得了在随后 2 个月内随时向金融机构按面值出售利率为 5% 的 5 年期债券的权利。

28.1.2 欧式债券期权

许多场外交易的债券期权和一些债券内含期权都是欧式期权。对于欧式期权定价的标准市场模型中通常所做的假设是债券的远期价格具有常数波动率 σ_B，因此我们可以用 27.6 节中的布莱克模型来对这些期权定价。在式(27-28)和式(27-29)中，令 σ_F 等于 σ_B，令 F_0 等于远期债券价格 F_B，那么

$$c = P(0,T)[F_B N(d_1) - KN(d_2)] \tag{28-1}$$

$$p = P(0,T)[KN(-d_2) - F_B N(-d_1)] \tag{28-2}$$

式中

$$d_1 = \frac{\ln(F_B/K) + \sigma_B^2 T/2}{\sigma_B \sqrt{T}} \quad \text{和} \quad d_2 = d_1 - \sigma_B \sqrt{T}$$

式中，K 为债券期权的执行价格，T 为期权的期限。

如 5.5 节所述，F_B 可以利用以下公式来计算

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0,T)} \tag{28-3}$$

式中 B_0 为债券在 0 时刻的价格，I 是在期权有效期内债券所支付息票的贴现值。在以上公式中，即期债券价格与远期债券价格均为**现金价格**(cash price)，而非**报价**(quoted price)。在 6.1 节中，我们曾解释了现金价与报价之间的关系。

式(28-1)和式(28-2)中的执行价格 K 应该是现金价格。如果一个合约将执行价格定义为当期权被行使时与债券交换的现金价格，那么 K 应该被设定为这一执行价格。但更常见的情形是执行价格为期权被行使时所对应的报价，这时 K 应等于执行价格加上在到期日时的应计利息。交易员将债券的报价称为**洁净价**(clean price)，将现金价称为**带息价格**(dirty price)。

【例 28-1】 考虑一个 10 个月期的欧式看涨期权，标的资产是期限为 9.75 年，面值为 1 000 美元的债券(当期权到期时，该债券的剩余期限为 8 年零 11 个月)。假设债券的当前现金价格为 960 美元，执行价格为 1 000 美元，10 个月期的无风险利率为每年 10%，债券远期价格的波动率为每年 9%，债券券息率为 10%，每半年支付一次。债券在第 3 个月及第 9 个月将支付 50 美元的利息(这意味着应计利息为 25 美元，报价为 935 美元)。我们假设 3 个月期和 9 个月期的无风险利率分别为 9.0% 和 9.5%。因此，支付利息的贴现值为

$$50e^{-0.09\times0.25} + 50e^{-0.095\times0.75} = 95.45$$

即 95.45 美元。由式(28-3)得出，债券远期价格为

$$F_B = (960 - 95.45)e^{0.1\times0.8333} = 939.68$$

(a) 如果执行价格为期权行使时为了取得该债券所付的现金价格，那么式(28-1)中的参数为 $F_B = 939.68$，$K = 1\,000$，$P(0,\ T) = e^{-0.1\times(10/12)} = 0.920\,0$，$\sigma_B = 0.09$ 及 $T = 10/12$，看涨期权的价格为 9.49 美元。

(b) 如果执行价格是期权行使时为了取得该债券所付的报价，因为期权的到期日是息票支付后的一个月，K 中必须再加上一个月的累计利息，因此 K 等于

$$1\,000 + 100 \times 0.083\,33 = 1\,008.33$$

式(28-1)中其他参数不变(即 $F_B = 939.68$，$P(0,\ T) = 0.920\,0$，$\sigma_B = 0.09$ 及 $T = 0.833\,3$)。看涨期权价格为 7.97 美元。

图 28-1 展示了当我们向前展望时，债券价格对数值的标准差变化形式。由于今天的债券价格没有不确定性，所以它的标准差为 0。另外，当债券到期时，债券价格等于其面值，所以这时标准差也为 0。但是，现在与债券到期日之间，标准差先是上升，然后再下降。

当对债券的欧式期权定价时，波动率 σ_B 应该取

$$\text{在到期时债券价格对数的标准差} / \sqrt{\text{期权期限}}$$

对于一个特定的标的债券，增加期权期限时会发生什么呢？图 28-2 显示了作为期权期限的函数，σ_B 的典型形状。一般来讲，当期权期限增大时，σ_B 会随之减小。

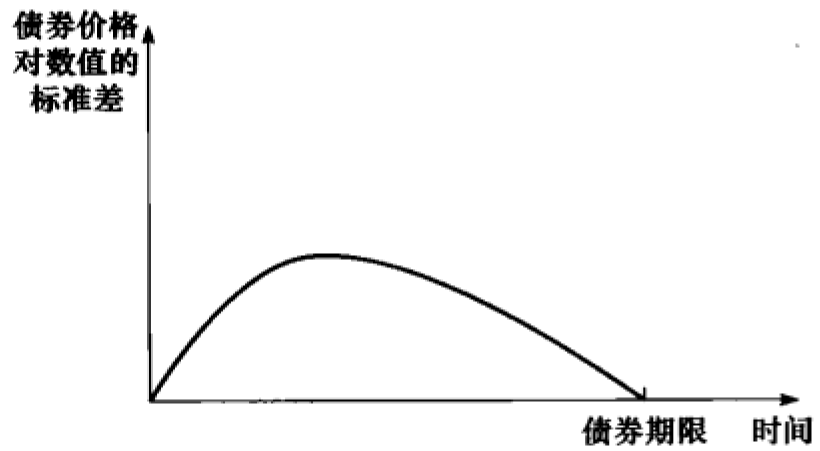


图 28-1　在将来时刻债券价格的对数的标准差

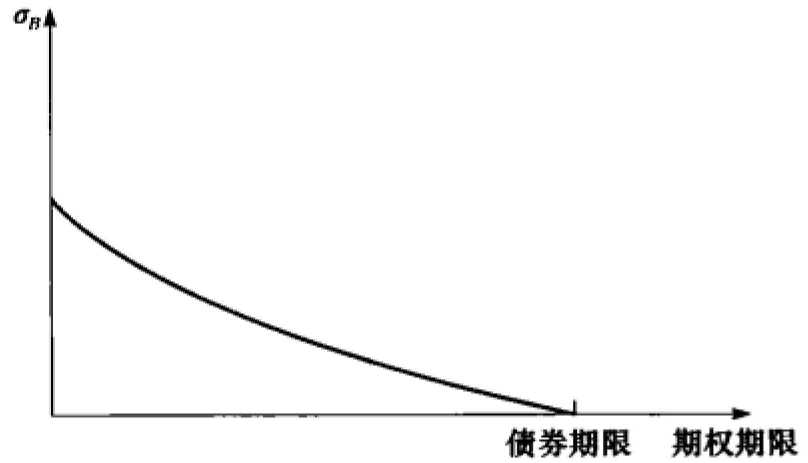


图 28-2　固定的债券远期价格的波动率 σ_B 与期权期限的变化关系

28.1.3　收益率波动率

债券期权报价所对应的波动率通常是收益率波动率而不是价格波动率。在市场上，人们用第 4 章引入的久期概念来将由报价得出的收益率波动率转换成价格波动率。假设 D 是第 4 章定义的期权标的债券在期权到期日时的修正久期。债券远期价格 F_B 与其相应的收益率 y_F 的变化 Δy_F 之间的关系满足

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -D\Delta y_F$$

即

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -Dy_F\frac{\Delta y_F}{y_F}$$

波动率是为了度量一个变量百分比变动的标准差。上式说明，在布莱克模型中的远期价格波动率 σ_B 与相应的远期收益率波动率 σ_y 近似地满足以下关系式

$$\sigma_B = Dy_0\sigma_y \tag{28-4}$$

式中 y_0 为 y_F 的初始值。当收益率波动率被用来对期权进行报价时，一个潜在的假设通常是我们会通过式(28-4)将该波动率转换为价格波动率，然后利用这个波动率和式(28-1)或式(28-2)来计算期权价格。假设某看涨期权的标的债券在期权到期时的修正久期为 5 年，远期收益率为 8%，由交易商给出的远期收益率波动率报价为 20%，这意味着对应于这一市场报价，期权的市场价格可由式(28-1)计算得出，公式中的变量 σ_B 等于

$$5 \times 0.08 \times 0.2 = 0.08$$

即每年 8%。

图 28-2 说明远期债券波动率与所考虑的期权有关。我们刚定义的远期收益率的波动率更像个常数，这也是交易员喜欢使用这个波动率的原因。

软件 DerivaGem 中的 Bond_Options 工作表可用于计算欧式债券期权的价格。在计算中，用户在定价模型中应选择 Black European 作为定价模型。用户输入收益率波动率，软件按上面所述方式应用这一波动率，执行价格既可以选择现金价格也可以选择市场报价。

【例 28-2】 考虑一个 10 年期、面值为 100 美元的债券的欧式看跌期权。债券票息率为 8%，每半年支付一次，期限为 2.25 年，执行价格为 115 美元，远期收益率的波动率为 20%，零息曲线为水平 5%(连续复利)。DerivaGem 显示债券的报价为 122.82 美元，当执行价格对应于市场报价时，期权价格为 2.36 美元。当执行价格为现金价格时，期权价格为 1.74 美元(见练习题 28.16 中的手工计算)。

28.2　利率上限和下限

在场外市场，金融机构所提供的一种很流行的利率期权是**利率上限**(interest rate cap)。为了帮助理解利率上限，我们首先考虑**浮动利息本票**(floating rate note)。在这种本票中，利率要被定期重置为 LIBOR。两次重置利率时间间隔被称为**票期**(tenor)。假定票期为 3 个月，浮动利息本票中最初 3 个月的利率为初始的 LIBOR 利率；接下 3 个月所对应的利率等于市场 LIBOR 利率，等等。

利率上限的设计是为了保证浮动利息债券中的浮动利率不超过某个水平，这一利率水平被称为**上限利率**(cap rate)。假定面值为 1000 万美元，上限期限为 5 年，上限利率为 4%(因为票期为 3 个月，这一个上限利率为每 3 个月复利一次)。这一上限合约保证了浮动利息本票中的浮动利率不会高于 4%。

在以下的分析中，首先忽略计量天数惯例对于计算结果的影响，我们假设付款日之间的时间间隔正好为 0.25 年(本节最后，我们将讨论计量天数惯例)。假设在某一个利率重置日，3 个月的 LIBOR 利率为 5%，浮动利率本票在 3 个月后需支付

$$0.25 \times 0.05 \times 10\,000\,000 = 125\,000 \text{ 美元}$$

在 3 个月 LIBOR 利率为 4% 的情况下，浮动利率本票在 3 个月后需支付

$$0.25 \times 0.04 \times 10\,000\,000 = 100\,000 \text{ 美元}$$

因此上限所提供的收益为 25 000 美元(125 000 − 100 000)。注意产品的收益并不发生在利率(即 5%)的重置日，而是发生在 3 个月以后。这一点反映了利率的观察时间与交割时间存在一个自然的时间差。

在利率上限内的每一个重置日上，如果 LIBOR 利率小于 4%，在 3 个月后的上限的收益为 0；如果 LIBOR 大于 4%，上限收益为 LIBOR 超出 4% 的溢差乘以面值 1000 万美元。在定义上限时，即使最初的 LIBOR 利率高于上限利率，但在第一个重置日仍然不会导致任何收益。在我们的例子中，上限期限为 5 年，因此总共有 19 个重置日(即在 0.25 年，0.50 年，0.75 年，…，4.75 年)

及 19 个潜在的收益日(即在 0.5 年，0.75 年，1.00 年，…，5.00 年)。

28.2.1 将利率上限看做利率期权的组合

考虑某一期限长度为 T 的利率上限，本金为 L，上限利率为 R_K。利率上限的重置日为 t_1，t_2，…，t_n，定义 $t_{n+1}=T$，R_k 为在 t_k 时刻观察到的 $t_k \sim t_{k+1}$ 之间的 LIBOR 利率($1 \leqslant k \leqslant n$)，利率上限在 t_{k+1}($k=1$，2，…，n)的收益为

$$L\delta_k \max(R_k - R_K, 0) \tag{28-5}$$

其中 $\delta_k = t_{k+1} - t_k$[⊖]，R_K 和 R_k 的复利频率等于重置日的频率。

由式(28-5)所表达的收益等价于一个关于在时间 t_k 所观察的 LIBOR 利率上的看涨期权，期权的收益时间为 t_{k+1}。一个利率上限包含 n 个这样的看涨期权。LIBOR 利率的重置日为 t_1，t_2，t_3，…，t_n，收益日为 t_2，t_3，t_4，…，t_{n+1}。上限中的 n 个看涨期权被称为**利率上限单元**(caplet)。

28.2.2 利率上限看做债券期权的组合

一个利率上限也可以被当成一个关于零息债券看跌期权的组合，看跌期权的收益发生在利率重置日。由式(28-5)定义的发生在 t_{k+1} 的收益等价于以下发生在 t_k 的收益

$$\frac{L\delta_k}{1+R_k\delta_k}\max(R_k - R_K, 0)$$

应用简单代数运算，可以得出以上表达式等价于

$$\max\left[L - \frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}, 0\right] \tag{28-6}$$

表达式

$$\frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}$$

是在 t_{k+1} 时支付 $L(1+R_K\delta_k)$ 的零息债券在时间 t_k 的价格。式(28-6)等于一个在 t_{k+1} 到期的零息债券看跌期权的收益，期权的到期日为 t_k，零息债券的面值为 $L(1+R_K\delta_k)$，期权的执行价格为 L。因此，我们可以将利率上限看做一个关于零息债券欧式看跌期权的组合。

28.2.3 利率下限及利率双限

利率下限(floor)和**双限**(collar)[有时也被称为**下限-上限协议**(floor-ceiling agreement)]的定义与利率上限类似。利率下限在当利率低于一定水平时提供收益。采用以上的符号，利率下限在时间 t_{k+1}($k=1$，2，…，n)收益为

$$L\delta_k \max(R_K - R_k, 0)$$

同利率上限类似，利率下限是一个由利率看跌期权组成的交易组合，也是一个零息债券上看涨期权的组合。利率下限中的每一个期权被称为**下限单元**(floorlet)。利率双限确保支付与 LIBOR 有关的浮动利率介于两个上下限水平之间，它是一个利率上限长头寸与一个利率下限短头寸的组合。在构造利率双限时，通常使得上限的价格等于下限的价格。因此，进入利率双限交易的成本为 0。

如业界事例 28-1 所述，利率上限及下限之间存在一种平价关系式。

⊖ 我们将在本节的最后讨论天数计量惯例。

业界事例 28-1 利率上限与下限之间的看跌-看涨平价关系式

利率上限及下限之间存在一种看跌看涨平价关系式，此关系式为

上限价值 = 下限价值 + 利率互换价值

在以上关系式中，上限与下限具有同样的执行价格 R_K。在互换交易中，收入浮动利率同时付出固定利率 R_K，并且在第一个重置日没有支付，这里所涉及的三个产品具有同样的期限与付款频率。

为了说明以上关系式是正确的，我们考虑一个由利率上限长头寸和一个下限短头寸所组成的交易组合，利率上限在当 LIBOR 大于 R_K 时提供的收益为 LIBOR $-R_K$，利率下限的短头寸在当 LIBOR 小于 R_K 时提供的收益为

$$-(R_K - \text{LIBOR}) = \text{LIBOR} - R_K$$

因此对应于所有情形，交易组合的收益均为 LIBOR $-R_K$，这刚好等价于利率互换的收益，所以上限价值减去下限价值刚好等于互换的价值。

注意互换的构造往往在 0 时刻 LIBOR 决定了在第一个重置日的付款量，而上限及下限的构造是使得第一个重置日没有任何支付，这说明在这里互换的定义应指明在第一个重置日也没有任何支付。

28.2.4 上限与下限的定价

如式(28-5)所示，在 t_k 时间被重置利率的上限单元在时间 t_{k+1} 提供的收益为

$$L\delta_k \max(R_k - R_K, 0)$$

利用标准市场模型，这一利率上限单元的价格为

$$L\delta_k P(0, t_{k+1})[F_k N(d_1) - R_K N(d_2)] \tag{28-7}$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_k/R_K) + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_k/R_K) - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

F_k 是在时间 0 观察到的时间 $t_k \sim t_{k+1}$ 之间的远期利率，σ_k 是它的波动率。以上模型是布莱克模型的自然推广。波动率被 $\sqrt{t_k}$ 相乘，这是因为利率 R_k 的观察时间是 t_k，而贴现因子 $P(0, t_{k+1})$ 则反映了收益发生在时间 t_{k+1} 而不是在时间 t_k。相应的下限单元价格为

$$L\delta_k P(0, t_{k+1})[R_K N(-d_2) - F_k N(-d_1)] \tag{28-8}$$

【例 28-3】 考虑一个在一年后开始，并持续 3 个月的将1 000 万美元的 LIBOR 利率限定在 8% 以下(每季度付利一次)的利率上限。这里所描述的上限单元有可能是上限合约的一个组成部分。假定零息曲线为水平，每年 7%，复利频率为每季度一次，利率上限单元所对应的 3 个月期的远期利率波动率为每年 20%，对应于所有期限的(连续复利)利率均为 6.939 4%。在式(28-7)中，$F_k = 0.07$，$\delta_k = 0.25$，$L = 10$，$R_K = 0.08$，$t_k = 1.0$，$t_{k+1} = 1.25$，$p(0, tk+1) = e^{-0.069\,395 \times 1.25} = 0.916\,9$ 和 $\sigma_k = 0.20$ 同时

$$d_1 = \frac{\ln(0.07/0.08) + 0.2^2 \times 1/2}{0.20 \times 1} = -0.567\,7$$

$$d_2 = d_1 - 0.20 = -0.767\,7$$

因此上限单元的价格为

$$0.25 \times 10 \times 0.916\,9 \times [0.07N(-0.567\,7) - 0.08N(-0.767\,7)] = 0.005\,162$$

即 5 162 美元。这个结果也可以由 DerivaGem 求出。

每一个利率上限单元都必须通过式(28-7)来单独定价，类似地，每一个下限单元都必须通过式(28-8)来单独定价。一种定价的方法是对于不同的上限单元(或下限单元)采用不同的波动率，这些波动率被称为**即期波动率**(spot volatility)。另一种定价方法是对于构成上限(或下限)的所有上限单元(或下限单元)采用相同的波动率，但波动率随上限(下限)的有效期限变动。这一波动率被称为**单一波动率**[⊖](flat volatility)。虽然市场所报出的波动率常常为单一波动率，但是许多交易员却喜欢估计即期波动率，因为这可以帮助交易员来识别那些价格过高或价格过低的上限单元(或下限单元)。欧洲美元期货看跌(看涨)期权同利率上限单元(下限单元)非常相似，由利率上限单元和下限单元所隐含的 3 个月 LIBOR 即期波动率常常用于与那些由欧洲美元期货期权所隐含的波动率比较。

28.2.5 即期波动率和单一波动率

图 28-3 展示了一种典型的即期波动率和远期波动率与期限之间的函数关系(对于即期波动率情形，期限对应于利率上限单元与下限单元的到期日；对于单一波动率情形，期限是上限与下限的到期日)。单一波动率类似于即期波动率的累积平均值，因此其变动幅度较小。如图 28-3所示，在大约 2～3 年时，在波动率中我们常常会观测到某种“驼峰”(hump)形状。无论是由期权价格所隐含的波动率还是由历史数据计算出的波动率，我们都可以观测到这种驼峰形状。对于驼峰存在的原因，还没有一个定论。一种可能的解释如下：零息曲线中的短期利率由中央银行控制，而与短期利率对应的 2 年及 3 年的利率在一定程序上由交易员的交易行为决定，这些交易员对于短期利率的变化反应可能过于敏感，因此其交易行为会造成这些利率比短期利率的变化幅度要高。期限大于 2～3 年的利率具有在第 30 章将讨论的**回归均值**(mean reversion)特性，从而造成了波动率的下降。

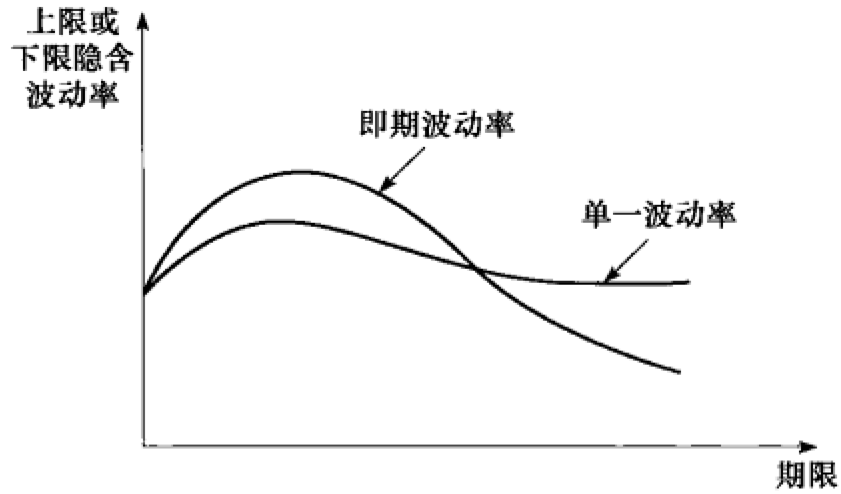


图 28-3 隐含波动率的驼峰现象

经纪人提供上限与下限的单一波动率表格，这些波动率所对应的产品通常为平值期权，这意味着上限和下限利率等于与上限付款日期相同的互换利率。表 28-1 显示了美国市场中典型的经纪人报价数据，其中上限区间为 3 个月，上限的有效期为 1～10 年不等。这里的波动率为单一波动率而不是即期波动率，数据显示了图 28-3 所示的驼峰现象。

表 28-1 典型的美元上限和下限隐含单一波动率的数据(每年%)

期限	买入价上限	卖出价上限	买入价下限	卖出价下限
1 年	18.00	20.00	18.00	20.00
2 年	23.25	24.25	23.75	24.75
3 年	24.00	25.00	24.50	25.50
4 年	23.75	24.75	24.25	25.25
5 年	23.50	24.50	24.00	25.00
7 年	21.75	22.75	22.00	23.00
10 年	20.00	21.00	20.25	21.25

⊖ 由单一波动率可以计算即期波动率，反之亦然(见练习题 28.20)。

28.2.6 模型的理论根据

布莱克模型的推广可以用于对上限单元定价，这一模型与对于在 t_{k+1} 到期的零息债券为远期风险中性的世界是内在一致的。27.4 节的分析说明：

- 任意一个证券的价格都等于在这个世界里证券在 t_{k+1} 的期望值乘上在 t_{k+1} 到期的零息债券价格[见式(27-20)]。
- 这一世界内，时间 t_k 与 t_{k+1} 之间的利率期望值等于远期利率[见式(27-22)]。

采用前面的符号，上面的第一个结论说明在 t_{k+1} 提供收益的上限单元价格为

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})E_{k+1}[\max(R_k - R_K,0)] \tag{28-9}$$

式中，E_{k+1} 代表对于在 t_{k+1} 到期的零息债券为远期风险中性世界中的期望值。假定上限标的远期利率的波动率为常数 σ_k，同时在这一世界里，R_k 服从对数正态分布，$\ln(R_k)$ 的标准差为 $\sigma_k\sqrt{t_k}$。由附录 14A，式(28-9)变为

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})[E_{k+1}(R_k)N(d_1) - R_K N(d_2)]$$

式中

$$d_1 = \frac{\ln[E_{k+1}(R_k)/R_K] + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_{k+1}(R_k)/R_K] - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma\sqrt{t_k}$$

第二个结论意味着

$$E_{k+1}(R_k) = F_k$$

与以上方程结合，我们可以得出关于上限的定价方程式(28-7)。这些结果表示，当将利率期望值设定为远期利率时，我们可以利用今天在市场所观察到的在 t_{k+1} 到期的利率对预期收益进行贴现。

28.2.7 使用 DerivaGem 软件

DerivaGem 软件可用于对利率上限与下限定价，其中的模型为布莱克模型。用户在 Cap_and_Swap_Option 工作页中应选择 Cap/Floor 作为产品类型，并选择 Black-European 为定价模型(Pricing Model)进行计算。定价中输入的零息曲线为连续复利形式，输入的数据包括上限有效期的起始日期及结束日期，单一波动率及上限付款的交割频率(即区间长度)。软件所产生的付款日期由结束日开始反向倒推到起始日。起始上限单元和下限单元所覆盖的区间为正常区间的 0.5 ~ 1.5 倍。例如，假定上限的有效期为 1.22 ~ 2.80 年，付款交割频率为季度，有效期内共有 6 个上限单元，它们分别为 2.55 ~ 2.80 年、2.30 ~ 2.55 年、2.05 ~ 2.30 年、1.80 ~ 2.05 年、1.55 ~ 1.80 年及 1.22 ~ 1.55 年。

28.2.8 计量天数惯例的影响

本节到现在为止所给出的公式没有反映计量天数惯例的信息(对于计量天数惯例的解释，见 6.1 节)。假定上限利率 R_K 的计量天数惯例为“实际天数/360”(actual/360)(这是美国市场常用的惯例)。这意味着公式中的 δ_k 应被 a_k 代替，a_k 为 t_k 与 t_{k+1} 之间的**计利时段**(accrual fraction)。例如，假定 t_k 为 5 月 1 日，t_{k+1} 为 8 月 1 日，在“实际天数/360”计量天数惯例下，t_k 与 t_{k+1} 之间有 92 天，因此 $a_k = 92/360 = 0.252\,1$。远期利率的计量天数惯例也必须为“实际天数/360”，这意味着我们必须通过以下方程求得 F_k

$$1 + a_k F_k = \frac{P(0,t_k)}{P(0,t_{k+1})}$$

将 R_K 由“实际天数/360”转换为“实际天数/实际天数”(actual/actual)，并以“实际天数/实际天数”的惯例来计算 δ_k，这时我们必须通过以下方程求得 F_k

$$1 + \delta_k F_k = \frac{P(0,t_k)}{P(0,t_{k+1})}$$

28.3 欧式利率互换期权

利率互换期权(swap option，swaption)是基于利率互换的期权产品。这些产品给持有者在将来某时刻进入一个约定的利率互换的权利。许多向企业提供利率互换合约的大型金融机构也随时准备向其客户出售或购买利率互换期权。如业界事例28-2所示，利率互换期权也可以被看成是一种债券期权。

为了说明互换期权的应用方式，考虑以下例子：某企业已知在6个月后要签署一项5年期的浮动利率贷款，企业希望通过利率互换将浮动利息转为固定利息，这样企业可以将贷款转为固定利息贷款(见第7章里关于如何以这种方式使用互换产品的讨论)。支付一定的费用，企业可以买入一个互换期权，这一期权给予企业进入收取6个月LIBOR利率并同时付出固定利率(例如年利率为8%)的互换权利，互换在6个月后开始，持续5年。如果6个月后5年期的普通互换利率低于8%，公司选择不行使期权，而以常规的形式进入互换交易。但是，如果互换利率大于每年8%，公司将行使互换期权来进入互换交易，在互换交易中公司所付出的固定利率要低于市场互换利率。

当以上述形式应用互换期权时，互换期权给企业提供了保护，它使得企业避免由于借入资金的利率上涨而带来的风险。互换期权是远期互换[有时也被称为**延迟互换**(deferred swaps)]的一种替代品。远期互换无须事先支付费用，但其不利之处在于企业一定要履行签署互换合约的义务。而互换期权可使得企业在利率向有利方向变动时能够得到收益，而同时在利率向不利方向变动时得到保护。互换期权与远期互换的区别类似于外汇期权同外汇远期合约的区别。

业界事例28-2　互换期权与债券期权

如第7章所示，一个利率互换可以看做是将定息债券与浮息债券相交换的合约。在互换开始时，浮息债券的价值总是等于其面值。由此可见，我们可以将互换期权看成是由定息债券与面值相交换的期权。

因此互换期权是一种债券期权，如果互换期权给予持有者支付定息而收入浮动利息的权利，那么它是一个定息债券上的看跌期权，期权的执行价格等于面值，如果互换期权给予持有者支付浮动息而收入固定利息的权利，那么它是一个定息债券上的看涨期权，期权的执行价格等于面值。

28.3.1 欧式互换期权的定价

如第7章中所述，在某一时刻，对应于一个期限的互换利率是指当新签署一个具有同一期限的，并与LIBOR利率进行互换时的固定利率(利率中间价)。在互换期权定价的模型中，通常假定互换利率在期权到期日服从对数正态分布。考虑以下互换期权：我们有权在 T 年后进入为期 n 年的互换交易，在互换中我们付出的利率为 s_K，同时收入LIBOR利率。我们假设互换本金为 L，每年支付 m 次。

在第 7 章中我们曾指出，由于计量天数惯例的原因，在每一个利率付款日，固定息的付款量可能会有所不同。现在我们首先忽略计量天数惯例的影响，并假定在每一个定息付款均为固定利率乘以 L/m。在本节的最后，我们将讨论计量天数惯例的影响。

假定在 T 时刻开始并持续 n 年的互换利率为 s_T。将固定利率为 s_T 的互换现金流与固定利率为 s_K 的现金流进行比较，我们看出该互换期权的收益是由以下一系列现金流组成

$$\frac{L}{m}\max(s_T - s_K, 0)$$

在互换有效期的 n 年内，每年收入 m 次现金流。假设互换付款的日期为 T_1，T_2，$\cdots$，T_{mn}，时间计算从今天开始，以年为单位（T_i 近似等于 $T+i/m$）。每个现金流是执行价格为 s_K，标的变量为 s_T 的看涨期权收益。

利率上限是关于利率的期权组合，互换期权是关于一个具有重复付款的利率互换的期权。标准市场模型给出的有权支付固定利率 s_K 的互换期权价格为

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m}P(0,T_i)[s_0N(d_1) - s_KN(d_2)]$$

式中

$$d_1 = \frac{\ln(s_0/s_K) + \sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(s_0/s_K) - \sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

式中 s_0 为由式(27-23)给出的 0 时刻的远期互换利率，σ 为远期互换利率的波动率（$\sigma\sqrt{T}$为 $\ln s_T$ 的标准差）。

以上模型是布莱克模型的自然推广，波动率与$\sqrt{T}$相乘，$\sum_{i=1}^{mn} P(0, T_i)$是对于 mn 个收益的贴现因子。定义 A 为在 T_i 时刻支付 $1/m(1\leqslant i\leqslant mn)$数量现金合约的价值，那么期权价格变为

$$LA[s_0N(d_1) - s_KN(d_2)] \tag{28-10}$$

式中

$$A = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn} P(0,T_i)$$

如果互换期权持有者有权收取 s_K 而不付出 s_K，这互换期权的收益为

$$\frac{L}{m}\max(s_K - s_T, 0)$$

这是一个关于 s_T 的看跌期权。同以前一样，获得收益的时间为 $T_i(1\leqslant i\leqslant mn)$。标准市场模型给出的这一互换期权的价值为

$$LA[s_KN(-d_2) - s_0N(-d_1)] \tag{28-11}$$

【例 28-4】 假定 LIBOR 收益率曲线为水平，年利率为 6%（连续复利）。考虑以下互换期权，持有者具有在 5 年后开始一个 3 年期利率互换的权利。在互换中，期权持有人支付 6.2% 的固定利率，远期互换利率的波动率为 20%。付款期为每半年一次，本金为 1 亿美元。这时

$$A = \frac{1}{2}(e^{-0.06\times5.5} + e^{-0.06\times6} + e^{-0.06\times6.5} + e^{-0.06\times7} + e^{-0.06\times7.5} + e^{-0.06\times8}) = 2.0035$$

以连续复利计算的利率 6% 等价于每半年复利一次的利率 6.09%。在这一例子中，$s_0=0.0609$，$R_K=0.062$，$T=5$，$\sigma=0.20$，因此

$$d_1 = \frac{\ln(0.0609/0.062) + 0.2^2 \times 5/2}{0.2\sqrt{5}} = 0.1836$$

$$d_2 = d_1 - 0.2\sqrt{5} = -0.2636$$

由式(28-10)得出的互换期权价值(以百万美元计)为

$$100 \times 2.0035 \times [0.0609 \times N(0.1836) - 0.062 \times N(-0.2636)] = 2.07$$

即2.07美元(这与DerivaGem计算出的价格一致)。

28.3.2 经纪人的报价

市场经纪人提供欧式互换期权的隐含波动率[即利用式(28-10)和式(28-11)，由市场隐含出的波动率σ]。隐含波动率所对应的产品通常为平值期权。这意味着互换期权执行价格等于远期互换利率。表28-2展示了在美元市场中经纪人报价的典型数据。期权的期限被列在竖轴上，期限从1个月到5年不等。互换的期限被列在横轴上，期限的长度1～10年不等。表中对应1年期限的波动率与上限相似，也显示以前所述的驼峰现象，其他长期互换上的期权也会显示驼峰现象，但隆起的幅度要小一些。

表28-2 经纪人提供的美元互换期权波动率数据 (市场中间价，每年%)

到期日	长期互换(年)						
	1	2	3	4	5	7	10
1个月	17.75	17.75	17.75	17.50	17.00	17.00	16.00
3个月	19.50	19.00	19.00	18.00	17.50	17.00	16.00
6个月	20.00	20.00	19.25	18.50	18.75	17.75	16.75
1年	22.50	21.75	20.50	20.00	19.50	18.25	16.75
2年	22.00	22.00	20.75	19.50	19.75	18.25	16.75
3年	21.50	21.00	20.00	19.25	19.00	17.75	16.50
4年	20.75	20.25	19.25	18.50	18.25	17.50	16.00
5年	20.00	19.50	18.50	17.75	17.50	17.00	15.50

28.3.3 模型的理论根据

通过考虑一个对于年金(annuity)A为远期中性的世界，我们可以证明关于互换期权的布莱克模型是内在一致性。27.4节中的分析证明了：

- 任何一个证券的价格都等于年金的当前价格乘以

  证券在T的价格／年金在T的价格

  在这个世界里的期望值[见式(27-25)]。
- 时间T的互换利率在这个世界里的期望等于远期互换利率[见式(27-24)]。

第一个结果说明互换期权的价值为

$$LAE_A[\max(s_T - s_K, 0)]$$

利用附录14A的结果，以上式子等于

$$LA[E_A(s_T)N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

式中

$$d_1 = \frac{\ln[E_A(s_T)/s_K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_A(s_T)/s_K] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

第二个结果表明 $E_A(s_T)$ 等于 s_0，结合这些结果，我们就可以得出式(28-10)中的互换期权定价公式。这说明了当我们将互换利率的期望值设定为远期互换利率时，为了贴现的目的，我们可以将利率视为常数。

28.3.4 计量天数惯例的影响

为了使以上公式更为精确，我们考虑计量天数惯例的影响。互换期权里标的互换合约的固定利率是按类似于"实际天数/365"或"30/360"这样的计量天数惯例来表示的。假设 $T=T_0$，而且在选定的计量天数惯例下，从时间 T_{i-1} 到 T_i 的计利时段为 a_i（例如，如果 T_{i-1} 对应于3月1日，而 T_i 对应于9月1日，假定计量天数惯例为"实际天数/365"，那么 $a_i=184/365=0.5041$）。我们定义 A 为

$$A = \sum_{i=1}^{mn} a_i P(0, T_i)$$

上式依然成立。如式(27-23)所示，远期互换利率 s_0 可以通过以下公式来求得

$$s_0 A = P(0, T) - P(0, T_{mn})$$

28.4 推广

我们已经给出了三种不同的布莱克模型：债券期权、上限以及互换期权。每个模型本身都是内在一致的，但它们相互之间并不兼容。例如，当将来的债券价格服从对数正态分布时，将来的零息利率和互换利率就不会服从对数正态分布。

以上结果可以得到以下推广。

(1) 考虑任何一个产品，它在时间 T 的收益依赖于在时间 T 所观察到的某个债券的值，这个产品的现值为 $P(0,\ T)$ 乘以收益的期望值，但期望值是取在一个使得标的变量期望值等于其远期价格的世界里。

(2) 考虑任意一个产品，它在时间 T^* 的收益依赖于时间 T 所观察到的，从时间 T 到 T^* 之间的利率。这个产品的现值为 $P(0,\ T^*)$ 乘以收益的期望值，但是在一个使得标的利率的期望值等于远期利率的世界里取期望值。

(3) 考虑任意一个产品，它的收益是以年金的形式给出的。我们假定年金的大小在时间 T 确定，而且这一年金为在时间 T 的 n 年期互换利率的函数。假设年金延续 n 年，并且年金与互换具有相同的收支日期。这个产品的现值等于 A 乘以每年收益的期望值，其中 A 是每年支付1美元的年金现值，并且在一个使得将来互换利率的期望值等于远期互换利率的世界里取期望值。

这里的第一个结论是对欧式债券期权模型的推广，第二个结论是对上限和下限模型的推广，第三个结论是对互换期权模型的推广。

28.5 利率衍生产品的对冲

本节我们讨论如何将第18章中的希腊值推广到利率衍生产品上。

对于利率衍生产品，Delta 风险表示由于零息曲线移动所带来的风险。由于零息曲线可以有许多种移动形式，因此我们可以计算许多不同的 Delta，其中包括以下4个方面。

- 计算在零息曲线上由一个基点的平行移动所带来的影响，计算结果被称为 DV01。
- 计算由于每个用来构造零息曲线的产品价格的微小变化所带来的影响。
- 将零息曲线（或远期曲线）分割为若干段(bucket)，然后我们让一段的利率变动一个基点，而同时保持其他段的利率不变（这在业界事例6-3中曾有所描述）。

- 进行像在21.9节中所描述的主成分分析，对前面几个因子的变化都计算一个相应的Delta，这时第一个Delta表示利率曲线上一个很小，并且是大致平行的移动所造成的影响；第二个Delta描述了零息曲线的一个很小的扭曲所造成的影响；等等。

在实际中，交易员趋向于选择第二种方式，他们的理由是只有当某个用来构造零息曲线的产品变动时，零息曲线才会变动。因此，交易员认为应该关注的是由于这些产品价格变化所造成的影响。

当计算多个Delta时，我们自然也会关心许多可能的Gamma测度。假如我们采用10种产品来计算零息曲线，并且对每个产品价格的变动，我们都要计算相应的Delta。Gamma是形式为$\partial^2\Pi/\partial x_i\partial x_j$的二阶导数，其中$\Pi$为产品组合的价格，我们对$x_i$有10个选择，对$x_j$也有10个选择。因此，我们共有55个Gamma测度，这也许会导致“信息超载”。一种简略方式是忽略交叉项而关注10个当$i=j$时的偏导数，另一种做法是只计算一个Gamma测度，它是组合价值关于零息曲线平行移动的二阶导数。此外，还有一种做法是计算关于主成分分析的前两个因子的Gamma。

利率衍生产品组合的Vega描述了组合价值对波动率变化的暴露。一种处理方式是计算组合里所有上限和欧式互换期权布莱克波动率的一个小的变化对组合价值的影响。但是，这样做就意味着假设了所有波动率都是由一个因素来影响的，因此这种做法有些过于简单。一个比较好的做法是对上限和互换期权波动率进行主成分分析，然后计算对应于前两个或前三个因子的Vega测度。

小 结

在对欧式利率期权定价时，布莱克模型是一种非常流行的办法。布莱克模型的实质是假设期权标的变量在期权到期日服从对数正态分布。对于债券期权，布莱克模型假定标的债券价格在到期时服从对数正态分布；对于上限，这个模型假定上限区间的标的利率服从对数正态分布；对于互换期权，这个模型假定标的互换利率服从对数正态分布。其中的每一个情形都是内在一致的，但相互之间并不兼容。

布莱克模型涉及计算收益的期望值。这里需要假设一个变量的期望值等于它的远期值，然后采用今天所观察到的零息利率对这个期望值进行贴现。这种办法对我们所考虑的简单产品是正确的，在第29章我们将看到，这种做法并不是对所有情况都适合。

推荐阅读

Black, F., “The Pricing of Commodity Contracts,” *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976): 167–79.

练习题

28.1 一家企业签署了一项上限合约，合约将3个月期LIBOR利率上限定为每年10%，本金为2 000万美元。在重置日3个月的LIBOR利率为每年12%。根据利率上限协议，收益将如何支付，付款日为何时？

28.2 解释为什么一个互换期权可以看做是一个债券期权。

28.3 采用布莱克模型来对一个期限为1年，标的资产为10年期债券的欧式看跌期权定价。假定债券当前价格为125美元，执行价格为110美元，1年期利率为每年10%，债券远期价格的波动率为每年8%，期权期限内所支付票息的贴现值为10美元。

28.4 仔细解释你如何利用即期波动率和单一波动率来对一个5年期的上限定价。

28.5 计算以下期权的价格：在15个月时将3

个月期的利率上限定为13%（按季度复利），这一区间的远期利率为12%（按季度复利），本金为1 000美元，第18个月时的无风险利率为每年11.5%（连续复利），远期利率的波动率为每年12%。

28.6 某家银行采用布莱克模型来对欧式债券期权定价。假定银行采用了5年期限、标的资产为10年期的债券期权隐含波动率来对一个9年期的期权定价。你所得到的价格会太高还是太低？解释你的答案。

28.7 采用布莱克模型来计算具有4年期限的欧式看涨期权价格，标的资产是从现在起5年后到期的债券。5年期债券的现金价格为105美元，与5年期债券具有同样票息率的4年期债券的现金价格为102美元，期权执行价格为100美元，4年期无风险利率为每年10%（连续复利），4年后债券价格的波动率为每年2%。

28.8 某一看跌期权的期限为5年，标的资产为在10年后到期的债券，债券收益率波动率为22%，如何对这一期权定价？假定在基于今天的利率下，债券在期权满期时的久期为4.2年，债券远期收益率为7%。

28.9 如果利率上限与利率下限执行价格相同，什么样的金融产品等价于一个5年期零费用利率双限？这里的共同执行价格等于什么？

28.10 推导关于欧式债券期权的看跌-看涨期权平价关系式。

28.11 推导关于欧式互换期权的看跌-看涨期权平价关系式。

28.12 当上限隐含的布莱克单一波动率不等于利率下限隐含的单一波动率时，会有套利机会，表28-1中的报价存在套利机会吗？

28.13 当债券价格服从对数正态时，债券的收益率会为负吗？解释你的答案。

28.14 以下欧式互换期权的价值为多少？这个期权给持有人在4年时有权进入一个3年期的利率互换，在互换中支付的固定利率为5%，同时收入LIBOR，互换本金为1 000万美元，互换付款为每年一次，假设收益曲线呈水平状，为每年5%（连续复利），互换利率的波动率为20%。将你的答案同DerivaGem给出的结果进行比较。

28.15 假设一个零息债券的收益率R服从以下过程

$$dR = \mu dt + \sigma dz$$

式中μ和σ均为R和t的函数，dz为维纳过程。利用伊藤引理来证明当债券价格接近到期日时，零息债券的价格波动率会下降为0。

28.16 通过手算来验证例28-2中的期权价格。

28.17 假定1年、2年、3年、4年及5年期的零息利率分别为6%、6.4%、6.7%、6.9%和7%。5年有效期，每半年付款一次，面值为100美元，上限利率为8%的利率上限价格为3美元，应用DerivaGem软件来确定：

(a) 5年期上限及下限的单一波动率。

(b) 上限利率为8%的零费用利率双限中的下限利率。

28.18 证明$V_1+f=V_2$，其中V_1为$T_1 \sim T_2$时刻之间付出固定利率s_K并同时收入LIBOR的互换期权的价格，f为$T_1 \sim T_2$时刻之间收入固定利率s_K并同时付出LIBOR的远期利率互换的价格，V_2为$T_1 \sim T_2$时刻之间收入固定利率s_K的互换期权的价格。并由以上公式求证，当s_K等于当前远期互换利率时，$V_1=V_2$。

28.19 假定零息利率如练习题28.17所示，采用DerivaGem来决定以下期权的价格：期权持有人在1年后有权进入一个5年期的利率互换，在互换中支付的固定利率为6%，同时收入LIBOR，互换本金为1亿美元，互换付款日为每半年一次，互换利率的波动率为21%。

28.20 描述你将如何由上限的即期波动率来计算上限的单一波动率，以及如何由上限的单一波动率来计算上限的即期波动率。

作业题

28.21 考虑一个8个月期、标的债券目前仍有14.25年期限的看跌期权，债券当前的现金价格为910美元，执行价格为900美元，债券价格波动率为每年10%，在3个月后债券将支付票息35美元，一年内所有期限的无风险利率均为每年8%。采用布莱克模型为这一期权定价。在定价中考虑以下两种情形：执行价格为债券现金价格；执行价格为债券报价。

28.22 计算一个9个月期、标的变量为90天LIBOR的利率上限价格，其中本金为1 000美元。采用布莱克模型及以下信息进行计算：

(a) 9个月期的欧洲美元期货价格为92（忽略期货与远期利率的差别）。

(b) 9个月期的欧洲美元期权隐含波动率为每年15%。

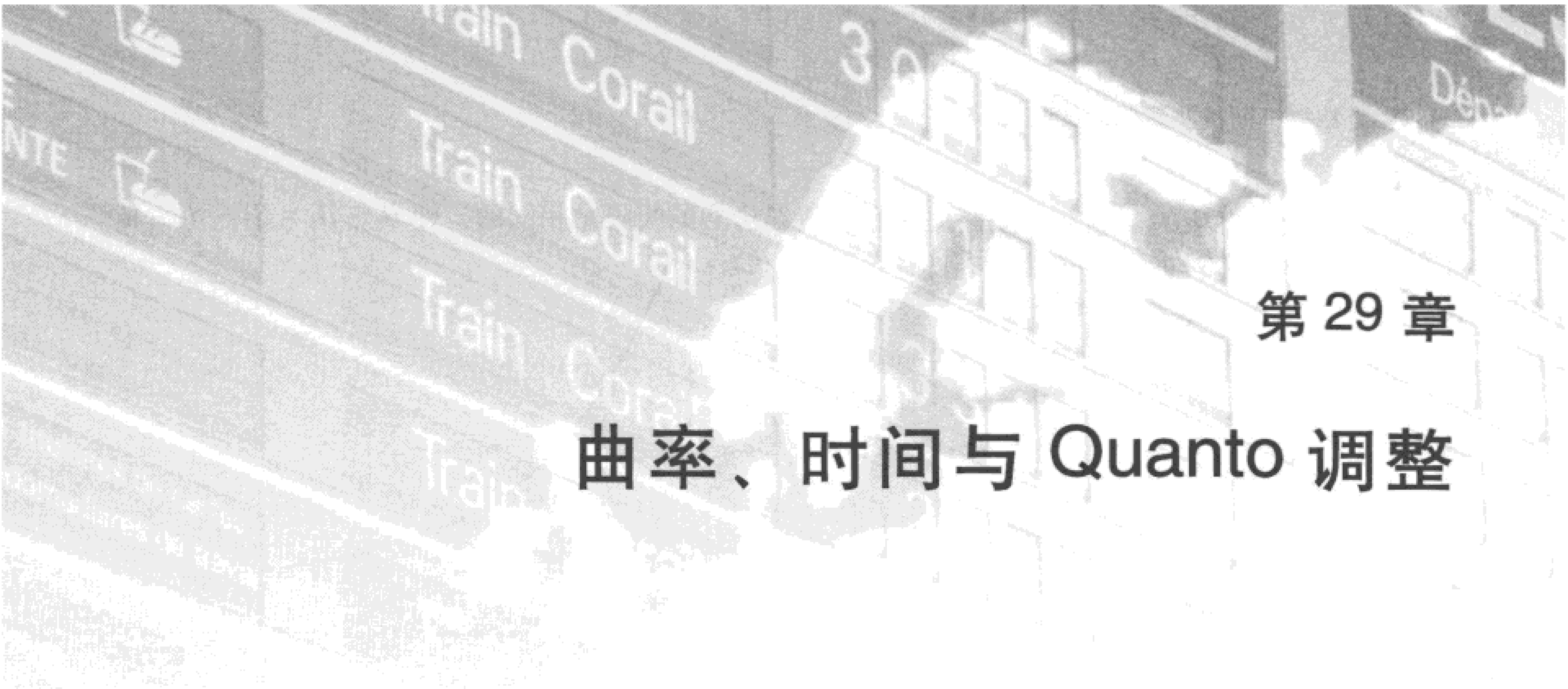
(c) 当前连续复利的12个月期限的利率为每年7.5%。

(d) 上限利率为每年8%（假定计量天数惯例为“实际天数/360”）。

28.23 假定LIBOR收益率曲线为水平8%（每年复利）。某个互换期权给期权持有者以下权利：在4年后可以进入一个5年期的互换，在互换中收入7.6%固定利率，付款为每年一次，互换利率的年波动率为25%，本金为100万美元。采用布莱克模型来对以上期权定价。

28.24 采用DerivaGem软件来对以下5年期的双限定价：双限保证LIBOR（每季度确定一次利率）的最大及最小利率分别为7%及5%，LIBOR零息曲线（连续复利）为水平6%，在定价中采用单一波动率20%，本金数量为100。

28.25 采用DerivaGem软件对以下欧式互换期权定价：期权持有者有权在2年后进入一个5年期的互换。在互换中付出6%固定利率，同时收入浮动利率，互换中的现金流为每半年交换一次。1年、2年、5年及10年期的零息利率分别为5%、6%、6.5%和7%。假定本金为100美元，波动率为每年15%。举例说明企业如何使用互换期权。什么样的债券期权等价于利率互换期权？



第 29 章

曲率、时间与 Quanto 调整

对欧式衍生产品定价的一种流行的两步程序为：

- 在每个标的变量的期望值都等于其远期值的假设下，计算收益的期望值。
- 将收益的期望值以定价日期与收益日期之间的无风险利率加以贴现。

在第 4 章中，我们曾采用以上两步程序对 FRA 和互换产品进行了定价。当对 FRA 定价时，我们可以在假定远期利率将被实现的基础上计算收益，然后将收益以无风险利率加以贴现。类似地，在第 7 章对互换合约定价时，我们可以在假定远期利率将被实现的基础上计算现金流，然后以无风险利率加以贴现。在第 17 章和第 27 章中展示了布莱克模型是对很广泛的欧式期权定价的一般方法，并且布莱克模型是上面两步程序的一个应用。第 28 章中关于债券期权、上限/下限以及互换期权的定价都是这个两步程序的应用例子。

人们自然会问，利用这种两步法对欧式利率衍生产品定价是否永远正确？这里的答案是否定的！对一些非标准利率衍生产品，我们有时需要对上面的两步程序加以修改，修改过程主要包括对第一步中变量的远期值做出一定调整。在本章中，我们将考虑下面三种调整，即曲率调整、时间调整和 Quanto 调整。

29.1 曲率调整

我们首先考虑对这样一种产品定价，其收益依赖于在收益发生时间所观察到的债券收益率。

通常一个变量的远期值是通过一个在时间 T 收益为 $S_T - K$ 的远期合约来计算，它是对应于合约价值为 0 的价格 K。我们在 27.4 节中曾指出，远期利率与远期债券收益率的定义有所不同。远期利率是由远期零息债券所隐含的利率。一般来讲，远期债券收益率是远期债券价格所隐含的利率。

假定 B_T 是在时间 T 的一个债券价格，y_T 为其收益率。B_T 与 y_T 之间（债券定价）的关系式为

$$B_T = G(y_T)$$

定义 F_0 为时间 T 到期的合约在时间 0 的远期债券价格，y_0 为时间 0 的远期债券收益率。由定义得出

$$F_0 = G(y_0)$$

函数 G 为非线性函数。这意味着，当将来债券价格的期望值等于远期债券价格时（我们是在一个对于时间 T 到期的零息债券为风险中性的世界里），将来的债券收益率期望值并不等于远期债券收益率。

这一点可通过图 29-1 来说明。图 29-1 展示了在时间 T 债券价格与债券收益率的关系。为简单起见，我们假定只有三种可能的债券价格 B_1、B_2 和 B_3，这些价格在一个关于 $P(t, T)$ 为远期

风险中性世界里发生的可能性是相同的。假如债券价格的间隔是相同的，即 $B_2 - B_1 = B_3 - B_2$。债券的远期价格是债券的期望值 B_2。由债券价格，我们可以计算出三个具有等价性的收益率：y_1，y_2 和 y_3。这些收益率之间的间隔并不相同。变量 y_2 为远期债券的收益率，这是因为它对应于远期债券价格。债券收益率的期望值为 y_1，y_2 和 y_3 的平均值，显然该平均值大于 y_2。

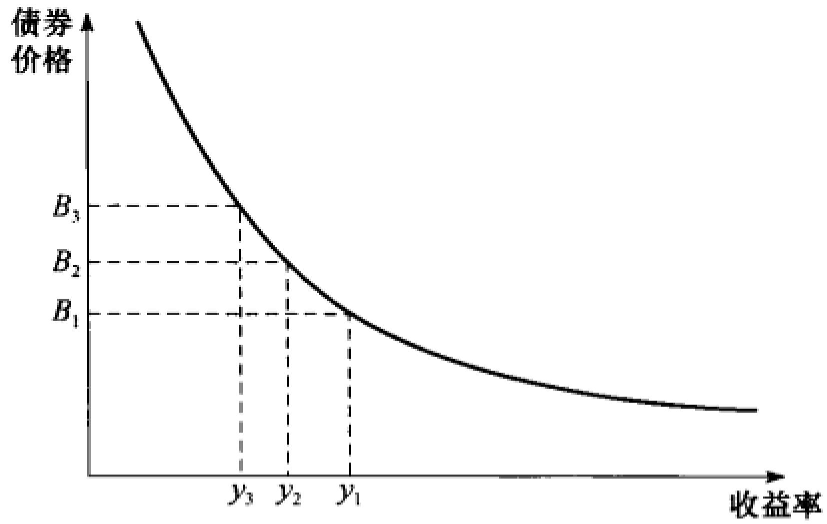


图 29-1　在时间 T 时债券价格与债券收益率的关系

现在考虑一个收益依赖于时间 T 的债券收益率的衍生产品。由式(27-20)可知，产品可以通过以下过程来定价：在对于时间 T 到期的零息债券为远期风险中性的世界里计算收益的期望值；以当前期限为 T 的无风险利率进行贴现。我们知道，在所考虑的世界里，债券价格期望值等于远期价格。因此，我们需要计算当债券价格等于远期价格时债券收益率的期望值。本章附录 29A 证明，债券收益率的期望值可以由以下近似式表示

$$E_T(y_T) = y_0 - \frac{1}{2}y_0^2\sigma_y^2 T\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)} \tag{29-1}$$

式中 G'和 G''表示函数 G 的一阶和二阶偏导数，E_T 表示在一个对于 $P(t, T)$ 为远期风险中性世界里的期望值，σ_y 为远期收益率的波动率。由此可见，当我们假设债券收益率的期望为

$$y_0 - \frac{1}{2}y_0^2\sigma_y^2 T\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

而不是 y_0 时，我们可以用当前期限为 T 的无风险利率来对收益期望值进行贴现。债券收益率期望值与远期收益率之间的差为

$$-\frac{1}{2}y_0^2\sigma_y^2 T\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

以上表达式被称为**曲率调整**(convexity adjustment)，它对应于图 29-1 中 y_2 与预期收益率的差(因为$G'(y_0)<0$，$G''(y_0)>0$，因此曲率调整为正)。

29.1.1　应用 1：利率

作为式(29-1)的第一个应用，我们考虑以下产品：它在时间 T 提供本金 L 按时间 T 与 T^* 之间利率所产生的利息(当我们在第 32 章讨论 LIBOR 后置互换时会用到这个例子)。注意，在时间 T 与时间 T^* 之间的利息一般是在 T^* 支付，但在这里我们假设利息是在时间 T 支付。

在时间 T，我们考虑产品的现金流为 $LR_T\tau$，其中 $\tau = T^* - T$，R_T 为 T 与 T^* 之间的零息利率(按时间段 τ 复利)[⊖]。变量 R_T 可以被看成是在时间 T^* 到期的零息债券在时刻 T 的收益率，这个债券价格与其收益率之间的关系式为

$$G(y) = \frac{1}{1+y\tau}$$

由式(29-1)，

$$E_T(R_T) = R_0 - \frac{1}{2}R_0^2\sigma_R^2 T\frac{G''(R_0)}{G'(R_0)}$$

或

⊖ 与通常一样，为简单起见，我们假设计天方式为“实际天数/实际天数”。

$$E_T(R_T) = R_0 + \frac{R_0^2\sigma_R^2\tau T}{1+R_0\tau} \tag{29-2}$$

式中 R_0 是应用于 T 与 T^* 之间的远期利率，σ_R 是远期利率的波动率。因此，这个产品的价值为

$$P(0,\ T)L\tau\left[R_0 + \frac{R_0^2\sigma_R^2\tau T}{1+R_0\tau}\right]$$

【例 29-1】 考虑一个衍生产品，它在 3 年后提供的收益等于那时的 1 年期零息利率（按年复利）乘以 1 000 美元。假设所有期限的零息利率均为每年 10%，按年复利。而相应的从第三年到第四年之间的远期利率的波动率为 20%。这时 $R_0=0.10$、$\sigma_R=0.20$、$T=3$、$\tau=1$ 和 $P(0,\ 3)=1/1.10^3=0.7513$。衍生产品价值为

$$0.7513\times 1000\times 1\times\left[0.10+\frac{0.10^2\times 0.20^2\times 1\times 3}{1+0.10\times 1}\right]$$

即 75.95 美元（不做曲率调整的价格为 75.13 美元）。

29.1.2 应用 2：互换利率

接下来，考虑另一衍生产品，它在时间 T 提供的收益等于当前时间所观察到的互换利率。远期互换利率为平值收益率。为了计算曲率调整，我们可以假设在时间 T 时的 N 年互换利率等于在时间 T 时的 N 年债券的收益率，而债券的券息等于今天的远期互换利率，从而我们可以利用式（29-1）。

【例 29-2】 考虑以下产品，它在 3 年后提供的收益等于那时的 3 年期的互换利率乘以 100 美元。假设互换的支付是按年进行，对所有期限的零息利率均为 12%，按年复利。3 年后的 3 年期的互换波动率为 22%（由互换期权隐含得出）。我们将互换利率近似为一个票息为 12% 债券上的收益率，于是相应的函数 $G(y)$ 为

$$G(y) = \frac{0.12}{1+y}+\frac{0.12}{(1+y)^2}+\frac{1.12}{(1+y)^3}$$

$$G'(y) = -\frac{0.12}{(1+y)^2}-\frac{0.24}{(1+y)^3}-\frac{3.36}{(1+y)^4}$$

$$G''(y) = \frac{0.24}{(1+y)^3}+\frac{0.72}{(1+y)^4}+\frac{13.44}{(1+y)^5}$$

在这种情况下，远期收益率 y_0 为 0.12，于是 $G'(y_0)=-2.4018$ 和 $G''(y_0)=8.2546$。由式（29-1）得出，

$$E_T(y_T) = 0.12+\frac{1}{2}\times 0.12^2\times 0.22^2\times 3\times\frac{8.2546}{2.4018} = 0.1236$$

因此，在对这个产品定价时，我们应当假设远期互换利率为 0.1236（12.36%），而不是 0.12%。这个产品价值为

$$\frac{100\times 0.1236}{1.12^3} = 8.80$$

即 8.80 美元（在没有任何调整的情况下，产品价值为 8.54 美元）。

29.2 时间调整

本节考虑以下情形，我们观察一个市场变量的时间为 T，但这一观察值却用于计算发生在之

后的时间 T^* 的收益。定义：

V_T——V 在时间 T 的取值；

$E_T(V_T)$——在一个关于 $P(t, T)$ 为远期风险中性的世界里 V_T 的期望值；

$E_{T^*}(V_T)$——在一个关于 $P(t, T^*)$ 为远期风险中性的世界里 V_T 的期望值。

从计价单位 $P(t, T)$ 转移到计价单位 $P(t, T^*)$ 时，计价单位比率（见 27.8 节）为

$$W = \frac{P(t,T^*)}{P(t,T)}$$

这是在 T 与 T^* 之间的零息债券远期价格。定义：

σ_V——V 的波动率；

σ_W——W 的波动率；

ρ_{VW}——V 和 W 的相关系数。

由式(27-35)，我们知道由于计价单位的变化导致 V 的增长率增加 α_V，其中

$$\alpha_V = \rho_{VW}\sigma_V\sigma_W \tag{29-3}$$

我们可以用 T 与 T^* 之间的远期利率来表达这一结果。定义

R——T 与 T^* 之间的远期利率，其复利频率为 m；

σ_R——R 的波动率。

W 与 R 之间满足

$$W = \frac{1}{(1 + R/m)^{m(T^* - T)}}$$

W 的波动率与 R 的波动率之间的关系可以通过伊藤引理得出

$$\sigma_W = -\frac{\sigma_R R(T^* - T)}{1 + R/m}$$

因此式(29-3)变为[⊖]

$$\alpha_V = -\frac{\rho_{VR}\sigma_V\sigma_R R(T^* - T)}{1 + R/m}$$

其中 $\rho_{VR} = -\rho_{VW}$ 是 V 与 R 之间的瞬时相关系数。作为近似，我们假设 R 为其初值常数 R_0，并且假设关系式中的波动率均为常数，因此在时间 0 可以得到

$$E_{T^*}(V_T) = E_T(V_T)\exp\left[-\frac{\rho_{VR}\sigma_V\sigma_R R_0(T^* - T)}{1 + R_0/m}T\right] \tag{29-4}$$

【例 29-3】 考虑一个产品，它在 6 年后提供的收益等于在 5 年所观察到的股指价值。假如一个 5 年期合约的股指远期值为 1 200，股指波动率为 20%，在第 5 年与第 6 年之间远期利率的波动率为 18%，并且两者之间的相关系数为 −0.4。进一步假设零息利率曲线呈水平状，年复利利率为 8%。我们将刚才得到的结果应用于这一情形，其中 V 等于股指价值。这时，$T=5$、$T^*=6$、$m=1$、$R_0=0.08$、$\rho_{VR}=-0.4$、$\sigma_V=0.20$ 和 $\sigma_R=0.18$，于是

$$E_{T^*}(V_T) = E_T(V_T)\exp\left[-\frac{-0.4 \times 0.20 \times 0.18 \times 0.08 \times 1}{1 + 0.08} \times 5\right]$$

或 $E_{T^*}(V_T) = 1.005\,35E_T(V_T)$。由第 27 章的结果我们得出 $E_T(V_T)$ 为股指的远期值，即 1 200。于是，$E_{T^*}(V_T) = 1\,200 \times 1.005\,35 = 1\,206.42$。再利用第 27 章的结论，由式(27-20)得出，衍生产品的价值为

⊖ 变量 R 和 W 之间具有负相关性，我们可以通过设定 $\sigma_W = -\sigma_R(T^* - T)/(1 + R/m)$，这是个负数，以及 $\rho_{VW} = \rho_{VR}$ 来反映这一点。另一种做法是改变 σ_W 的符号以保证它为正值，同时令 $\rho_{VW} = -\rho_{VR}$。由以上两种做法，我们可以得到一样的关于 α 的结论。

$1\,206.42\times P(0,\ 6)$，其中 $P(0,\ 6)=1/1.08^6=0.630\,2$。所以，衍生产品的价值为760.25。

再谈应用1

由刚才的分析，我们可以采用另外一种途径得出29.1节应用1中的结果。利用以上的符号，我们定义 R_T 为 T 与 T^* 之间的利率，R_0 为 T 与 T^* 之间的远期利率。由式(27-22)得出

$$E_{T^*}(R_T) = R_0$$

令 V 等于 R，应用式(29-4)得出

$$E_{T^*}(R_T) = E_T(R_T)\exp\left[-\frac{\sigma_R^2 R_0 \tau}{1+R_0\tau}T\right]$$

其中 $\tau=T^*-T$(注意 $m=1/\tau$)，于是

$$R_0 = E_T(R_T)\exp\left[-\frac{\sigma_R^2 R_0 T\tau}{1+R_0\tau}\right]$$

或

$$E_T(R_T) = R_0\exp\left[\frac{\sigma_R^2 R_0 T\tau}{1+R_0\tau}\right]$$

利用指数函数近似式，我们可以得出

$$E_T(R_T) = R_0 + \frac{R_0^2\sigma_R^2\tau T}{1+R_0\tau}$$

这正是式(29-2)里的结果。

29.3 QUANTO

Quanto或**交叉货币衍生产品**(cross-currency derivative)是涉及两种货币的金融产品，其收益由一种货币来度量，但以另一种货币来支付。Quanto的一个例子是业界事例5-3讨论的在CME交易的日经225指数(以日元计算)，但合约以美元交割。

考虑一个在时间 T 提供货币 X 中收益的Quanto，我们假设收益依赖于一个在时间 T 观察的货币 Y 上的变量 V 的值。定义：

$P_X(t,\ T)$——以货币 X 度量，在时间 T 付出一个 X 货币单位的零息债券在时间 t 的价值；

$P_Y(t,\ T)$——以货币 Y 度量，在时间 T 付出一个 Y 货币单位的零息债券在时间 t 的价值；

V_T——V 在时间 T 的取值；

$E_X(V_T)$——在一个对 $P_X(t,\ T)$ 为远期风险中性世界里 V_T 的期望值；

$E_Y(V_T)$——在一个对 $P_Y(t,\ T)$ 为远期风险中性世界里 V_T 的期望值。

从计价单位 $P_Y(t,\ T)$ 转换到计价单位 $P_X(t,\ T)$ 的比率为

$$W(t) = \frac{P_X(t,T)}{P_Y(t,T)}S(t)$$

式中 $S(t)$ 为时间 t 的即期汇率(每 X 单位货币所对应的 Y 货币的数量)。由此可见，计价单位比率 $W(t)$ 是期限为 T 的远期汇率。定义：

σ_W——W 的波动率；

σ_V——V 的波动率；

ρ_{VW}——V 与 W 之间的瞬时相关系数。

由式(27-35)，计价单位的变化会使 V 的增长率增加 α_V，其中

$$\alpha_V = \rho_{VW}\sigma_V\sigma_W \tag{29-5}$$

我们假设波动率和相关系数均为常数，这意味着

$$E_X(V_T) = E_Y(V_T)e^{\rho_{VW}\sigma_V\sigma_W T}$$

或作为近似

$$E_X(V_T) = E_Y(V_T)(1 + \rho_{VW}\sigma_V\sigma_W T) \tag{29-6}$$

我们将利用这个方程来对第 32 章中所谓的**交叉货币度量互换**(Diff swap)进行定价。

【例 29-4】 假定日经指数的当前价值为 15 000 日元，1 年期的美元无风险利率为 5%，1 年期的日元无风险利率为 2%，日经指数的股息收益率为 1%，以日元计价 1 年期的日经远期合约可由通常方式，即式(5-8)，计算

$$15\,000e^{(0.02-0.01)\times 1} = 15\,150.75$$

假设股指的波动率为 20%，一年美元/日元远期汇率的波动率为 12%，股指与汇率的相关系数为 0.3。这时，$E_Y(V_T) = 15\,150.75$、$\sigma_F = 0.20$、$\sigma_W = 0.12$ 和 $\rho = 0.3$。由式(29-6)，日经指数在对一年期的美元零息债券为远期中性世界的期望值为

$$15\,150.75e^{0.3\times 0.2\times 0.12\times 1} = 15\,260.23$$

这是日经远期价格提供的美元收益，而不是日元收益(作为近似，以上数值也是该类合约的期货价值)。

利用传统风险中性测度

当衍生产品的收益只发生在一个时刻时，我们所使用的远期风险中性测度会非常有效。但对于其他情形，有时使用传统的风险中性测度会更为合适。假设我们知道变量 V 在货币 Y 下的传统风险中性世界里的过程，从而估计在货币 X 下的传统风险中性世界所服从的过程。定义

S——即期汇率(每 X 单位的 Y 数量)；

σ_S——S 的波动率；

σ_V——V 的波动率；

ρ——S 与 V 之间的瞬时相关系数。

这时，计价单位的变化是由货币 Y 为度量的**货币市场账户**(money market account)转换到以货币 X 为度量的货币市场账户(两种货币市场账户均以货币 X 结算)。定义 g_X 为货币 X 的货币市场账户价值，g_Y 为货币 Y 的货币市场账户价值。计价单位比率为

$$\frac{g_X}{g_Y}S$$

在 27.4 节中我们讲过，变量 $g_X(t)$ 和 $g_Y(t)$ 具有随机漂移项，但它们的波动率均为 0。由伊藤引理得出，计价单位比率的波动率为 σ_S。因此，计价单位变化使得 V 的增长率增加了

$$\rho\sigma_V\sigma_S \tag{29-7}$$

风险市场价格由 0 变为了 $\rho\sigma_S$。这个结果可以用来解释 Siegel 悖论(见业界事例 29-1)。

业界事例 29-1　Siegel 悖论

考虑两种货币 X 和 Y。假设在两种货币下的利率 r_X 和 r_Y 均为常数。定义 S 为每单位货币 X 所兑换货币 Y 的数量。如第 5 章所述，外国货币是一种提供收益率为外国无风险利率的资产。因此，S 在传统风险世界的过程为

$$dS = (r_Y - r_X)Sdt + \sigma_S Sdz$$

利用伊藤引理，$1/S$ 的过程为

$$d(1/S) = (r_X - r_Y + \sigma_S^2)(1/S)dt - \sigma_S(1/S)dz$$

这就导致了所谓的 **Siegel 悖论**(Siegel paradox)。由于在风险中性世界里，S 的期望增长率为 $r_Y - r_X$，利用对冲性，$1/S$ 的期望增加率应该为 $r_X -$

r_Y，而非 $r_X - r_Y + \sigma_S^2$。

要想理解 Siegel 悖论，我们需要认识到这里所给出关于 S 的过程是处在以货币 Y 的货币市场账户为计价单位的风险中性世界里，由于 $1/S$ 的过程是由 S 的过程演变而来，因此以上给出的 $1/S$ 的过程也是基于同一计价单位。由于 $1/S$ 表示的每 Y 单位所兑换 X 的数量，为了对冲起见，我们应该在一个以货币 X 的货币市场账户为计价单位的世界里来度量 $1/S$ 的过程。式(29-7)表明，当我们将计价单位由货币 Y 的货币市场账户转换为货币 X 的货币市场账户时，一个变量 V 的增长率会增加 $\rho\sigma_V\sigma_S$，其中 ρ 为 S 和 V 之间的相关系数。这时，$V=1/S$，所以 $\rho=-1$ 和 $\sigma_V=\sigma_S$。因此，计价单位的变化会导致 $1/S$ 的增长率增加 $-\sigma_S^2$。这正好与上面所给过程中的 $+\sigma_S^2$ 项抵消。因此，在以货币 X 的货币市场账户作为计价单位的风险中性世界里，$1/S$ 的过程为

$$d(1/S) = (r_X - r_Y)(1/S)dt - \sigma_S(1/S)dz$$

这与我们开始所给出的 S 的过程是对称的，这样我们就解决了这个悖论。

【例29-5】 一个2年期美式期权提供的收益为 $S-K$ 英镑，其中 S 为期权行使时的 S&P 500 的水平，K 为执行价格。S&P 500 的当前水平为 1 200。英镑和美元的无风险利率分别为 5% 和 3%，美元/英镑汇率与 S&P 500 之间的相关系数为 0.2，S&P 500 的波动率为 25%，汇率波动率为 12%，S&P 500 的股息收益率为 1.5%。

以英国的货币市场账户作为计价单位(即以英国投资者的角度的风险中性世界)，我们可以提供构造关于 S&P 500 的二叉树来对这个期权定价。由式(29-7)，将计价单位从美国货币市场账户转换在英国货币市场账户会导致 S&P 500 的增长率期望增加

$$0.2 \times 0.25 \times 0.12 = 0.006$$

即 0.6%。当以美元货币市场账户为计价单位时，S&P 500 的增长率为 3% − 1.5% = 1.5%。因此，以英镑货币市场账户作为计价时，这个增长率为 2.1%。英镑的无风险利率为 5%，因此，在英镑货币市场账户作为计价单位时，S&P 500 可以被描述为一个提供增长率为 5% − 2.1% = 2.9% 的资产。利用参数值 $S=1\,200$、$K=1\,200$、$r=0.05$、$q=0.029$、$\sigma=0.25$ 和 $T=2$，采用 100 步二叉树，DerivaGem 软件给出的期权近似值为 179.83 英镑。

小　结

当计算一个在将来特定时间提供一个收益的衍生产品价格时，我们会自然地假设衍生产品标的变量的期望值都等于它的远期值，然后再对收益以定价时刻与收益时刻之间的无风险利率进行贴现。在本章，我们说明了这种做法并非永远正确。

当收益依赖于在时间 T 所观察的债券收益率时，式(29-1)说明债券收益率的期望值应当高于远期债券收益率。这个结论也适用于收益依赖于互换利率的情形。当观察变量值发生的时间为 T，而收益发生在其后的时间 T^* 时，变量的远期值应按式(29-4)进行调整。当我们在一种货币下观察变量，而收益却是以另一种货币结算时，变量远期值应当加以调整，这种情形下的调整数量由式(29-6)给出。

在第32章中，我们将利用这些结果来处理一些非标准互换。

推荐阅读

Brotherton-Ratcliffe, R., and B. Iben, "Yield Curve Applications of Swap Products," in *Advanced Strategies in Financial Risk Management* (R. Schwartz and C. Smith, eds.). New York Institute of Finance, 1993.

Jamshidian, F., "Corralling Quantos," *Risk*, March (1994): 71–75.

Reiner, E., "Quanto Mechanics," *Risk*, March (1992), 59–63.

练习题

29.1 解释你如何去对一个在5年后付出100R的衍生产品定价，其中R是在4年后所观察到的1年期利率（按年复利）。当支付时间在第4年时，会有什么区别？当支付时间在第6年时，会有什么区别？

29.2 解释在下列情况下，有没有必要做出任何曲率或时间调整？

(a) 我们要对一种期权定价，期权每个季度支付一次，数量等于5年的互换利率超出3个月LIBOR利率的部分（假如超出的话），本金为100美元，收益发生在利率被观察后的90天。

(b) 我们要对一种差价期权定价，期权每季度支付一次，数量等于3个月的LIBOR利率减去3个月的短期国库券利率，收益发生在利率被观察后的90天。

29.3 假设28.2节中例28-3的收益发生在1年后（即利率被观察后的一年），而不是15个月后。布莱克模型中所需要的参数会有什么区别？

29.4 收益曲线呈水平形状，利率为每年10%，按年复利，计算这样一个产品的价值：5年后收取2年互换利率（按年复利），而付出10%的固定利率，两种利率的本金数量均为100美元。假设互换利率的波动率为每年20%，解释产品的价格为什么不等于0。

29.5 解释下列情况下，练习题29.4会有何区别。互换利率被观察的时间为5年，但收益却分别发生在6年后和7年后。假设所有远期利率的波动率均为20%，介于5~7年之间的互换利率与介于5~6年之间的远期利率的相关系数为0.8，并与5~7年之间远期利率的相关系数为0.95。

29.6 一个债券在时间T的价格为其收益率的函数为$G(y_T)$。假设在一个对时间T到期的债券为远期风险中性的世界里，远期收益率y服从几何布朗运动。假定远期债券收益的增长率为α，波动率为σ_y，

(a) 利用伊藤引理，计算由α、σ_y、y和$G(y)$表示的远期债券价格的过程。

(b) 在所考虑的世界里，远期债券价格应当为一个鞅。利用这个结论来推导α的表达式。

(c) 证明α表达式的一阶逼近与式(29-1)一致。

29.7 变量S是一个提供中间收益率为q，并以货币A来度量的投资资产。在现实世界里，它服从以下过程

$$dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz$$

在需要时，可以定义新的变量，对以下情形，给出S所服从的过程，以及相应的风险市场价格

(a) 在货币A下的传统风险中性世界。

(b) 在货币B下的传统风险中性世界。

(c) 在货币A下，对时间T到期的债券为远期风险中性的世界。

(d) 在货币B下，对时间T到期的债券为远期风险中性的世界。

29.8 一个看涨期权在时间T提供的收益为$\max(S_T-K,\ 0)$日元，其中S_T为时间T以美元计价的黄金价格，K为执行价格。假设黄金存储费用为0，并定义其他必要的变量，计算合约的价值。

29.9 假设一个加拿大的股票指数的当前水平为400，而目前1加元值0.70美元，加拿大和美国的无风险利率分别为6%和4%，股指的股息收益率为3%。定义Q为每单位美元所兑换的加元数量，S为股指值，S的波动率为20%，Q的波动率为6%，S和Q之间的相关系数为0.4。利用DerivaGem计算以下关于这个指数的2年期美式看涨期权的价值：

(a) 以加元为度量的指数超出400的数量。

(b) 以美元为度量的指数超出400的数量。

作业题

29.10 考虑一个2年后支付S美元的产品，这里S代表日经指数，指数的当前值为20 000，日元/美元汇率为100(1美元所兑换的日元数量)。汇率与指数的相关系数为0.3，指数的股息收益率为每年1%。日经指数的波动率为20%，日元/美元汇率的波动率为12%。美国和日本的无风险利率(假定为常数)分别为4%和2%，

(a) 该产品的价值为多少?

(b) 假设在产品有效期内的某个时间，汇率为Q，指数的水平为S。证明一个美国投资者可以通过在日经指数上投资S美元，并且卖空SQ日元的组合来达到以下目的：当指数变化为ΔS日元时，组合的变化大约为ΔS美元。

(c) 通过假设指数由20 000变为20 050，汇率由100变为99.7来验证(b)的正确性。

(d) 你如何对所考虑的产品进行Delta对冲?

29.11 假设LIBOR收益率曲线呈水平状，利率为8%(按连续复利)。一个衍生产品的收益发生在4年后，并等于当时的5年期利率减去2年期利率，本金为100美元，而且利率均按连续复利为计(收益可正可负)。计算衍生产品的价值。假定所有利率的波动率均为25%。如果收益发生在5年后而不是4年后，这会引起什么不同？假设所有利率之间都有完美的相关性。

29.12 假设一个衍生产品的收益发生在10年后，并且等于在当时所观察到的3年期按每半年结算的互换合约的互换利率乘以本金数量。假定美元和日元收益率曲线均呈水平状，利率分别为8%和3%(均按半年复利)，远期互换利率的波动率为18%，10年期的“每单位美元的日元数量”远期汇率的波动率为12%，并且汇率与美元利率的相关系数为0.25。

(a) 如果互换利率用于1亿美元的本金上，从而收益按美元支付，这时衍生产品的价值为多少?

(b) 如果互换利率用于1亿日元的本金上，从而收益按日元支付，这时衍生产品的价值为多少?

29.13 一个衍生产品的收益发生在8年后，其数量等于在第5、6、7和8年时所观察到的1年期利率的平均值乘以1 000美元本金。收益率曲线呈水平状，利率等于6%(按年复利)，而所有利率的波动率均为16%。假设所有利率之间都具有完美的相关性，衍生产品的价值为多少?

附录29A

曲率调整公式的证明

在此我们计算关于远期债券收益率的曲率调整值。假设一个衍生产品在时间T的收益依赖于当时所观察到的一种债券的收益率。定义：

y_0——今天所观察到在时间T到期的远期合约中的远期债券收益率。

y_T——时间T的债券收益率。

B_T——时间T的债券价格。

σ_y——远期债券收益率的波动率。

我们假设

$$B_T = G(y_T)$$

将 $G(y_T)$ 在 $y_T = y_0$ 按泰勒级数展开，我们可以得到以下近似式

$$B_T = G(y_0) + (y_T - y_0)G'(y_0) + 0.5(y_T - y_0)^2 G''(y_0)$$

式中 G' 和 G'' 为函数 G 的一阶和二阶偏导数。在一个对时间 T 到期的零息债券为远期风险中性的世界里取期望值，我们得出

$$E_T(B_T) = G(y_0) + E_T(y_T - y_0)G'(y_0) + \frac{1}{2}E_T[(y_T - y_0)^2]G''(y_0)$$

式中 E_T 表示这个世界里的期望值。由定义可以得出，$G(y_0)$ 等于远期债券价格，并且在我们设定的特殊世界里，$E_T(B_T)$ 等于远期债券价格，$E_T(B_T) = G(y_0)$，因此

$$E_T(y_T - y_0)G'(y_0) + \frac{1}{2}E_T[(y_T - y_0)^2]G''(y_0) = 0$$

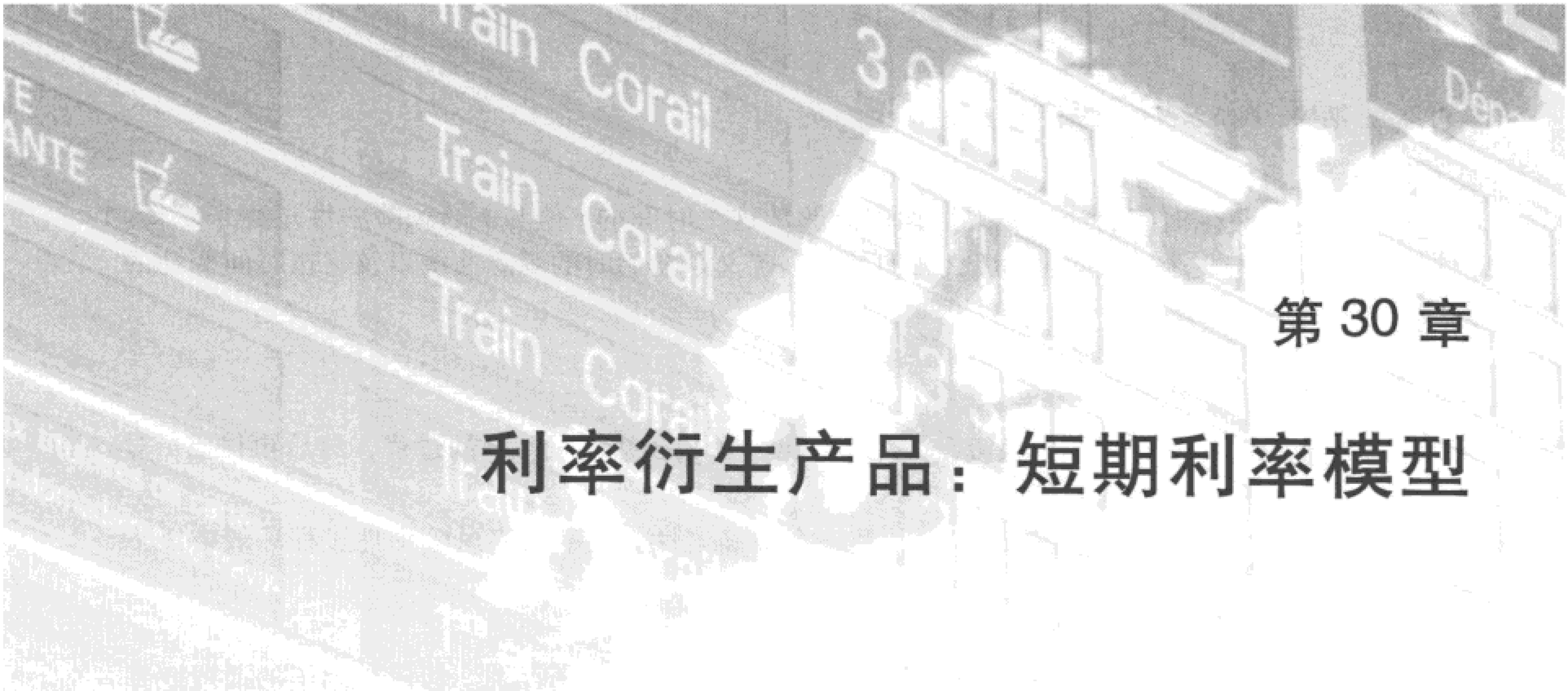
表达式 $E_T[(y_T - y_0)^2]$ 近似地等于 $\sigma_y^2 y_0^2 T$。因此，以下等式近似成立

$$E_T(y_T) = y_0 - \frac{1}{2}y_0^2\sigma_y^2 T\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

这说明了，如果我们想得到在一个对时间 T 到期的零息债券为远期风险中性世界里的债券收益率的期望值，我们应当给远期债券收益上加上以下数量

$$-\frac{1}{2}y_0^2\sigma_y^2 T\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

这正是式(29-1)中的结果。通过练习题29.6，我们可以得到关于这一结果的另外一种证明方法。



第 30 章

利率衍生产品：短期利率模型

到目前为止，在我们给出的利率衍生产品定价模型中都假定某个利率，或债券价格，或其他变量在将来某个时刻的概率分布为对数正态。这些模型在对上限、欧式债券期权和欧式互换这样的产品定价时被广泛应用。但是，它们很有局限性。这些模型不能对利率如何随时间变化来提供描述，因此，对美式互换期权、可赎回债券或结构型债券等产品定价时，这些模型是不适用的。

在本章和第 31 章中，我们将讨论克服这些局限性的不同方式，其中包括建立所谓的**利率期限结构模型**(term structure model)。这些模型描述了所有零息利率的变动规律[⊖]。在本章中，我们将注意力集中在如何刻画短期利率 r 的变动规律上，并以此来构造利率期限结构模型。

30.1 背景

在时间 t 的短期利率 r 是关于在 t 开始的一个无穷小时间区间上的利率，有时也被称为**瞬时短期利率**(instantaneous short rate)。债券价格、期权价格和其他衍生产品只依赖于 r 在风险中性世界里的过程，而与 r 在现实世界的过程无关。如第 27 章所述，在传统风险中性世界，在一个很短的时间区间 t 到 $t+\Delta t$ 内，投资者挣得的平均回报率为 $r(t)\Delta t$。除非特别指出的情形，我们所给出的所有关于 r 的过程均定义在这个风险中性世界里。

由式(27-19)，一个在时间 T 提供收益为 f_T 的利率衍生产品在时间 t 的价值为

$$\hat{E}[e^{-\bar{r}(T-t)}f_T] \tag{30-1}$$

其中 $\bar{r}$ 为 r 在时间 t 与 T 之间的平均值，$\hat{E}$ 表示在传统风险中性世界里的期望值。

与通常一样，我们定义 $P(t, T)$ 为一个在时间 T 支付 1 美元的零息债券在时间 t 时的价格。由式(30-1)得出

$$P(t,T) = \hat{E}[e^{-\bar{r}(T-t)}] \tag{30-2}$$

如果 $R(t, T)$ 为在时间 t，期限为 $T-t$，按连续复利的利率，那么

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \tag{30-3}$$

于是

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T) \tag{30-4}$$

由式(30-2)得出

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln \hat{E}[e^{-\bar{r}(T-t)}] \tag{30-5}$$

⊖ 在使用利率期限结构模型时，我们无须进行第 29 章所述的曲率、时间和 Quanto 调节。

PDG

通过这个方程，任何时间的利率期限结构都能够从这个时间的 r 值与 r 的风险中性过程来求得。这说明一旦我们定义了 r 的过程，那么我们就完全定义了初始时的零息曲线以及它按时间变动的规律。

30.2 均衡模型

均衡模型一般先对经济变量做假设，并推导出一个关于短期利率 r 的过程，然后再得出 r 对债券价格与期权价格的影响。

在单因子均衡模型中，r 的过程仅仅涉及一个不确定性。短期利率风险中性过程一般由以下形式的伊藤过程来描述

$$dr = m(r)\,dt + s(r)\,dz$$

式中瞬时漂移项 m 与瞬时标准差 s 均被假设为 r 的函数，但与时间无关。假设单因子的局限性并不像看起来那么严重。单因素假设意味着在一个很短的时间区间内，所有的利率都向同一方向变动，但它们所变化的数量并不一定相同。因此，零息曲线的形状可以随时间的变化而变化。

在本节中，我们现在考虑三种单因子平衡性模型：

$m(r) = \mu r;\ s(r) = \sigma r$ （Rendleman 和 Bartter 模型）

$m(r) = a(b-r);\ s(r) = \sigma$ （Vasicek 模型）

$m(r) = a(b-r);\ s(r) = \sigma\sqrt{r}$ （Cox, Ingersoll 和 Ross 模型）

30.2.1 Rendleman 和 Bartter 模型

在 Rendleman 和 Bartter 模型中，r 的风险中性过程为[㊀]

$$dr = \mu r dt + \sigma r dz$$

式中 μ 和 σ 均为常数。这意味着 r 服从几何布朗运动，r 的过程与第 14 章里关于股票价格所假设的过程是同一类型[㊁]，以上关于利率的假设可以通过类似于在第 12 章里描述股票价格变动的二叉树来表示。

乍一看，我们可能会很自然地假设利率与股票价格的变化规律一样，但这一假设并不理想。利率与股票价格的一个重要区别在于利率有被“拉回”到某个长期平均水平的趋势，这种现象被称为**均值回归**(mean reversion)。当 r 很高时，均值回归将会使其产生负的漂移；当 r 很低时，均值回归将会使其产生正的漂移。我们将均值回归现象展示在图 30-1 中。Rendleman 和 Bartter 模型没有考虑均值回归的性质。

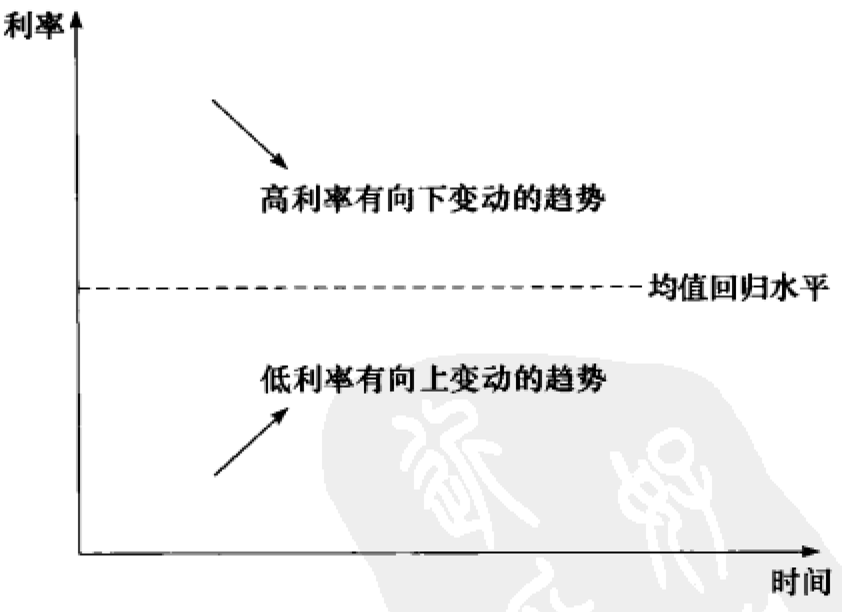


图 30-1 均值回归

关于均值回归有很多令人信服的经济原因。当利率很高时，经济发展会变缓，贷款发行人因为资金需求的降低而下调利率；但当利率很低时，资金需求会增大，贷款发行人因此会上调利率。

㊀ 见 R. Rendleman and B. Bartter, “The Pricing of Options on Debt Securities,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15(March 1980): 11-24。

㊁ 我们将在本章后面解释利率树形的使用方法。

30.2.2 Vasicek 模型

在 Vasicek 模型中，r 的风险中性过程为

$$dr = a(b-r)dt + \sigma dz$$

其中 a，b 和 σ 均为常数[㊀]。这一模型考虑了均值回归性，短期利率以速度 a 被拉回到水平 b。模型是在这一回归力之上附加了一个服从正态分布的随机变量 σdz。

Vasicek 证明了由式(30-2)可以得出关于在时间 T 支付 1 美元的零息债券在时间 t 的价格为

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \tag{30-6}$$

式中，$r(t)$ 为 r 在时间 t 的值，其中

$$B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \tag{30-7}$$

和

$$A(t,T) = \exp\left[\frac{(B(t,T)-T+t)(a^2b-\sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2B(t,T)^2}{4a}\right] \tag{30-8}$$

当 $a=0$ 时，$B(t, T)=T-t$，$A(t, T)=\exp[\sigma^2(T-t)^3/6]$。

30.2.3 Cox，Ingersoll 和 Ross 模型

Cox、Ingersoll 和 Ross(CIR)提出了另一种模型[㊁]。在他们的模型中，r 的过程为

$$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

与 Vasicek 模型一样，以上模型也具有均值回归性，但短期利率在一个很小时间区间内变化的标准差与 $\sqrt{r}$ 成正比。这说明了，当短期利率上涨时，其标准差也会增大。

Cox、Ingersoll 和 Ross 证明了在他们的模型中，债券价格具有与 Vasicek 模型一样的一般形式

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

但函数 $B(t, T)$ 和 $A(t, T)$ 具有以下不同的形式

$$B(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}$$

和

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{2ab/\sigma^2}$$

式中 $\gamma=\sqrt{a^2+2\sigma^2}$。

30.2.4 Vasicek 模型与 CIR 模型的性质

Vasicek 模型与 CIR 模型里的函数 $A(t, T)$ 和 $B(t, T)$ 是不一样的，但在这两种模型里

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

因此

$$\frac{\partial P(t,T)}{\partial r(t)} = -B(t,T)P(t,T) \tag{30-9}$$

利用式(30-4)得出，在时间 t，期限为 $T-t$ 的零息利率为

㊀ 见 O. A. Vasicek，"An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5(1977): 177-188。

㊁ 见 J. C. Cox, J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53 (1985): 385-407。

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln A(t,T) + \frac{1}{T-t}B(t,T)r(t)$$

以上方程说明了一旦 a，b 和 σ 被选定，整个期限结构可以由一个 $r(t)$ 的函数来确定。利率 $R(t, T)$ 与 $r(t)$ 之间有线性关系[⊖]。这说明了 $r(t)$ 的值确定了在时间 t 期限结构的大小，期限结构在时间 t 的形状与 $r(t)$ 无关，但却与时间 t 有关。如图 30-2 所示，其图形可以是上升、下降或具有轻微的“驼峰”的形状。

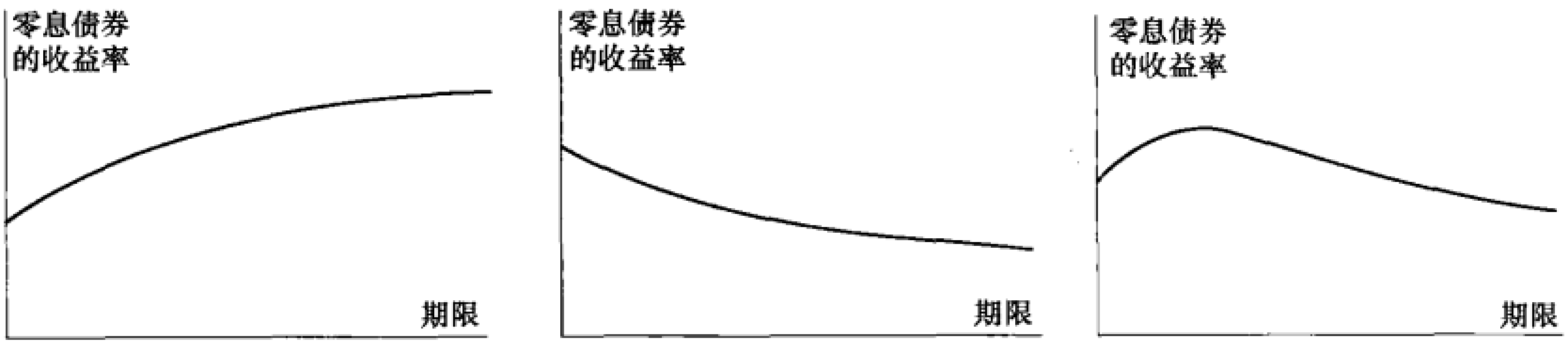


图 30-2 Vasicek 模型下可能的期限结构

在第 4 章里我们看到，如果债券或其他依赖利率的产品价格为 Q，其久期 D 是由

$$\frac{\Delta Q}{Q} = -D\Delta y$$

来定义的，其中 ΔQ 是当收益率曲线变化为很小的平行移动 Δy 时，Q 的变化数量。可以与 Vasicek 模型和 CIR 模型结合使用的另一种久期为 $\frac{\Delta Q}{Q} = -\hat{D}\Delta r$，或等价地 $\frac{\partial Q}{\partial r} = -\hat{D}Q$。当 Q 为零息债券价格 $P(t, T)$ 时，由式(30-9)可知 $\hat{D} = B(t, T)$。

【例 30-1】 考虑持续 4 年的零息债券。这时 $D=4$，因此在期限结构上 10 个基点(0.1%)的平行移动会使债券价格大约下降 0.4%。如果使用 $a=0.1$ 的 Vasicek 模型

$$\hat{D} = B(0,4) = \frac{1-e^{-0.1\times 4}}{0.1} = 3.29$$

这说明短期利率增长 10 个基点会使债券价格下降大约 0.329%。由于均值回归的作用，短期利率变化 10 个基点对债券价格的影响比零息利率曲线平行移动 10 个基点的影响要小。

当 Q 是 n 个零息债券的组合时，如果对 $1 \leqslant i \leqslant n$，$P(t, T_i)$ 是第 i 个债券的价格，c_i 是其面值，那么

$$\hat{D} = \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial P(t,T_i)}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i P(t,T_i)}{Q}\hat{D}_i$$

式中 $\hat{D}_i$ 是 $P(t, T_i)$ 的 $\hat{D}$。这说明带息债券的 $\hat{D}$ 可以作为组成这个债券的零息债券 $\hat{D}$ 的加权平均来计算，这与通常的久期测度 D 的计算类似(见表 4-6)。与久期类似，我们可以定义 Vasicek 模型与 CIR 模型下的曲率测度(见练习题 30.22)。

由于 $P(t, T)$ 是可交易证券的价格，其在传统风险中性世界里的增长率期望为 $r(t)$。因为债券价格 $P(t, T)$ 是 $r(t)$ 的函数，在 $P(t, T)$ 过程中 dz 的系数可以通过伊藤引理来得到：在 Vasicek 模型里为 $\sigma\partial P(t, T)/\partial r(t)$，在 CIR 模型里为 $\sigma\sqrt{r}\partial P(t, T)/\partial r(t)$。由式(30-9)可知 $P(t, T)$ 在

⊖ 一些研究人员已经提出了双因子平衡性模型。相对 Vasicek 模型与 CIR 模型来讲，这种两因子模型能够给出更丰富的期限结构形状。例如，见 F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, “Interest Rate Volatility and the Term Structure: A two Factor General Equilibrium Model,” *Journal of Finance*, 47, 4(September 1992): 1259-82。

风险中性世界里的过程为

$$\text{Vasicek: } dP(t,T) = r(t)P(t,T) - \sigma B(t,T)P(t,T)\,dz(t)$$

$$\text{CIR: } dP(t,T) = r(t)P(t,T) - \sigma\sqrt{r(t)}B(t,T)P(t,T)\,dz(t)$$

为了比较在给定 r 时由 Vasicek 模型与 CIR 模型所给出的利率期限结构，我们使用相同的常数 a 和 b。但是在 Vasicek 模型里的 σ，记为 σ_{vas}，应当大致等于 CIR 里的 σ，记为 σ_{cir}，乘以 $\sqrt{r}$。例如，如果 r 为 4%，$\sigma_{vas}=0.01$，σ_{cir} 的值应当取成 $0.01/\sqrt{0.04}=0.05$。Vasicek 模型给出的零息债券收益率比 CIR 模型要低。可以对这些模型做实验的软件可以从 www.rotman.utoronto.ca/~hull/VasicekCIR 下载。在 Vasicek 模型里 r 可能会出现负值，但在 CIR 模型里这是不可能的。[㊀]

30.2.5 均衡模型的应用

在下一节我们将会看到，对于衍生产品定价来说，将所用的模型与当前的利率期限结构相吻合是很重要的。但是，当为了做情形分析而在很长时间区间上进行蒙特卡罗模拟时，本节讨论的均衡模型可能会是很有用处的工具。如果一个养老基金或保险公司只关心一个投资组合在 20 年以后的价值，那么利率期限结构是否可以和当前的利率期限结构进行吻合与组合在 20 年后的风险暴露不会有太大的关系。

一旦选取了所讨论的模型，一种处理方法是通过短期利率在过去的变动来确定参数。搜集的数据可以是每天、每周或每月内短期利率的变化，确定参数的方法包括线性回归或 22.5 节讨论过的极大似然估计。另一种处理方法是利用解析公式使模型尽量与在市场上交易的债券价格相吻合。

这两种处理方式之间有很重要的区别。第一种方式(与历史数据吻合)提供的是在现实世界里的参数估计，而第二种方式(与债券价格吻合)提供的是在风险中性世界里的参数估计。在进行情形分析时，我们感兴趣的是描述短期利率在现实世界里变化的模型。但是，在蒙特卡罗模拟时间中的每一时刻，我们往往希望能够知道完整的利率期限结构。因此，我们需要在风险中性世界里的参数值。

当我们从现实世界转换到风险中性世界时，短期利率的波动率不会改变，但漂移项则会变化。为了确定漂移项的变化，我们需要估计利率风险的市场价格。Ahmad 和 Wilmott 的方法是比较零息收益率曲线的斜率与短期利率在现实世界里的漂移项[㊁]。他们对美国利率风险市场价格的长期平均值的估计为大约 -1.2。在不同时间上，他们估计的利率风险市场价格变化很大。在市场疲软的情况下，“恐惧因素”会很高(比如在 2007 ~2009 年之间的信用危机)，这时的利率风险市场价格是比 -1.2 大得多的负数。

【例 30-2】 假设 Vasicek 模型的离散形式

$$\Delta r = a(b-r)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

被用来吻合短期利率在 10 年中的每周数据，目的是为了进行蒙特卡罗模拟。模型的参数可以通过在 r 对 Δr 做回归。另一种方法是利用极大似然估计法。如果 r_i 是在第 $i(0\leqslant i\leqslant m)$ 周结束时的短期利率，那么极大似然函数为

$$\sum_{i=1}^{m}\left(-\ln(\sigma^2\Delta t) - \frac{[r_i - r_{i-1} - a(b-r_{i-1})\Delta t]^2}{\sigma^2\Delta t}\right)$$

㊀ 在 CIR 模型里，当利率接近于 0 时，利率变化的可能性变得很小。在所有情形下都不会出现负利率。当 $2ab\geqslant\sigma^2$ 时，也不会有 0 利率。

㊁ 见 Ahmad and P. Wilmott, “The Market Price of Interest-Rate Risk: Measuring and Modeling Fear and Greed in the Fixed-Income Markets,” *Wilmott*, January 2007, 64-70.

其中 $\Delta t=1/52$。假设 a，b 和 c 的最佳值分别为 $a=0.2$，$b=0.04$ 和 $\sigma=0.01$（这些值表明短期利率会回归到4.0%，回归速度为20%。在任何时刻，短期利率的波动率等于1%除以短期利率）。然后可以在现实世界里模拟短期利率。

为了确定 r 的风险中性过程，我们注意 r 的比例漂移项为 $a(b-r)/r$，波动率为 σ/r。由第27章的结果我们知道，当从现实世界转移到风险中性世界时，比例漂移项会减少 $\lambda\sigma/r$，其中 λ 为利率风险的市场价格。因此，在风险中性世界里 r 的过程为 $dr=[a(b-r)-\lambda\sigma]dt+\sigma dz$，或 $dr=a(b^*-r)dt+\sigma dz$，其中，$b^*=b-\lambda\sigma/a$。

利用 Ahmad 和 Wilmott 的结果，我们可以令 $\lambda=-1.2$，因此 $b^*=0.04+1.2\times0.01/0.2=0.1$。在蒙特卡罗模拟的任何时刻，都可以利用式(30-6)到式(30-8)来确定完整的利率期限结构($b=b^*$)。

【例30-3】 CIR 模型 $dr=a(b-r)dt+\sigma\sqrt{r}dz$ 的解析结果可以用来对任何期限的债券定价。假定使得一组债券的市场价格与模型给出价格的差取得最小的优化参数为 $a=0.15$，$b=0.06$ 和 $c=0.05$。这些参数值给出了短期利率与市场价格最佳吻合的风险中性过程。在这里，短期利率的比例漂移项为 $a(b-r)/r$，短期利率的波动率为 $\sigma/\sqrt{r}$。由第27章可知，当我们从风险中性世界转换到现实世界时，比例漂移项会增加 $\lambda\sigma/\sqrt{r}$，其中 λ 为利率风险市场价格。因此，在现实世界里 r 的过程为

$$dr=[a(b-r)+\lambda\sigma\sqrt{r}]dt+\sigma\sqrt{r}dz$$

这个过程可以用来对现实世界的短期利率过程进行模拟[㊀]。在任何时刻，利用风险中性过程与解析结果可以得出长期利率。与前面相同，我们可以令 $\lambda=-1.2$。

30.3 无套利模型

上面所讨论的均衡模型的缺点在于无法自动地与今天的利率期限结构达到吻合。通过精心选取参数，我们可以利用模型来对实际生活中所遇到的许多期限结构进行近似，但这种逼近一般是不完美的，大多数交易员对此不太满意，他们的观点并非没有道理。交易员认为，如果模型对标的债券的价格都不能准确地定价，那么很难相信模型会给出一个合理的债券期权价格，因为1%的债券价格误差可能会导致25%的期权价格误差。

无套利模型(no-arbitrage model)是能够做到与今天的利率期限结构完全吻合的模型。因此，均衡模型与无套利性模型的本质区别如下：在均衡模型下，今天的利率期限结构是模型所输出的结果，而无套利模型将今天的利率期限结构作为输入值来使用。

在均衡模型中，短期利率的漂移项(即 dt 系数)一般不是时间的函数，但是在无套利模型中，漂移项与时间 t 有关，这是因为在无套利模型下，初始零息利率曲线的形状决定了将来短期利率变化所取的平均路径。如果零息利率曲线在时间 t_1 和 t_2 之间呈现急剧上升的形状，那么 r 在这两个时间之间的漂移项将会为正，反过来，如果零息利率曲线在这两个时间之间呈现急剧下降的形状，那么 r 在这两个时间之间的漂移项将会为负。

我们会发现，在短期利率的漂移项中引入一个时间 t 的函数时，某些均衡模型可以转换为无套利模型。我们接下来将讨论 Ho-Lee、Hull-White(单因子和双因子)、Black-Derman-Toy 和 Black-Karasinski 模型。

30.3.1 Ho-Lee 模型

Ho 和 Lee 在1986年的一篇文章里第一次提出了关于期限结构的无套利模型[㊁]，他们通过假定债券

㊀ 对于 CIR 模型，当在现实世界与风险中性世界互相转换时，比较方便的假设是 λ 与 $\sqrt{r}$ 或 $1/\sqrt{r}$ 成比例，因为这样可以保持漂移项的函数形式。

㊁ 见 T. S. Y. Ho and S. - B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, 41(December 1986)：1011-29。

价格的变化规律为具有两个参数的二叉树形式来描述模型，这里的两个参数为短期利率的标准差和短期利率的风险市场价格。可以证明，Ho-Lee 模型在连续时间的极限为

$$dr = \theta(t)\,dt + \sigma dz \tag{30-10}$$

式中短期利率的瞬时标准差 σ 为常数，$\theta(t)$ 为时间 t 的函数，其选取标准是确保模型与初始期限结构相吻合。变量 $\theta(t)$ 定义了 r 随时间 t 移动的平均方向，它与 r 的大小无关。当模型用于利率衍生产品定价时，模型里刻画风险市场价格的参数是没有关系的。

我们可以用解析式来表示变量 $\theta(t)$（见练习题 30.13），其公式为

$$\theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t \tag{30-11}$$

式中 $F(0, t)$ 为时间 0 所观察的在时间 t 的瞬时远期利率，而下标 t 表示对于 t 的偏导数。$\theta(t)$ 近似等于 $F_t(0, t)$，这说明短期利率在将来移动的平均方向近似地等于瞬时远期利率曲线的斜率。Ho-Lee 模型如图 30-3 所示，远期利率曲线的斜率确定了短期利率在将来任何时刻的平均移动方向，模型在这个斜率上附加了一个按正态分布的随机项。

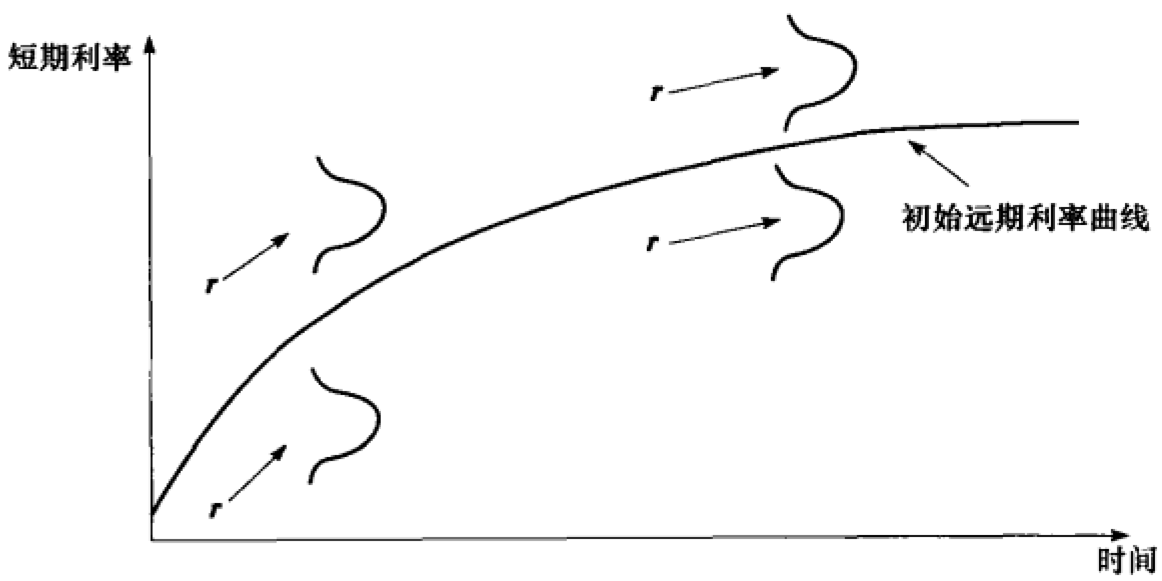


图 30-3 Ho-Lee 模型

在 Ho-Lee 模型中，零息债券和零息债券欧式期权都可以用解析公式表达。在时间 t，由短期利率所表示的零息债券价格公式为

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-r(t)(T-t)} \tag{30-12}$$

式中

$$\ln A(t,T) = \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + (T-t)F(0,t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\,(T-t)^2$$

在这些方程中，今天的时间为 0，时间 t 和 T 一般代表将来时间，其中 $T \geqslant t$。因此，这些方程给出了由时间 t 的短期利率和今天的债券价格所表示的在将来时刻 t 的零息债券价格，今天的债券价格可以由今天的期限结构来计算。

30.3.2 Hull-White（单因子）模型

在 1990 年发表的一篇文章中，Hull 和 White 讨论了如何将 Vasicek 模型推广到与初始期限结构相吻合的情形[⊖]，他们所考虑的是 Vasicek 模型的一种推广形式

$$dr = [\theta(t) - ar]\,dt + \sigma dz \tag{30-13}$$

或

$$dr = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]dt + \sigma dz$$

⊖ 见 J. Hull and A. White, "Pricing Interest Rate Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, 3, 4(1990): 573-92。

式中 a 和 σ 为常数，这个模型被称为 Hull-White 模型。它既可以被刻画为具有均值回归速度 a 的 Ho-Lee 模型，也可以被刻画成具有依赖时间回归水平的 Vasicek 模型。在时间 t，短期利率以 a 的速度回归到$\theta(t)/a$。Ho-Lee 模型是 Hull-White 模型对应于 $a=0$ 时的特例。

Hull-White 模型具有 Ho-Lee 模型一样的解析性质。函数 $\theta(t)$ 可以由初始期限结构来计算得出（见练习题 30.14），

$$\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \tag{30-14}$$

这个方程的最后一项一般很小，如果我们将其忽略，r 的漂移项在时间 t 等于 $F_t(0, t) + a[F(0, t) - r]$。这说明了在平均意义下，$r$ 沿初始瞬时远期利率曲线的斜率方向变动。当利率离这一曲线太远时，均值回归会使得利率以 a 的速度返回到该曲线。模型如图 30-4 所示。

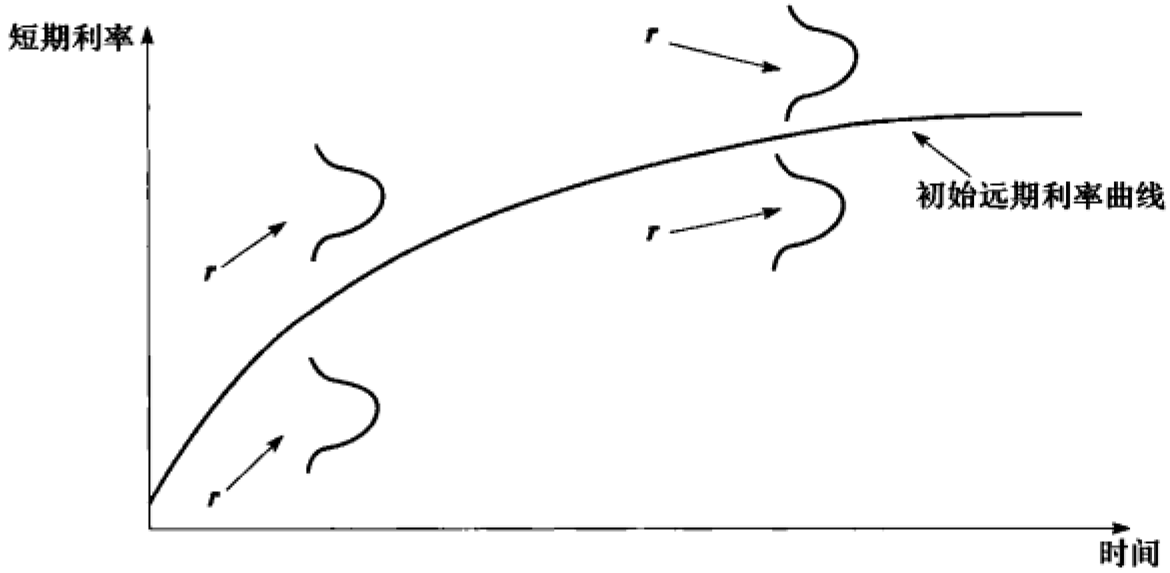


图 30-4 Hull-White 模型

在 Hull-White 模型下，在时间 t 的债券价格为

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \tag{30-15}$$

其中

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \tag{30-16}$$

和

$$\ln A(t,T) = \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + B(t,T)F(0,t) - \frac{1}{4a^3}\sigma^2(e^{-aT} - e^{-at})^2(e^{2at} - 1) \tag{30-17}$$

式(30-15)、式(30-16)和式(30-17)给出了在将来时间 t 的零息债券价格，这个价格是由时间 t 的短期利率和今天的债券价格所表示的，而今天的债券价格可以由今天的期限结构来计算。

在本章的后面部分里我们将给出利用三叉树表示 Hull-White 模型的方法，这对美式期权或其他不能用解析公式定价的衍生产品是很有用的。

30.3.3 Black-Derman-Toy 模型

1990 年 Black，Derman 和 Toy 提出了针对对数正态短期利率的二叉树模型[⊖]。在网页 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes 的 Technical Note 23 中解释了他们建立二叉树的程序。可以证明对应于模型的随机过程是

$$d\ln r = [\theta(t) - a(t)\ln r]dt + \sigma(t)dz$$

⊖ 见 F. Black, E. Derman, and W. Toy, "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Prices," *Financial Analysts Journal*, January/February(1990): 33-39。

其中

$$a(t) = -\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$$

$\sigma'(t)$是$\sigma(t)$对于t的导数。相对于 Ho-Lee 模型和 Hull-White 模型而言，Black-Derman-Toy 模型的优点是利率不会取负值。维纳过程 dz 会使 ln$r$ 取负值，但 r 本身永远是正的。模型的缺点是没有解析性质。这个模型的一个更严重的缺点是在构造树形时，在波动率参数$\sigma(t)$与回归速度参数$a(t)$之间强加了一种关系。只有当短期利率波动率是时间的递减函数时，回归速度才会是正的。

在实践中，这个模型最有用的特殊情形是当$\sigma(t)$为常数，这时参数a为零，所以在模型里没有均值回归性质。这时的模型为

$$\mathrm{d}\ln r = \theta(t)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}z$$

这可以刻画成对数正态版的 Ho-Lee 模型。

30.3.4 Black-Karasinski 模型

1991 年 Black 和 Karasinski 建立了一种 Black-Derman-Toy 模型的推广形式，其中回归率与波动率由相互独立的方式确定。模型的最一般形式是

$$\mathrm{d}\ln r = [\theta(t) - a(t)\ln r]\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}z \tag{30-18}$$

这个模型与 Black-Derman-Toy 模型的形式是一样的，但不同之处是在$a(t)$与$\sigma(t)$之间没有关系。在实践中常常将$a(t)$与$\sigma(t)$假设成常数，因此模型变为

$$\mathrm{d}\ln r = [\theta(t) - a\ln r]\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}z$$

与前面考虑的模型一样，函数$\theta(t)$的选取是为了使模型与初始利率期限结构完全吻合。模型没有解析性质，但在本章后面我们将看到，利用三叉树可以在确定$\theta(t)$的同时也让树形用于描述r的过程。

30.3.5 Hull-White 双因子模型

Hull 和 White 发展了一种双因子模型[⊖]

$$\mathrm{d}f(r) = [\theta(t) + u - af(r)]\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}z_1 \tag{30-19}$$

其中$f(r)$是r的函数，u的初始值为 0，并且服从以下过程

$$\mathrm{d}u = -bu\mathrm{d}t + \sigma_2\mathrm{d}z_2$$

和刚才考虑的单因子模型一样，参数$\theta(t)$的选择是为了使模型与初始期限结构一致。随机过程u是$f(r)$回归水平的一部分，其自身以b的速度回归到水平 0 上。参数a、b、σ_1和σ_2均为常数，$\mathrm{d}z_1$和$\mathrm{d}z_2$为两个具有瞬时相关系数ρ的维纳过程。

与单因子模型相比，这个模型能够提供更为丰富的期限结构形状和波动率形状。在网页 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes 的 Technical Note 14 中可以找到更多关于这个模型的结果。

30.4 债券期权

在我们已引入的模型中，有的模型可以解析地计算关于零息债券的欧式期权价格。对于 Vasicek 模型、Ho-Lee 模型以及 Hull-White 模型，在时间s到期的零息债券上期限为T的欧式看涨

⊖ 见 J. Hull and A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models Ⅱ: Two-Factor Models," *Journal of Derivatives*, 2, 2(Winter 1994): 37-48。

期权在时间 0 的价值为

$$LP(0,s)N(h) - KP(0,T)N(h-\sigma_P) \tag{30-20}$$

其中 L 为债券本金，K 为执行价格，并且

$$h = \frac{1}{\sigma_P}\ln\frac{LP(0,s)}{P(0,T)K} + \frac{\sigma_P}{2}$$

相应的看跌期权价格为

$$KP(0,T)N(-h+\sigma_P) - LP(0,s)N(-h)$$

在 Vasicek 和 Hull-White 模型下

$$\sigma_P = \frac{\sigma}{a}[1-e^{-a(s-T)}]\sqrt{\frac{1-e^{-2aT}}{2a}}$$

在 Ho-Lee 模型下

$$\sigma_P = \sigma(s-T)\sqrt{T}$$

式(30-20)与 28.1 节中讨论的对债券定价的布莱克模型是基本一致的，远期债券价格的波动率为$\sigma_P/\sqrt{T}$，在时间 T 债券价格对数的标准差为 σ_P。如 28.2 节所述，我们可以将利率上限或下限表示为零息债券期权的组合，因此我们可以利用以上给出的方程以解析式来表达上限/下限的价格。

在 30.2 节中，我们曾讲述过在 Cox、Ingersoll 和 Ross 模型中也存在计算零息债券期权的解析公式，这些公式涉及非中心 Chi 平方分布的积分。

带券息的债券期权

在单因子模型下，当 r 下降时，所有零息债券的价格都会上涨；而当 r 上升时，所有的零息债券的价格都会下降。因此，在单因子模型下，我们可以将关于带券息债券的欧式期权表示成一些关于零息债券欧式期权的组合。具体程序如下：

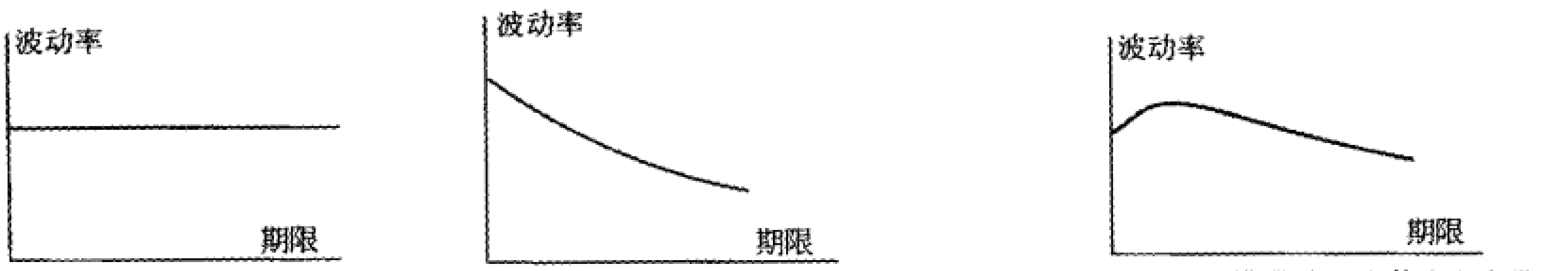
- 计算 r 的关键值 r^*，该值保证在期权到期时，相应的带券息债券的价格等于债券期权执行价格。
- 计算零息债券期权的价格，这些零息债券构成了带息债券，其中每个期权的执行价格都等于在时间 T，当 $r=r^*$ 时的零息债券价格。
- 令带券息债券的期权价格等于在第二步所计算出的所有零息债券欧式期权的价格之和。

这样，我们可以在 Vasicek 模型、Cox、Ingersoll 和 Ross 模型、Ho-Lee 模型以及 Hull-White 模型下计算出关于带券息的债券期权价格。如业界事例28-2 所述，一个欧式互换期权可以被看成带券息债券欧式期权，因此，欧式互换期权也可以由以上描述的过程来定价。作者网页(www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes)上的 Technical Note 15 对计算过程给出了更为详细的介绍。

30.5 波动率结构

我们所讨论的模型可以产生不同的波动率结构。在图 30-5 中，我们展示了在 Ho-Lee 模型、Hull-White 单因子模型以及 Hull-White 双因子模型下 3 个月期远期利率的波动率与期限之间的函数关系。

在 Ho-Lee 模型中，3 个月期远期利率波动率对于所有期限均相同。在单因子 Hull-White 模型中，由于均值回归的影响，3 个月期远期利率波动率随时间期限的增大而有所下降。在 Hull-White 双因子模型中，在一定的参数条件下，3 个月期远期利率的波动率具有“驼峰”形状。在 28.2 节中，我们曾指出这一现象与实证分析里所隐含的波动率是一致的。



a) Ho-Lee模型　b) Hull-White单因子模型　c) Hull-White两因子模型(在一定的合理参数下)

图 30-5　在对于以下模型中，3 个月期远期利率波动率与期限之间的函数关系

30.6　利率树形

利率树形是短期利率随机过程在离散时间下的表现形式，这与股票价格树形对于股票价格所服从过程在离散时间下的表现形式基本是一样的。假如树形的时间步长为 Δt，那么树形上的利率是按连续复利计算的 Δt 时间区间的利率。在构造树形时，通常的假设是 Δt 时间区间的利率 R 服从的随机过程与瞬时利率 r 在连续时间下的随机过程是一样的。利率树形与股票树形的主要区别在于如何贴现。在股票价格树上，一般的假设是贴现率在每个节点上都是一样的(或为时间的函数)，但在利率树形上，贴现率从一个节点到另一个节点会不相同。

我们常常会发现对利率而言，使用三叉树比二叉树更为方便。三叉树的主要优点是它为用户多提供了一项自由度，这使得我们可以较为容易地表示像均值回归这样的利率过程。如 20.8 节所述，三叉树方法与显式有限差分法等价。

30.6.1　三叉树应用例解

为了展示如何使用三叉树来对利率衍生产品定价，我们考虑由图 30-6 所表示的一个简单例子。这里的三叉树是一个 2 步树形，步长为 1 年，即 $\Delta t = 1$。我们假设在每个节点上，向上变动、保持不变、向下变动的概率分别为 0.25、0.5、0.25。这里每个 Δt 时间区间的利率显示在节点上方[⊖]。

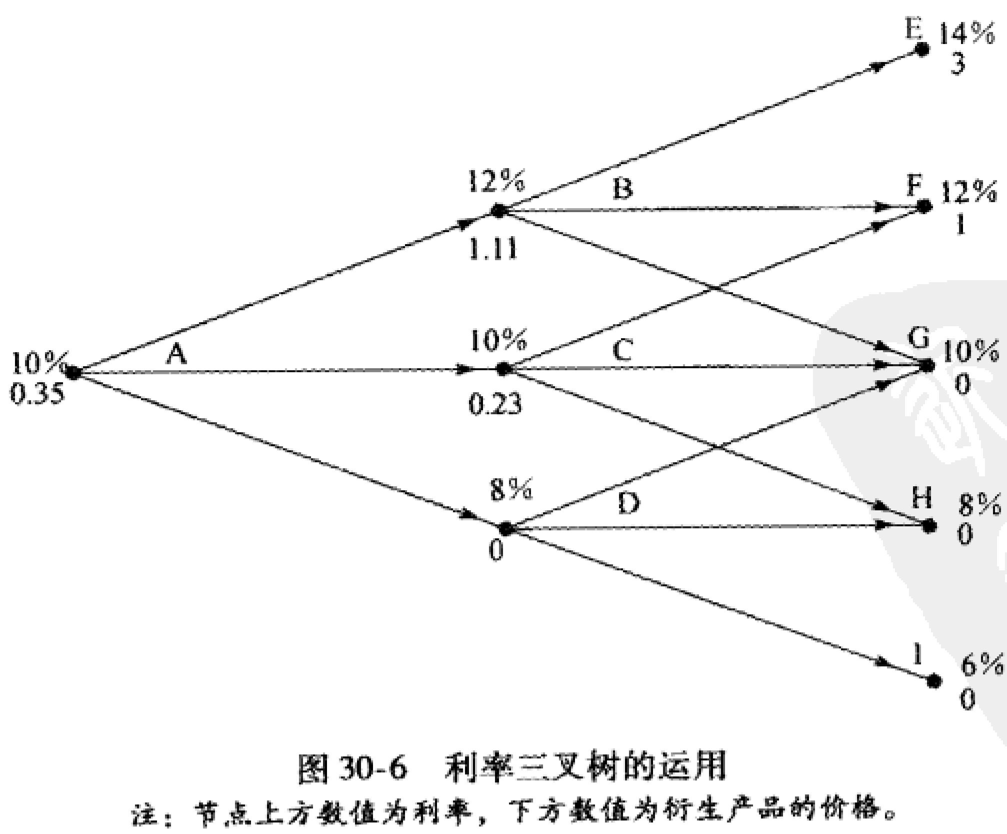


图 30-6　利率三叉树的运用

注：节点上方数值为利率，下方数值为衍生产品的价格。

⊖ 在后面我们将解释利率树形上的利率和概率的确定方式。

我们将利用以上给出的树形来计算一个在第二年末提供收益为

$$\max[100(R-0.11),0]$$

的衍生产品的价格，其中 R 为 Δt 时间段利率。计算出的衍生产品价值显示在节点下方。在最后一步的节点上，衍生产品的价格等于其收益。例如，在节点 E 上，衍生产品价值为 $100\times(0.14-0.11)=3$，在前面的节点上，衍生产品的价值是通过在第 12 章和第 20 章里所描述的反向递推方式计算得出的。在节点 B 上，1 年利率为 12%，它将用于贴现计算，由节点 E、F 和 G 上的值，我们可以求得衍生产品在节点 B 的价格，计算公式为

$$(0.25\times3+0.5\times1+0.25\times0)e^{-0.12\times1}=1.11$$

在节点 C 上，1 年利率为 10%，由此可以得出衍生产品在节点 C 上的价格，计算公式为

$$(0.25\times1+0.5\times0+0.25\times0)e^{-0.1\times1}=0.23$$

在初始节点 A，利率也是 10%，因此衍生产品价格为

$$(0.25\times1.11+0.5\times0.23+0.25\times0)e^{-0.1\times1}=0.35$$

30.6.2 非标准树枝

我们发现有时对图 30-6 中的标准树枝加以修改，会使得树形更易于使用。图 30-7 展示了 3 种不同形式。通常的树枝显示在图 30-7a 中，其形状为“上升一格/平行/下降一格”；图 30-7b 所示的树枝的形状为“上升两格/上升一格/平行”，这种形状在考虑均值回归而且利率很低时会有用处；图 30-7c 所示第三种树枝的形状为“平行/下降一格/下降两格”。这种形状在考虑均值回归而且利率很高时会有用处。在 30.7 节里，我们将讨论如何使用这些不同的树枝形状来建立树形。

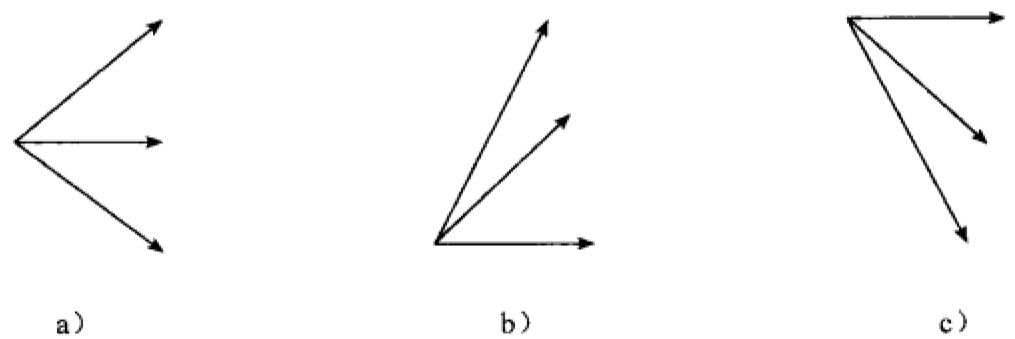


图 30-7 三叉数中的不同树枝形状

30.7 建立树形的过程

对于一类广泛的单因子模型，Hull 和 White 提出了如何通过一个两步程序来构造三叉树[⊖]。在本节里，我们将解释如何对式(30-13)所定义的 Hull-White 模型来应用这个两步程序，并同时说明如何将其推广到其他模型，如 Black-Karasinski 模型。

30.7.1 第一步

刻画瞬时短期利率 r 的 Hull-White 模型为

$$dr=[\theta(t)-ar]dt+\sigma dz$$

假定树形的时间步长为常数，并等于 Δt[⊜]。

我们假定 Δt 时间区间的利率 R 服从与 r 同样的过程

⊖ 见 J. Hull and A. White, “Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: SingleFactor Models,” *Journal of Derivatives*, 2, 1(1994): 7-16; and J. Hull and A. White, “Using Hull-White Interest Rate Trees,” *Journal of Derivatives*, (Spring 1996): 26-36。

⊜ 关于使用非均匀步长的情形，见网页 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes 上的 Technical Note 16。

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz$$

显然，在 Δt 趋于零的极限下，这是一个合理假设。构造关于这个模型的三叉树的第一步是首先建立一个关于 R^* 的三叉树，这里 R^* 的初始值为零，并且服从过程

$$dR^* = -aR^* dt + \sigma dz$$

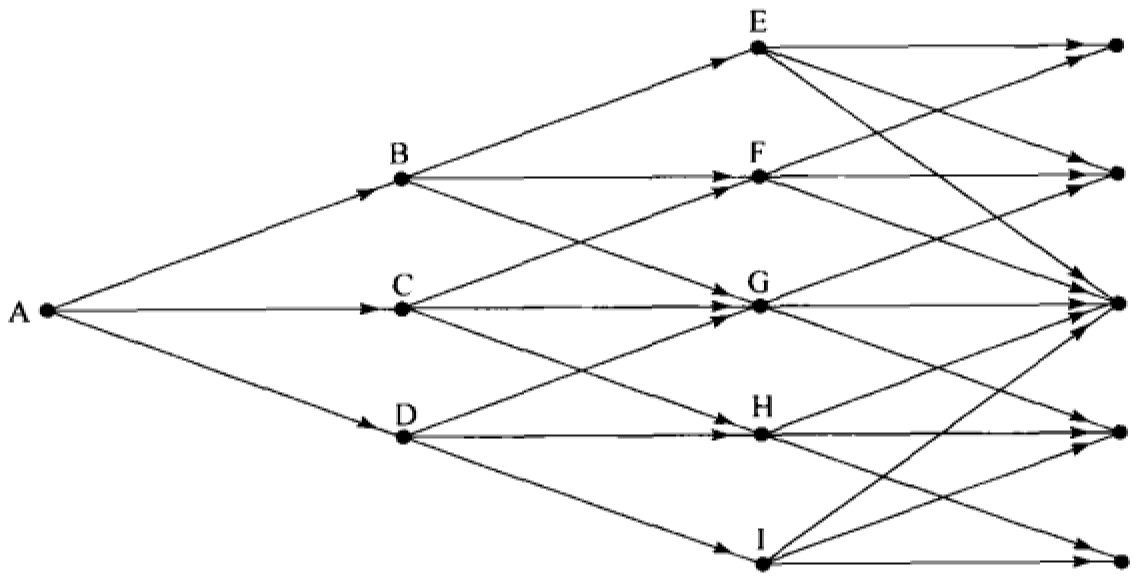
这个过程关于 $R^*=0$ 为对称，变量 $R^*(t+\Delta t) - R^*(t)$ 服从正态分布。如果忽略 Δt 的高阶项，那么 $R^*(t+\Delta t) - R^*(t)$ 的期望值为 $-aR^*(t)\Delta t$，方差为 $\sigma^2\Delta t$。

定义 ΔR 为树形上利率之间的距离，并令

$$\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$$

可以证明，从减小误差的角度来看，这是一个很好的选择。

在程序的第一步，我们对于 R^* 构造一个类似于图 30-8 的树形。为达到目的，在每个节点上，我们需要确定应该使用图 30-7 中所示树枝的哪一个，这因此也会确定整个树形的几何形状。一旦确定树枝形状后，我们还要计算树枝所对应的概率。



节点	A	B	C	D	E	F	G	H	I
R^*(%)	0.000	1.732	0.000	−1.732	3.464	1.732	0.000	−1.732	−3.464
p_u	0.166 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.886 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.086 7
p_m	0.666 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6
p_d	0.166 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.086 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.886 7

图 30-8　Hull-White 模型中关于 R^* 的树形（第一步）

将 $t=i\Delta t$ 和 $R^*=j\Delta R$ 时所对应的节点记为 (i, j)（变量 i 为正整数，j 为正或负整数）。在一个节点上所使用的树枝形状必须要使得所有三个树枝的概率均为正值。在大多数情况下，图 30-7a 所示的树枝形状是合适的。当 $a>0$ 时，对于充分大的 j 而言，有必要从图 30-7a 所示的树枝换成图 30-7c 所示的树枝；类似地，当 j 为充分大的负数时，有必要由图 30-7a 所示的树枝换成图 30-7b所示的树枝。定义 j_{max} 为我们由图 30-7a 所示的树枝换成图 30-7c 所示的树枝时相应的 j 的取值；j_{min} 为我们将图 30-7a 所示的树枝换成图 30-7b 所示的树枝时相应 j 的值。Hull 和 White 证明了当我们令 j_{max} 为大于或等于 $0.184/(a\sqrt{\Delta t})$ 的最小整数时，以及 $j_{min} = -j_{max}$ 时，所有的概率均为正值[⊖]。定义 p_u、p_m 和 p_d 为从节点所延伸出的上、中和下树枝所对应的概率。概率的选择保证了在下一时间段 Δt 中，R^* 变化的期望值和方差与其树形相吻合，这些概率的和等于 1。这样对于三

⊖ 对于任何介于 $0.184/(a\Delta t)$ 和 $0.816/(a\Delta t)$ 之间的 j_{max} 和对于任何介于 $-0.184/(a\Delta t)$ 和 $-0.186/(a\Delta t)$ 之间的 j_{min}，相应的概率均为正值。在第一个可能的情况下，就将树枝形状加以改变，这样的计算效率会最好。

个概率，我们可以设定三个方程。

我们已经提到过，在时间 Δt 内，R^* 的变化的期望值为 $-aR^*\Delta t$，变化的方差为 $\sigma^2\Delta t$，在节点 (i, j)上，$R^*=j\Delta t$。如果树枝的形状如图 30-7a 所示，节点上的概率 p_u、p_m 和 p_d 满足以下关系式

$$p_u\Delta R - p_d\Delta R = -aj\Delta R\Delta t$$

$$p_u\Delta R^2 + p_d\Delta R^2 = \sigma^2\Delta t + a^2j^2\Delta R^2\Delta t^2$$

$$p_u + p_m + p_d = 1$$

利用 $\Delta R=\sigma\sqrt{3\Delta t}$，以上式的解为

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 - aj\Delta t)$$

$$p_m = \frac{2}{3} - a^2j^2\Delta t^2$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 + aj\Delta t)$$

类似地，如果所伸出的树枝如图 30-7b 所示，相应的概率为

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 + aj\Delta t)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2j^2\Delta t^2 - 2aj\Delta t$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 + 3aj\Delta t)$$

最后，如果所伸出的树枝如图 30-7c 所示，相应的概率为

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 - 3aj\Delta t)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2j^2\Delta t^2 + 2aj\Delta t$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 - aj\Delta t)$$

为了说明构造树形的第一步，假设 $\sigma=0.01$，$a=0.1$ 和 $\Delta t=1$。这时，$\Delta R=0.01\sqrt{3}=0.0173$，$j_{\max}$为比 0.184/0.1 大的最小整数，以及 $j_{\min}=-j_{\max}$。这意味着，$j_{\max}=2$ 和 $j_{\min}=-2$。树形如图 30-8 所示。每个树枝所对应的概率显示在树下方的表中，它们是通过关于 p_u、p_m 和 p_d 的方程计算得出的。

注意，图 30-8 中每个节点上概率仅仅依赖于 j。例如，节点 B 的概率与节点 F 的概率一样，树的形状为对称，节点 D 的概率是节点 B 上概率的镜像反射。

30.7.2　第二步

构造树形的第二步是将 R^* 的树形转换为 R 的树形，这可以通过变动 R^* 树形的节点而使得初始利率结构与树形完全吻合。定义

$$\alpha(t) = R(t) - R^*(t)$$

当时间步长 Δt 为无穷小时，$\alpha(t)$可以通过式(30-14)解析地计算得出[⊖]。但是，我们希望对固定

⊖ $\alpha(t)$可以通过解析公式来估计。由于

$$dR=[\theta(t)-aR]dt+\sigma dz \text{ 和 } dR^*=-aR^*dt+\sigma dz$$

于是 $d\alpha=[\theta(t)-a\alpha(t)]dt$。利用(30－14)，这个方程的解为

$$\alpha(t)=F(0, t)+\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1-e^{-at})^2$$

的 Δt，所构造的树形能够与期限结构完全吻合，因此我们以递推的形式确定 α。

定义 α_i 为 $\alpha(i\Delta t)$，α_i 等于 R 在 R 树形上时间 $i\Delta t$ 的值减去 R^* 树形上在时间 $i\Delta t$ 的相应取值。定义 $Q_{i,j}$ 为如下证券的贴现值：当节点 (i, j) 被达到时，支付 1 美元；在其他节点被达到时，支付 0 美元。α_i 和 $Q_{i,j}$ 可以通过向前递推的形式来计算，递推过程保证了树形与初始期限结构保持吻合。

30.7.3 第二步数值例解

假设图 30-8 例子中的连续复利零息利率如表 30-1 所示。$Q_{0,0}$ 的取值为 1.0。α_0 的选取使得在时间 Δt 到期的零息债券价格与树形吻合，也就是说，α_0 被设定为初始 Δt 时间段的利率。在本例中，$\Delta t = 1$，$\alpha_0 = 0.038\,24$，这就定义了图 30-9 中 R 树形在最初的节点。接下一步是计算 $Q_{1,1}$，$Q_{1,0}$ 和 $Q_{1,-1}$ 的取值，到达节点(1，1)的概率为 0.166 7，而第一步的贴现率为 3.82%，因此 $Q_{1,1}$ 等于 $0.166\,7e^{-0.038\,2} = 0.160\,4$。类似地，$Q_{1,0} = 0.641\,7$ 和 $Q_{1,-1} = 0.160\,4$。

表 30-1 图 30-8 和图 30-9 中例子的零息利率

期限(年)	利率(%)	期限(年)	利率(%)
0.5	3.430	2.0	4.512
1.0	3.824	2.5	4.812
1.5	4.183	3.0	5.086

一旦确定 $Q_{1,1}$、$Q_{1,0}$ 和 $Q_{1,-1}$ 之后，我们就可以确定 α_1，它的选取使得由树形给出的在 $2\Delta t$ 到期的零息债券价格为正确价格。由于 $\Delta R = 0.017\,32$ 和 $\Delta t = 1$，这个债券在节点 B 的价格为 $e^{-(\alpha_1+0.017\,32)}$。类似地，债券在节点 C 的价格为 $e^{-\alpha_1}$，在节点 D 的价格为 $e^{-(\alpha_1-0.017\,32)}$。因此，债券在初始节点的价格为

$$Q_{1,1}e^{-(\alpha_1+0.017\,32)} + Q_{1,0}e^{-\alpha_1} + Q_{1,-1}e^{-(\alpha_1-0.017\,32)} \tag{30-21}$$

从初始期限结构出发，我们得出债券正确价格为 $e^{-0.045\,12\times 2} = 0.913\,7$。在式(30-21)中代入相应的 Q 项，我们得出

$$0.160\,4e^{-(\alpha_1+0.017\,32)} + 0.641\,7e^{-\alpha_1} + 0.160\,4e^{-(\alpha_1-0.017\,32)} = 0.913\,7$$

或

$$e^{-\alpha_1}(0.160\,4e^{-0.017\,32} + 0.641\,7 + 0.160\,4e^{0.017\,32}) = 0.913\,7$$

或

$$\alpha_1 = \ln\left[\frac{0.160\,4e^{-0.017\,32} + 0.641\,7 + 0.160\,4e^{0.017\,32}}{0.913\,7}\right] = 0.052\,05$$

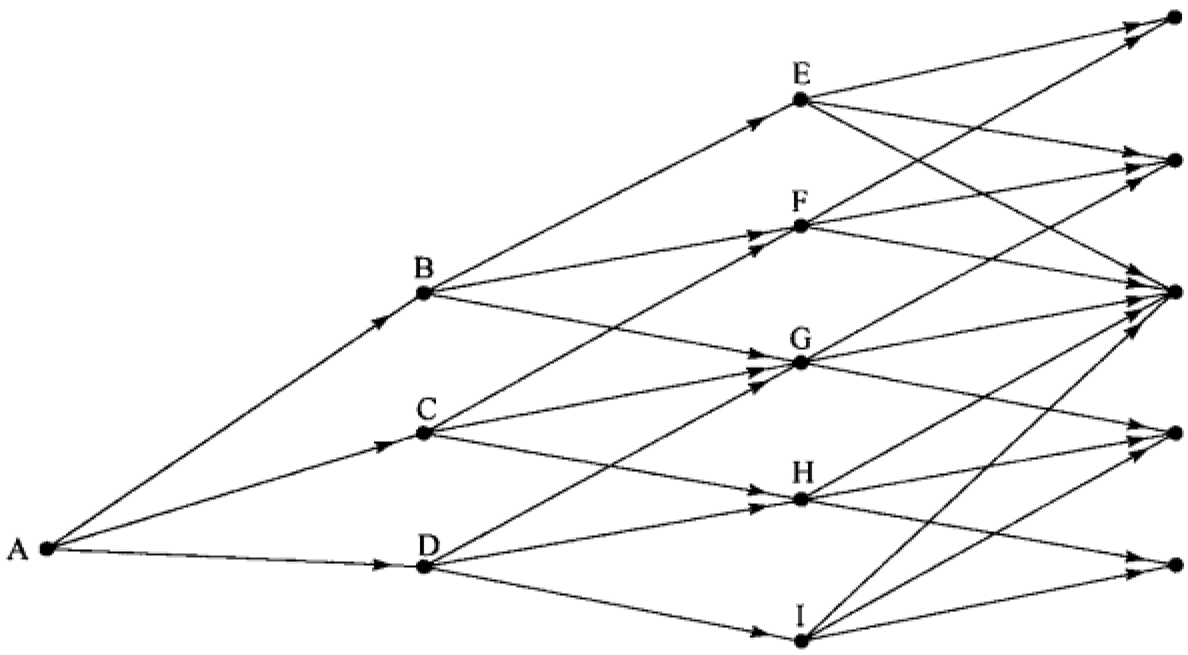
这说明在时间 Δt 上，R 的树形中间节点所对应的利率为 5.205%（见图 30-9）。

在下一步我们将要计算 $Q_{2,2}$、$Q_{2,1}$、$Q_{2,0}$，$Q_{2,-1}$ 和 $Q_{2,-2}$。我们可以利用前面已经得到的 Q 值来简化计算。以 $Q_{2,1}$ 为例，$Q_{2,1}$ 的取值是在节点 F 支付 1 美元，而在其他节点均支付 0 美元的证券价格。节点 F 只可能由节点 B 和 C 来达到，而在这两个节点上的利率分别为 6.937% 和 5.205%。与树枝 B-F 和 C-F 相关的概率为 0.656 6 和 0.166 7。因此，一个在节点 F 支付 1 美元的证券在节点 B 的价格为 $0.656\,6e^{-0.069\,37}$，在节点 C 的价格为 $0.166\,7e^{-0.052\,05}$。因此 $Q_{2,1}$ 等于 $0.656\,6e^{-0.069\,37}$ 乘以在节点 B 收取 1 美元的贴现值，再加上 $0.166\,7e^{-0.052\,05}$ 乘上在节点 C 收取 1 美元的贴现值，也就是说

$$Q_{2,1} = 0.656\,6e^{-0.069\,37} \times 0.160\,4 + 0.166\,7e^{-0.052\,05} \times 0.641\,7 = 0.199\,8$$

类似地，$Q_{2,2} = 0.018\,2$，$Q_{2,0} = 0.473\,6$，$Q_{2,-1} = 0.203\,3$ 和 $Q_{2,-2} = 0.018\,9$。

构造图 30-9 中的 R 树形的下一步是计算 α_2。此后，可以计算 $Q_{3,j}$，然后再计算 α_3；等等。



节点:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
R (%)	3.824	6.937	5.205	3.473	9.716	7.984	6.252	4.520	2.788
p_u	0.166 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.886 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.086 7
p_m	0.666 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6
p_d	0.166 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.086 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.886 7

图 30-9　Hull-White 模型中关于 R 的树形(第二步)

30.7.4　计算 α 和 Q 的公式

为了更正式地表达这种方法，假定我们已经求得了所有当 $i\leqslant m(m\geqslant 0)$ 时的 $Q_{i,j}$。接下来一步是确定 α_m 来保证关于 R 的树形可以正确地给出期限为 $(m+1)\Delta t$ 的零息债券价格。在节点 (m,j) 上的利率为 $\alpha_m+j\Delta R$，于是在 $(m+1)\Delta t$ 到期的零息债券的价格为

$$P_{m+1}=\sum_{j=-n_m}^{n_m}Q_{m,j}\exp[-(\alpha_m+j\Delta R)\Delta t]\tag{30-22}$$

式中 n_m 在时间 $m\Delta t$ 中间节点每边的个数，以上方程的解为

$$\alpha_m=\frac{\ln\sum_{j=-n_m}^{n_m}Q_{m,j}e^{-j\Delta R\Delta t}-\ln P_{m+1}}{\Delta t}$$

一旦确定了 α_m，对于 $i=m+1$，$Q_{i,j}$ 可由下式计算得出

$$Q_{m+1,j}=\sum_k Q_{m,k}q(k,j)\exp[-(\alpha_m+k\Delta R)\Delta t]$$

其中 $q(k,\cdot j)$ 为由节点 (m,k) 移动到节点 $(m+1,j)$ 的概率，其中求和指标是所有使这个概率不为零的 k 值。

30.7.5　推广到其他模型

我们刚刚描述的建树程序可以推广到其他具有以下形式的更一般的过程中

$$\mathrm{d}f(r)=[\theta(t)-af(r)]\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z\tag{30-23}$$

上式具有可以和任何期限结构相吻合的性质[⊖]。

⊖ 并非所有的模型都具有这个性质。比如，在 Cox、Ingersoll 和 Ross(CIR)(1985)和 Hull-White(1990)所考虑的 CIR 的模型推广形式

$$\mathrm{d}r=[\theta(t)-ar]\mathrm{d}t+\sigma\sqrt{r}\mathrm{d}z$$

就无法与远期利率急剧下降的利率曲线相吻合。这是因为当 $\theta(t)$ 为负时，以上所述过程无法定义。

同前面一样，我们假设 Δt 段利率 R 服从与 r 同样的过程

$$df(R) = [\theta(t) - af(R)]dt + \sigma dz$$

令 $x = f(R)$，于是

$$dx = [\theta(t) - ax]dt + \sigma dz$$

第一阶段是对 x^* 建立树形，其中 x^* 服从与 x 同样的过程，但相应的 $\theta(t)$ 为 0，而且初始值为 0。这与建立图 30-8 中树形的程序完全一样。

如图 30-9 所示，我们接下来对时间 $i\Delta t$ 的节点移动 α_i，并使得树形与初始期限结构相吻合。这里确定 α_i 和 $Q_{i,j}$ 的递推方程与 $f(R) = R$ 的情形略有不同。Q 在第一个节点 $Q_{0,0}$ 被假设为 1。假定对所有的 $i \leqslant m$ ($m \geqslant 0$)，$Q_{i,j}$ 都已经被确定，下一步是确定 α_m 使树形可以正确地为 $(m+1)\Delta t$ 到期的零息债券定价。定义 g 为函数 f 的反函数，在时间 $m\Delta t$，第 j 个节点上 Δt 时间段的利率为

$$g(\alpha_m + j\Delta x)$$

在时间 $(m+1)\Delta t$ 到期的零息债券价格为

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-g(\alpha_m + j\Delta x)\Delta t] \tag{30-24}$$

这个方程的数值解可以由 Newton-Raphson 迭代法给出，当 $m = 0$ 时，α_0 等于 $f(R(0))$。

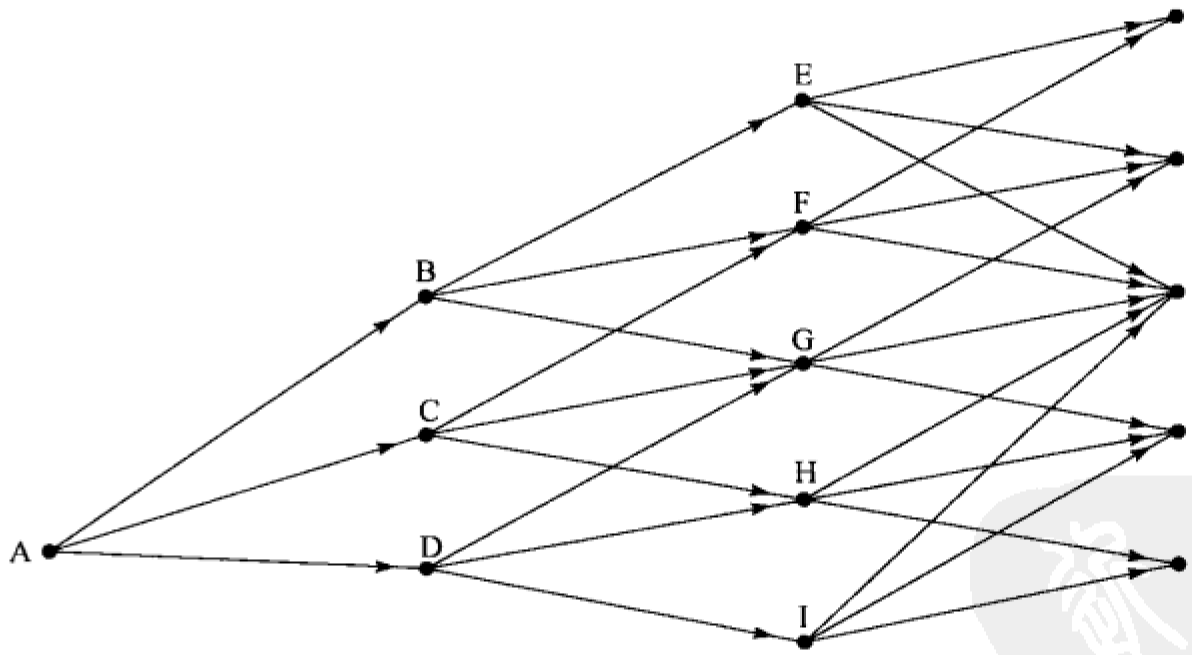
一旦求出 α_m，对于 $i = m+1$，$Q_{i,j}$ 可由以下方程来计算

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) \exp[-g(\alpha_m + k\Delta x)\Delta t]$$

式中 $q(k, j)$ 为由节点 (m, k) 移动到节点 $(m+1, j)$ 的概率，求和指标是对所有使概率 $q(k, j)$ 不为零的 k 值。

图 30-10 展示了将上述程序应用于由式(30-18)定义的 Black-Karasinski 模型

$$d\ln(r) = [\theta(t) - a\ln(r)]dt + \sigma dz$$



节点:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x	−3.373	−2.875	−3.181	−3.487	−2.430	−2.736	−3.042	−3.349	−3.655
R(%)	3.430	5.642	5.154	3.058	8.803	6.481	4.772	3.513	2.587
p_u	0.166 7	0.117 7	0.166 7	0.227 7	0.860 9	0.117 7	0.166 7	0.227 7	0.080 9
p_m	0.666 6	0.654 6	0.666 6	0.654 6	0.058 2	0.654 6	0.666 6	0.654 6	0.058 2
p_d	0.166 7	0.227 7	0.166 7	0.117 7	0.080 9	0.227 7	0.166 7	0.117 7	0.860 9

图 30-10 对数正态模型的树形

所得出的结果，其中 $a = 0.22$，$\sigma = 0.25$，$\Delta t = 0.5$，零息利率如表 30-1 所示。

30.7.6 选择 $f(r)$

当 $f(r) = r$ 时，我们可以得到由式(30-13)定义的 Hull-White 模型；当 $f(r) = \ln(r)$ 时，我们

可以得到由式(30-18)定义的 Black-Karasinski 模型。在大多数情形下，对于吻合像上限与欧式互换期权这样在市场上交易活跃的产品价格，这两种模型的效果基本是一样的。模型 $f(r)=r$ 的主要优点是它的解析性质，主要缺点是有出现负利率的可能。在大多数情形下，模型出现负利率的概率很小，但有些交易员不愿意使用任何会出现负利率的模型。模型 $f(r)=\ln(r)$ 没有解析性质，其优点是利率永远为正，它的另一个优点是交易员习惯于使用由对数正态分布得出的 σ，而不习惯使用由正态分布得出的 σ。

在利率较低的国家里，选择令人满意的树形是一个棘手的问题。正态分布不令人满意，原因是当初始利率很低时，将来利率取负值的概率不能被忽略；对数正态分布也不太令人满意，原因是在低利率情形下的波动率要远大于高利率情形时的波动率(例如，当短期利率很低时，使用100%的波动率也许合适，但在利率为4%或更高时，使用20%的波动率也许会更合适)。一个应用起来比较好的模型是按以下方式选择 $f(r)$：当 r 很低时，将其设为与 $\ln(r)$ 成比例的连续函数，其他情况下设成 r[⊖]。

30.7.7 解析结果和树形并用

当构造 $f(r)=r$ 的 Hull-White 模型树形时，利用30.3节中的解析结果可以求得每个节点上的期限结构和欧式期权价格，注意树形所给出的 Δt 时间段的利率并不是瞬时利率 r，了解这一点对我们很重要。

由式(30-15)、式(30-16)和式(30-17)，我们可以证明(见练习题30.21)

$$P(t,T)=\hat{A}(t,T)e^{-\hat{B}(t,T)R} \tag{30-25}$$

式中

$$\ln\hat{A}(t,T)=\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)}-\frac{B(t,T)}{B(t,t+\Delta t)}\ln\frac{P(0,t+\Delta t)}{P(0,t)}-\frac{\sigma^2}{4a}(1-e^{-2at})B(t,T)[B(t,T)-B(t,t+\Delta t)] \tag{30-26}$$

和

$$\hat{B}(t,T)=\frac{B(t,T)}{B(t,t+\Delta t)}\Delta t \tag{30-27}$$

(在 Ho-Lee 模型下，在以上方程中我们令 $\hat{B}(t,T)=T-t$。)

因此，我们应该使用式(30-25)而不是式(30-15)来计算债券价格。

【例30-1】 假设零息利率如表30-2所示，对应于表中所示期限之间的利率是由线性插值来计算的。

我们考虑一个9年(=9×365天)后到期的零息债券上期限为3年(=3×365天)的欧式看跌期权。假定利率服从 Hull-White 模型($f(r)=r$)，执行价格为63，$a=0.1$ 和 $\sigma=0.01$。我们构造一个3年的树形，在最后的节点上我们利用刚才描述的解析公式来计算债券价格。如表30-3所示，由树形上所得结果与期权的解析价格是一致的。

该例为模型的实施提供了一个很好的检验，这是因为在期权到期后，零息曲线的斜率马上呈现剧烈变化。在构造和使用树形时，一个小的误差很可能会对价格产生很大影响(DerivaGem 软件的应用实例G正是这个例子)。

⊖ 见 J. Hull and A. White, "Taking Rates to the Limit," *Risk*, December(1997): 168-169。

表 30-2　零息曲线，所有利率均按连续复利

到期日	天数	利率(%)	到期日	天数	利率(%)
3 天	3	5.017 72	4 年	1 461	6.734 64
1 个月	31	4.982 84	5 年	1 826	6.948 16
2 个月	62	4.972 34	6 年	2 194	7.088 07
3 个月	94	4.961 57	7 年	2 558	7.275 27
6 个月	185	4.990 58	8 年	2 922	7.308 52
1 年	367	5.093 89	9 年	3 287	7.397 90
2 年	731	5.797 33	10 年	3 653	7.490 15
3 年	109 6	6.305 95			

表 30-3　9 年期零息债券上期限为 3 年的看跌期权价值，执行价格为 63 美元，模型参数 a = 0.1 和 σ = 0.01；零息曲线由表 30-2 给出

步数	树形	分析	步数	树形	分析
10	1.846 8	1.809 3	100	1.812 8	1.809 3
30	1.817 2	1.809 3	200	1.809 0	1.809 3
50	1.805 7	1.809 3	500	1.809 1	1.809 3

30.7.8　美式债券期权树形

对于欧式和美式债券期权、上限/下限和欧式互换期权，DerivaGem 软件实施了正态和对数正态模型。图 30-11 显示了由软件生成的树形，这里的树形是关于 10 年期的债券上期限为 1.5 年的

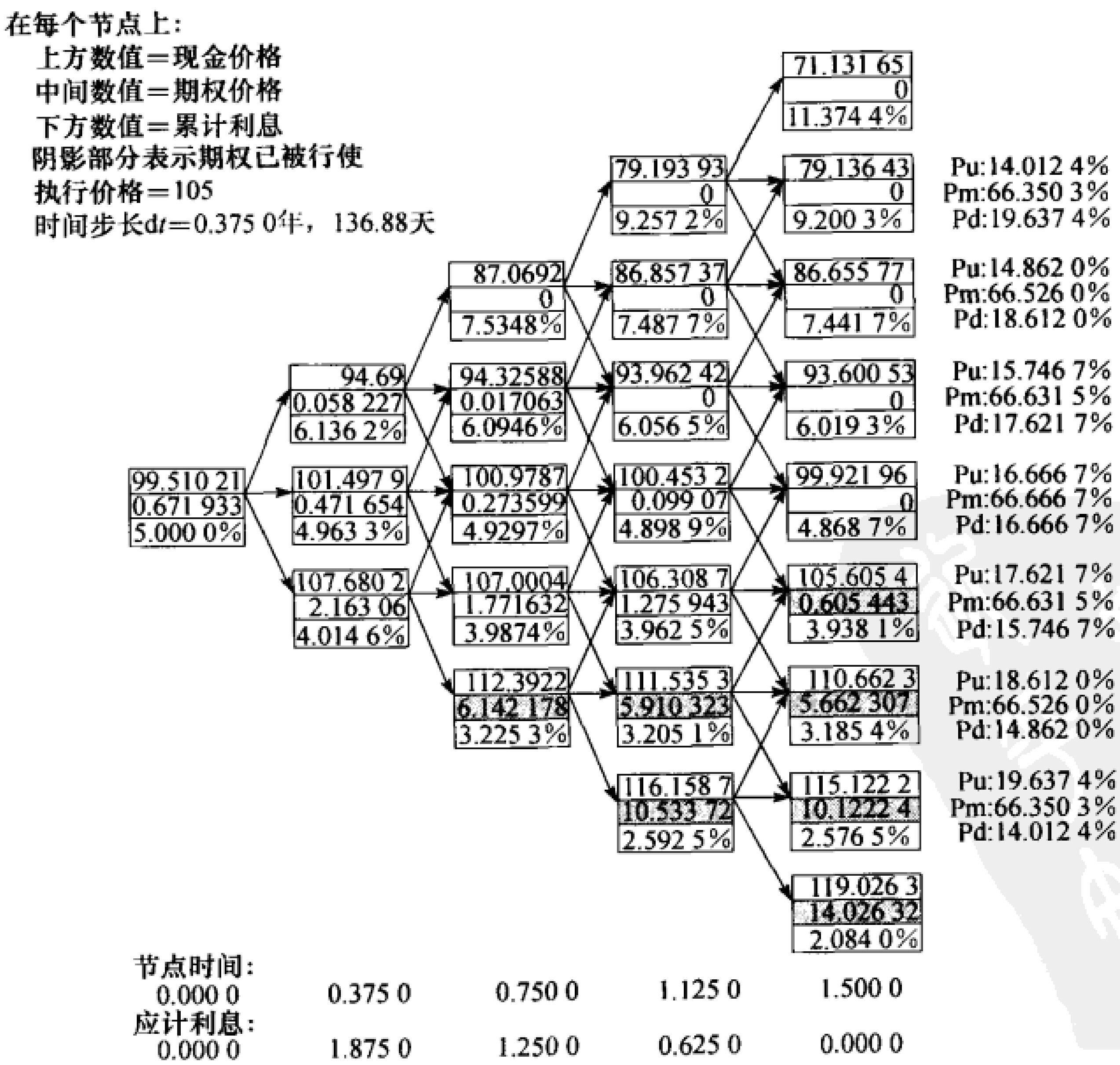


图 30-11　对美式债券期权定价的树形，该图由 DerivaGem 软件生成

美式债券期权定价而设定的，步数为 4 步，模型为对数正态模型，这里参数 $a=5\%$，$\sigma=20\%$，标的债券的期限为 10 年，面值为 100 美元，券息为每年 5%，每半年支付一次，收益率曲线为水平，每年为 5%，债券期权执行价格为 105 美元。在 28.1 节我们讲过，执行价格可以是现金价格，也可以是报价。本例中的执行价格为报价，在树形上所示的债券价格为现金价格。每个节点对应的累计利息被显示在树的下方，现金执行价格等于执行价格报价加上累计利息。债券报价为其现金价格减去累计利息，期权收益为债券的现金价格减去现金执行价格，这与债券报价和执行价格(报价)的差是一样的。

树形上给出的期权价格为 0.672，一个 100 步树形给出的期权价格为 0.703。注意当假设对数正态模型时，我们无法利用解析公式来计算 10 年期债券的价格。这些价格是在一个比所显示的大得多的树形上通过倒推计算得出的。

30.8 校正

到目前为止，我们假定参数 a 和 σ 是已知的。现在讨论如何确定这些参数，确定参数的过程通常被称为对模型的校正。

波动率参数是由市场上交易活跃的期权市场数据来确定的(比如像经纪人所报出的表 28-1 和表 28-2 关于上限和互换期权波动率的数据)。这些市场上交易活跃的产品被称为**校正产品**(calibrating instrument)。校正过程的第一步是选取一个衡量“**拟合质量**”(goodness-of-fit)的测度。假定有 n 个校正产品，一种流行的测度为

$$\sum_{i=1}^{n}(U_i-V_i)^2$$

式中 U_i 为第 i 个校正产品的市场价格，V_i 是模型所给出的这个产品的价格，模型校正的目标是选取参数来使得以上测度达到最小。

波动率参数的数量不应当多于校正产品的数量。如果 a 和 σ 为常数，那么我们只有两个波动率参数。我们可以将模型推广到 a 或 σ 或两个参数均为时间函数的情形，比如可以利用阶梯函数。例如，我们假设 a 为常数，而 σ 为时间的函数。我们可以选取时间 t_1，t_2，…，t_n，并假设对 $t\leqslant t_1$，$\sigma(t)=\sigma_0$；对 $t_i<t\leqslant t_{i+1}$，$\sigma(t)=\sigma_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 和对 $t>t_n$，$\sigma(t)=\sigma_n$。这样，我们共有 $n+2$ 个波动率参数：a，σ_0，σ_1，…，σ_n。

对拟合测度求最小化可以通过 Levenberg-Marquardt 程序来完成[⊖]。当 a 或 σ 或两个参数均为时间的函数时，在拟合测度上常常需要加上一个**惩罚函数**(penalty function)以使得这些函数具备良好的性质。在刚才的例子中，σ 为阶梯函数，我们可以将目标函数取成

$$\sum_{i=1}^{n}(U_i-V_i)^2+\sum_{i=1}^{n}w_{1,i}(\sigma_i-\sigma_{i-1})^2+\sum_{i=1}^{n-1}w_{2,i}(\sigma_{i-1}+\sigma_{i+1}-2\sigma_i)^2$$

第二项为两步之间 σ 值较大的变化提供了惩罚，第三项为 σ 的高曲率提供惩罚。通过试验可以选取适当的 $w_{1,i}$ 和 $w_{2,i}$ 值，以使得 σ 具有一定的光滑度。

用于校正模型的产品应当与被定价的产品相似。例如，假设要对一个百慕大式互换期权定价，这个期权将延续 10 年，并在第 5 年与第 9 年之间的任何支付日可以被行使，从而进入一个从那时起至 10 年后到期的互换。这时，最相关的校正产品为 5×5，6×4，7×3，8×2 和 9×1 欧式互换期权($n\times m$ 欧式期权是指在 n 年期权到期后进入 m 年互换的期权)。

将 a 或 σ 或两个参数都设成时间函数的优点是能够使得模型更精确地与市场上交易活跃的产品价格吻合，其缺点是波动率结构会因此变得不稳定。模型给出的将来波动率期限结构可能与今

⊖ 关于这个程序的描述，见 W. H. Press，B. P. Flannery，S. A. Teukolsky，and W. T. Vetterling，*Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*，Cambridge University Press，1988。

天市场上存在的波动率有很大差异㊀。

一种与此有所不同的校正方式是利用所有可用的校正产品来计算出“整体最优吻合”(global-best-fit)参数 a 和 σ。将参数 a 固定为最优吻合值时，我们可以采用与布莱克-斯科尔斯-默顿同样的方法来使用模型，这时期权价格和参数 σ 之间存在一一对应关系。我们可以利用模型将表 28-1 和表 28-2 转换为隐含波动率 σ 的表格㊁，这些表格可以帮助我们选取最适合产品定价的参数 σ。

30.9 利用单因子模型进行对冲

在 28.5 节里我们曾大致地描述了如何对利率衍生产品进行对冲。这些结论可以用在本章所讨论的期限结构模型上。在计算 Delta、Gamma 和 Vega 时，我们需要对零息曲线或波动率做微小变化，然后重新计算组合的价值。

应当注意的是，在对利率衍生产品定价时，我们常常假设只有一个因子，但在进行对冲时，我们并不假设只有一个因子。例如，我们计算的 Delta 允许在零息曲线上有多种不同的变化，而不是仅仅局限于选定模型所提供的变化。实际中的做法是在对冲时既考虑所选取模型下可能的变化，同时也考虑在模型下不可能的变化。这一做法被称为**模型外对冲**(outside model hedging)，该方法是交易员的标准做法㊂。实际上，当谨慎地使用一个单因子模型时，它通常会产生合理的产品价格，但在设计一个好的对冲方案时，我们将有意或无意地需要假设有多个因子。

小 结

在金融领域使用的传统期限结构模型是所谓的均衡模型，这类模型对理解经济变量之间的关系很有用处，但其缺点是初始期限结构是模型的输出而非输入。当对衍生产品定价时，重要的一点是保证模型与市场所观察到的初始期限结构一致。无套利模型的设计正是为了满足这一性质，这类模型将初始期限结构取为已知，并定义了它的演变方式。

本章描述了几种单因子的无套利短期利率模型，这些模型非常有用，并且可以与任何初始零息利率一起使用。这里最简单的模型为 Ho-Lee 模型，它的优点是其解析性质，主要缺点是该模型意味着在任何时刻所有利率的发生都有同样的可能性。Hull-White 模型是 Ho-Lee 模型的一种变形，它考虑了利率均值回归的特性，该模型在保持了解析性质的同时，也提供了更丰富的波动率环境。对数正态单因子模型避免了负利率的产生，但这些模型不具有解析性质。

推荐阅读

Equilibrium Models

Ahmad, R., and P. Wilmott, "The Market Price of Interest Rate Risk: Measuring and Modeling Fear and Greed in the Fixed Income Markets," *Wilmott*, January 2007: 64–70.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53 (1985): 385–407.

Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz, "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model," *Journal of Finance*, 47, 4 (September 1992): 1259–82.

㊀ 关于 a 和 σ 为时间函数时模型的实例，见 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNote 里的 Technical Note 16。

㊁ 注意，在一个期限结构模型下的隐含参数 σ 与由布莱克-斯科尔斯-默顿模型所隐含的波动率是不一样的。计算隐含 σ 的过程如下：首先利用布莱克模型将布莱克波动率转换成价格，然后用递推迭代的方式计算由价格所隐含的期限结构模型中的参数 σ。

㊂ 模型外对冲的一个例子是布莱克-斯科尔斯-默顿模型的使用方式。布莱克-斯科尔斯-默顿模型假设波动率为常数，但交易员常常计算 Vega 来对冲波动率的变化。

Vasicek, O. A.,"An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5 (1977): 177–88.

No-Arbitrage Models

Black, F., E. Derman, and W. Toy, "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Prices," *Financial Analysts Journal*, January/February 1990: 33–39.

Black, F., and P. Karasinski, "Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal," *Financial Analysts Journal*, July/August (1991): 52–59.

Ho, T. S. Y., and S.-B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, 41 (December 1986): 1011–29.

Hull, J., and A. White, "Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices," *Advances in Futures and Options Research*, 6 (1993): 1–13.

Hull, J., and A. White, "Pricing Interest Rate Derivative Securities," *The Review of Financial Studies*, 3, 4 (1990): 573–92.

Hull, J., and A. White, "Using Hull–White Interest Rate Trees," *Journal of Derivatives*, Spring (1996): 26–36.

Kijima, M., and I. Nagayama, "Efficient Numerical Procedures for the Hull–White Extended Vasicek Model," *Journal of Financial Engineering*, 3 (September/December 1994): 275–92.

Kijima, M., and I. Nagayama, "A Numerical Procedure for the General One-Factor Interest rate Model" *Journal of Financial Engineering*, 5 (December 1996): 317–37.

Li, A., P. Ritchken, and L. Sankarasubramanian, "Lattice Models for Pricing American Interest Rate Claims," *Journal of Finance*, 50, 2 (June 1995): 719–37.

Rebonato, R., *Interest Rate Option Models*. Chichester: Wiley, 1998.

练习题

30.1 均衡模型与无套利模型的区别是什么?

30.2 假设当前的短期利率为4%，其标准差为每年1%。当短期利率增长到8%时，在下列模型中，它的标准差会有什么变化? (a) Vasicek模型；(b) Rendleman和Bartt模型；(c) Cox、Ingresoll和Ross模型。

30.3 如果股票价格具有均值回归性，或有轨迹依赖性，那么市场将不会是有效的。为什么当短期利率具有这些性质时，市场仍可以是有效的?

30.4 解释单因子与双因子模型的差别。

30.5 在30.4节中，我们描述了如何将一个带券息的期权分解成一些零息债券期权的组合，这种处理方式能被推广到双因子模型的情形吗? 解释你的答案。

30.6 假设在Vasicek模型与Cox、Ingresoll和Ross模型中的参数为$a=0.1$和$b=0.1$。在两种模型下，初始短期利率均为10%，在一个短时间Δt内，短期利率变化的初始标准差为$0.02\sqrt{\Delta t}$。比较两种模型所给出的10年期零息债券的价格。

30.7 假设在Vasicek模型中，$a=0.1$，$b=0.08$和$\sigma=0.015$，初始短期利率为5%。计算一个零息债券上一年期，执行价格为87美元的欧式看涨期权价格。债券在3年后到期，本金为100美元。

30.8 重复练习题30.7，考虑一个执行价格为87美元的欧式看跌期权。欧式看涨期权价格与欧式看跌期权价格之间的看跌-看涨平价关系式是什么? 证明在这种情况下，看跌和看涨期权满足看跌-看涨平价关系式。

30.9 假设在Vasicek模型中，$a=0.05$，$b=0.08$和$\sigma=0.015$，初始短期利率为6%，计算3年期债券上期限为2.1年的欧式看跌期权的价格。假设债券每半年支付一次券息，年息为5%，债券的本金为100美元，期权执行价格为99美元，执行价格为现金价格(而非报价)。

30.10 利用练习题30.9的结果与看跌-看涨平价关系式，计算一个与练习题30.9中看跌期权具有相同条件的看涨期权价格。

30.11 在 Hull-White 模型下，$a=0.08$ 和 $\sigma=0.015$，计算一个关于 5 年期零息债券上期限为 1 年的欧式看涨期权的价格。利率期限结构期限结构呈水平状，利率为每年 10%，债券本金为 100 美元，执行价格为 68 美元。

30.12 假定在 Hull-White 模型下，$a=0.05$ 和 $\sigma=0.015$，而且初始利率期限结构呈水平状，利率为 6%，按半年复利。计算一个关于 3 年期债券上期限为 2.1 年的欧式看涨期权的价格。假设债券的券息为每年 5%，每半年支付一次，债券本金为 100 美元，执行价格为 99 美元，其中执行价格为现金价格(而非报价)。

30.13 利用变换计价单位的方法证明在 6.3 节中所示的 Ho-Lee 模型下期货利率与远期利率的关系式。利用这一关系式来验证 30.11 节所示的 Ho-Lee 模型关于 $\theta(t)$ 的表达式(提示：当风险市场价格为 0 时，期货价格为鞅；而当与远期合约具有同样期限的零息债券价格的风险市场价格为 0 时，远期价格为鞅)。

30.14 利用与练习题 30.13 类似的方法，推导在 Hull-White 模型下期货利率与远期利率之间的关系式。利用这个关系式来验证在 Hull-White 模型下，式(30-14)中 $\theta(t)$ 的表达式。

30.15 假设 $a=0.05$，$\sigma=0.015$，期限结构呈水平状，利率为 10%。构造一个两步，步长为 1 年的 Hull-White 模型的三叉树。

30.16 由图 30-6 中的三叉树来计算 2 年期零息债券的价格。

30.17 由图 30-9 中的三叉树来计算 2 年期零息债券的价格，并验证该价格与初始期限结构是一致的。

30.18 由图 30-10 中的三叉树来计算 18 个月期的零息债券价格，并验证该价格与初始期限结构是一致的。

30.19 单因子期限模型的校正都会涉及什么？

30.20 利用 DerivaGem 对收取固定利率，支付浮动利率的 1×4，2×3，3×2 和 4×1 欧式互换期权定价。假设 1 年、2 年、3 年、4 年和 5 年利率分别为 6%、5.5%、6%、6.5% 和 7%。互换的交换频率为半年，固定利率为年息 6%，按半年复利。利用参数 $a=3\%$，$\sigma=1\%$ 时的 Hull-White 模型，计算布莱克模型下每个期权所隐含的波动率。

30.21 证明式(30-25)、式(30-26)和式(30-27)。

30.22 (a) 在 Vasicek 模型与 CIR 模型中，$P(t, T)$ 关于 r 的二阶偏导数是什么？

(b) 在 30.2 节，我们曾将 $\hat{D}$ 作为标准久期 D 的替代。与 4.9 节衡量曲率的测度相类似的 $\hat{C}$ 是什么？

(c) 对于 $P(t, T)$ 的 $\hat{C}$ 是什么？对带息债券，你将如何计算 $\hat{C}$？

(d) 在 Vasicek 模型和 CIR 模型下，对 $\Delta P(t, T)$ 做由 Δr 和 $(\Delta r)^2$ 组成的泰勒级数展开。

30.23 假设短期利率 r 为 4%，它在现实世界的过程为

$$dr = 0.1[0.05 - r]dt + 0.01dz$$

而在风险中性世界里的过程为

$$dr = 0.1[0.11 - r]dt + 0.01dz$$

(a) 利率风险的市场价格是多少？

(b) 在风险中性世界里，5 年期零息债券的增长率期望和波动率是多少？

(c) 在现实世界里，5 年期零息债券的增长率期望和波动率是多少？

作业题

30.24 构造参数 $a=0.02$ 时的 Ho-Lee 模型的三叉树。假设在初始时对应于期限为 0.5 年、1.0 年和 1.5 年的零息利率分别为 7.5%、8% 和 8.5%。采用步长为 6 个月的两步树形来计算本金为 100 美元，在树的最后节点仍有 6 个月期限的零息债券价格。利用树形来计算在这个债券上 1 年期、执行价格为 95 美元的

欧式看跌期权的价格。将你在树上所得价格与 DerivaGem 的解析价格进行比较。

30.25 一位交易员想要计算一个本金为 100 美元，5 年期债券上期限为 1 年的美式看涨期权价格。债券支付的券息为年息 6%，每半年支付一次，期权执行价格（报价）为 100 美元，6 个月、1 年、2 年、3 年、4 年和 5 年的连续复利零息利率分别为 4.5%、5%、5.5%、5.8%、6.1%和 6.3%。对正态模型和对数正态模型所估计的最优拟合回归率均为 5%。该债券上 1 年期、执行价格为 100 美元（报价）的欧式看涨期权交易很活跃，市场价格为 0.50 美元。交易员决定利用这个价格在对模型进行校正。利用 DerivaGem 和 10 步三叉树来回答下列问题：

(a) 假设正态模型，计算欧式期权所隐含的 σ。

(b) 当期权为美式期权时，利用参数 σ 来计算其价格。

(c) 假设对数正态模型，重复（a）和（b）。说明当已知的欧式期权价格被用来做校正时，采用不同模型对价格并没有太大的影响。

(d) 对于正态情形，显示树形，并计算发生负利率的概率。

(e) 对于对数正态情形，显示树形，并验证节点 $i=9$ 和 $j=-1$（30.7 节的记号）上期权价格的正确性。

30.26 利用 DerivaGem 计算 1×4，2×3，3×2 和 4×1 欧式互换期权的价格。互换为收取浮动利率，支付固定利率。假定 1 年、2 年、3 年、4 年和 5 年的利率分别为 3%、3.5%、3.8%、4.0% 和 4.1%。互换的支付频率为半年一次，固定利率为每年 4%，按半年复利。利用对数正态模型，$a=5\%$，$\sigma=15\%$ 和 50 步的三叉树，计算每个期权由布莱克模型所隐含的波动率。

30.27 验证 DerivaGem 软件对所考虑的例子给出图 30-11。利用该软件，对正态和对数正态模型计算执行价格为 95 美元、100 美元和 105 美元的美式债券期权的价格。当使用正态模型时，假设 $a=5\%$ 和 $\sigma=1\%$。以第 19 章给出的关于肥尾分布的角度，讨论所得结果。

30.28 将 DerivaGem 软件里应用实例 G 加以修改，采用三叉树来计算一个 5 年期，本金为 100 美元的债券上 2 年期看涨期权的价格。验证三叉树价格的收敛性。假设执行价格为 100 美元（报价），券息为 7%，每年支付 2 次。假设零息曲线如图 30-2 所示，对以下情形进行比较。

(a) 期权为欧式，正态模型，$\sigma=0.01$ 和 $a=0.05$。

(b) 期权为欧式，对数正态模型，$\sigma=0.15$ 和 $a=0.05$。

(c) 期权为美式，正态模型，$\sigma=0.01$ 和 $a=0.05$。

(d) 期权为美式，对数正态模型，$\sigma=0.15$ 和 $a=0.05$。

30.29 假设在风险中性世界里短期利率 r 的（CIR）过程为

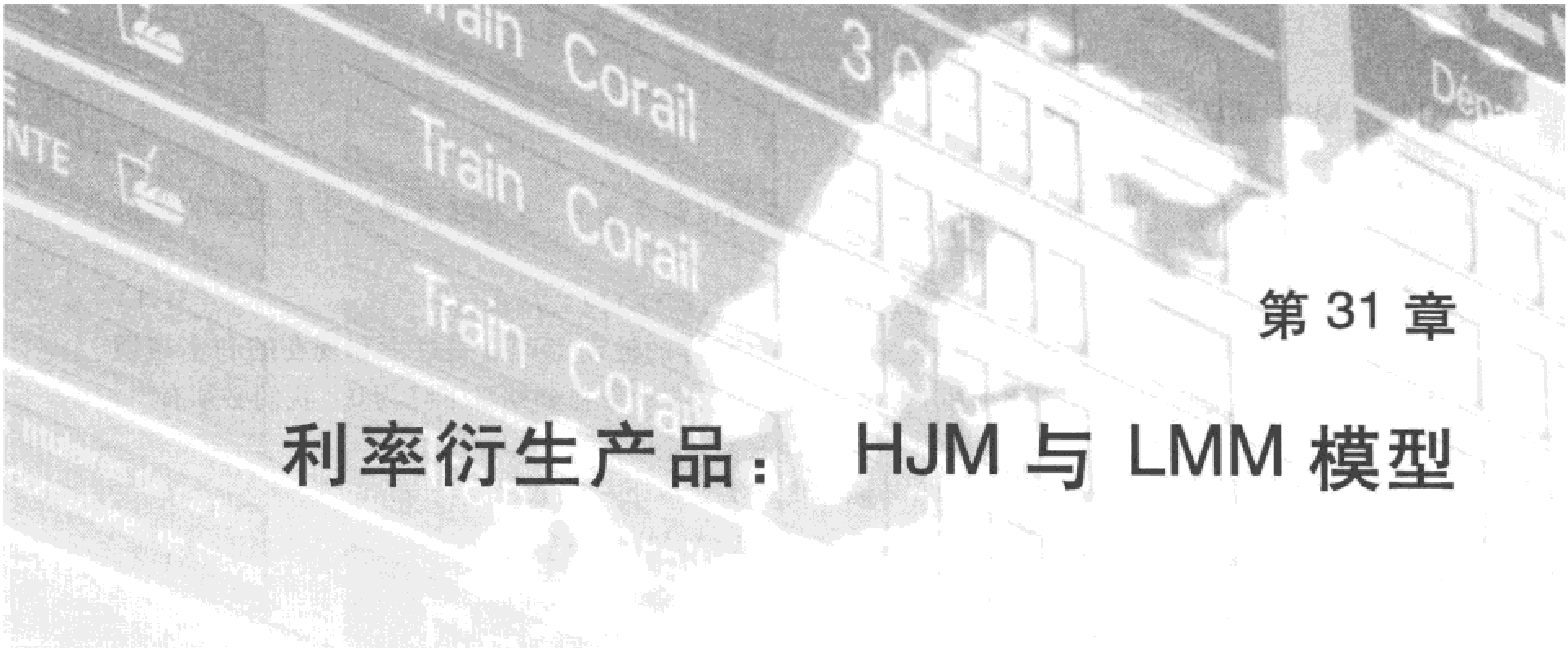
$$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

而且利率风险的市场价格为 λ。

(a) r 在现实世界里的过程是什么？

(b) 10 年期零息债券在风险中性世界里的回报期望与波动率是什么？

(c) 10 年期零息债券在现实世界里的回报期望与波动率是什么？



第 31 章

利率衍生产品：HJM 与 LMM 模型

第 28 章所述的简单模型对一些利率产品定价有时不太适用，这时第 30 章中讨论的利率模型在这些产品中却得到了广泛的应用。这些利率模型很容易被实施，而且如果谨慎地使用这些模型，我们可以做到大部分非标准的利率产品价格与市场上交易活跃的产品（例如，利率上限、欧式债券期权和欧式互换期权）的价格相一致。这些模型的两种局限性是：

- 大多数模型只含单个因子（也就是说，只有一个不确定性的来源）。
- 用户没有选择波动率结构的自由。

分析人员在使用模型时可以将 a 和 σ 设定为时间的函数，这可以使得模型与目前市场上所观察到的波动率相吻合。但我们在 30.8 节中曾指出，这种做法所得到的波动率期限结构会不稳定，也就是说，未来的波动率结构有可能与目前观察到的形状大不相同。

本章讨论几种建立期限结构模型的方法，这些方法可以使得用户灵活地定义波动率环境，并且在模型中使用多个因子。同第 30 章中的模型相比较，这些模型需要大量的计算时间，因此常常用于研究与产品开发，而不是用在简单的定价问题上。

本章还将讨论美国房产抵押证券市场，并且描述如何将本章中的一些结果用于对这个市场中某些产品的定价。

31.1 Heath、Jarrow 和 Morton 模型

在 1990 年，David Heath、Bob Jarrow 和 Andy Morton（HJM）发表了一篇重要文章，文章描述了收益率曲线必须满足的无套利条件[⊖]。为了描述模型，我们使用如下符号。

$P(t, T)$——本金为 1 美元，在时间 T 到期的零息债券在时间 t 时的价格；

Ω_t——该向量是用来确定时间 t 时与波动率相关的过去和现在的利率与债券价格；

$v(t, T, \Omega_t)$——$P(t, T)$ 的波动率；

$f(t, T_1, T_2)$——在时间 t 观察到的适用于时间 T_1 与 T_2 之间的远期利率；

$F(t, T)$——在时间 t 观察到的适用于时间 T 到期合约的瞬时远期利率；

$r(t)$——时间 t 的短期无风险利率；

$dz(t)$——驱动期限结构移动的维纳过程。

31.1.1 零息债券价格和远期利率过程

我们首先假设只有一个因子，并且采用传统风险中性世界来分析。由于零息债券是一个不提

⊖ 见 D. Heath，R. A. Jarrow，and A. Morton，"Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology，"*Econometrica*，60，1(1992)：77-105。

供收入的可交易债券，在传统风险中性世界里，它的收益率为 r。这意味着描述零息债券的随机过程如下

$$dP(t,T)=r(t)P(t,T)\,dt+v(t,T,\Omega_t)P(t,T)\,dz(t) \tag{31-1}$$

如变元 Ω_t 所示，在模型的最一般形式下，零息债券的波动率可以是过去和现在的利率与债券价格的函数(只要函数具有某些性质)。由于债券价格波动率在到期日下降为0，我们必须有[⊖]

$$v(t,t,\Omega_t)=0$$

由式(4-5)得出，远期利率 $f(t,\ T_1,\ T_2)$ 与债券价格满足以下关系式

$$f(t,T_1,T_2)=\frac{\ln[P(t,T_1)]-\ln[P(t,T_2)]}{T_2-T_1} \tag{31-2}$$

由式(31-1)和伊藤引理得出

$$d\ln[P(t,T_1)]=\left[r(t)-\frac{v(t,T_1,\Omega_t)^2}{2}\right]dt+v(t,T_1,\Omega_t)\,dz(t)$$

和

$$d\ln[P(t,T_2)]=\left[r(t)-\frac{v(t,T_2,\Omega_t)^2}{2}\right]dt+v(t,T_2,\Omega_t)\,dz(t)$$

因此，由式(31-2)

$$df(t,T_1,T_2)=\frac{v(t,T_2,\Omega_t)^2-v(t,T_1,\Omega_t)^2}{2(T_2-T_1)}dt+\frac{v(t,T_1,\Omega_t)-v(t,T_2,\Omega_t)}{T_2-T_1}dz(t) \tag{31-3}$$

式(31-3)说明，f 的风险中性过程只依赖于 v，它对于 r 和 P 的依赖性仅仅是因为 v 本身依赖于这些变量。

在式(31-3)中，令 $T_1=T$ 和 $T_2=T+\Delta T$，然后令 ΔT 趋于0，这时 $f(t,\ T_1,\ T_2)$ 变为 $F(t,\ T)$，$dz(t)$ 的系数变为 $v_T(t,\ T,\ \Omega_t)$，而 dt 的系数变为

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[v(t,T,\Omega_t)^2]}{\partial T}=v(t,T,\Omega_t)v_T(t,T,\Omega_t)$$

式中 v 的下标表示偏导数，于是

$$dF(t,T)=v(t,T,\Omega_t)v_T(t,T,\Omega_t)\,dt-v_T(t,T,\Omega_t)\,dz(t) \tag{31-4}$$

一旦给出了函数 $v(t,\ T,\ \Omega_t)$，$dF(t,\ T)$ 的风险中性过程即为已知。

式(31-4)说明在瞬时远期利率的漂移率与标准差之间存在一种关系，这一点正是 HJM 模型的关键所在。从 $\tau=t$ 到 $\tau=T$ 对 $v_\tau(t,\ T)$ 进行积分，我们得出

$$v(t,T,\Omega_t)-v(t,t,\Omega_t)=\int_t^T v_\tau(t,\tau,\Omega_t)\,d\tau$$

因为 $v(t,\ t,\ \Omega_t)=0$，上式变为

$$v(t,T,\Omega_t)=\int_t^T v_\tau(t,\tau,\Omega_t)\,d\tau$$

如果 $m(t,\ T,\ \Omega_t)$ 和 $s(t,\ T,\ \Omega_t)$ 分别为 $F(t,\ T)$ 的瞬时漂移率和标准差，$F(t,\ T)$ 满足

$$dF(t,T)=m(t,T,\Omega_t)\,dt+s(t,T,\Omega_t)\,dz$$

那么由式(31-4)得出

$$m(t,T,\Omega_t)=s(t,\tau,\Omega_t)\int_t^T s(t,\tau,\Omega_t)\,d\tau \tag{31-5}$$

这就是 HJM 的结果。

⊖ 式 $v(t,\ t,\ \Omega_t)=0$ 与假设所有折价债券(discount bond)在任何时间都具有有限的漂移项是等价的。假如在债券到期时，债券价格的波动率不为零，那么为了保证在到期时债券价格等于其面值，漂移率必须为无穷大。

在一般的 HJM 模型下，短期利率 r 的过程为非马尔科夫过程。这说明 r 在将来时刻 t 的分布既依赖于 r 在时间 t 的值，也依赖于 r 在现在与时间 t 之间的路径。这一点正是在实现一般 HJM 模型时的关键问题所在，从而不得不采用蒙特卡罗模拟法。利用树形结构时会有很多问题，因为当我们利用树形结构来表示期限结构移动时，树形的分叉呈不重合的形状。假设模型只含有一个因子，树形为图 31-1 所示的二叉树，那么在 n 步后将有 2^n 个节点(当 $n=30$ 时，2^n 大约为 10 亿)。

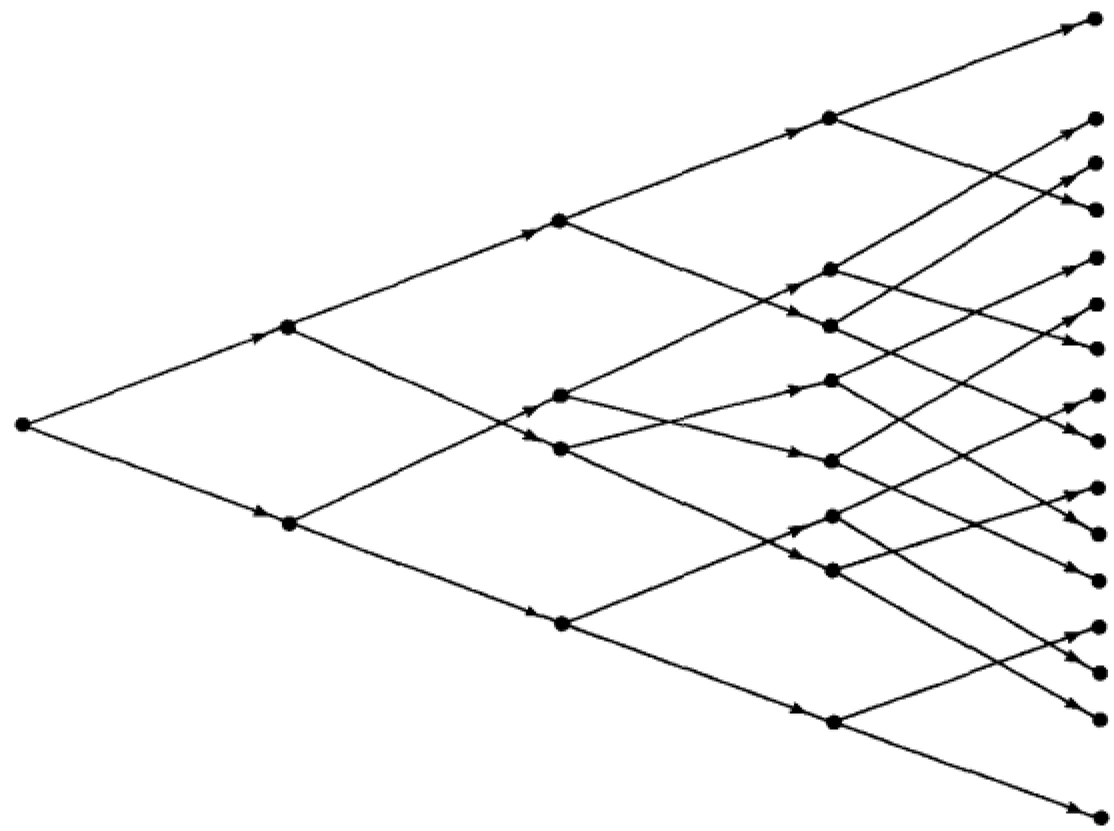


图 31-1　一般 HJM 模型中产生的非重合树形

由式(31-4)所表达的 HJM 模型貌似简单，其实非常复杂。对于某个特定的远期利率 $F(t, T)$，在大多情况下这是个马尔科夫过程，而且我们可以采用一个重合树形来描述，但这一树形却不能用于所有的远期利率。

31.1.2　多个因子的推广

HJM 的结果可以被推广到存在多个相互独立因子的情形。假设

$$\mathrm{d}F(t,T) = m(t,T,\Omega_t)\,\mathrm{d}t + \sum_k s_k(t,T,\Omega_t)\,\mathrm{d}z_k$$

利用与前面类似的分析(见练习题 31.2)，我们可以得出

$$m(t,T,\Omega_t) = \sum_k s_k(t,T,\Omega_t)\int_t^T s_k(t,\tau,\Omega_t)\,\mathrm{d}\tau \tag{31-6}$$

31.2　LIBOR 市场模型

HJM 模型的一个缺陷是，它由瞬时远期利率来表示，而这些利率并不能直接在市场上观测到，另一个缺陷是很难利用市场上交易活跃的产品来校正模型，这使得 Brace、Gatarek 和 Musiela (BGM)、Jamshidian、Miltersen、Sandmann 和 Sondermann 提出了新的模型[⊖]。这些模型被称为

⊖ 见 A. Brace, D. Gatarek, and M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance* 7, 2 (1997): 127-55; F. Jamshidian, "LIBOR and Swap Market Models and Measures," *Finance and Stochastics*, 1(1997): 293-330; and K. Mitersen, K. Sandmann, and D. Sondermann, "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with LogNormal Interest Rate," *Journal of Finance*, 52, 1(March 1997): 409-30。

LIBOR 市场模型(LIBOR Market Model，LMM)，或 **BGM 模型**(BGM model)，该模型是针对交易员使用的远期利率而建立的。

31.2.1 模型

定义 $t_0=0$，并设 t_1，t_2，…为目前在市场上交易的上限重置时间。在美国，最流行的上限是按季度重置的，因此 $t_1=0.25$、$t_2=0.5$、$t_3=0.75$ 等。定义 $\delta_k=t_{k+1}-t_k$，以及

$F_k(t)$——时间 t 所观察的在时间 t_k 与 t_{k+1}之间按季度复利的远期利率，这里 δ_k 以"实际天数/实际天数"(actual/actual)计天惯例来表示；

$m(t)$——对应于时间 t 的下一个重置日，这意味着 $m(t)$是使得 $t\leqslant t_{m(t)}$的最小整数；

$\zeta_k(t)$——$F_k(t)$在时间 t 的波动率。

我们首先假设只有一个因子。如 27.4 节所示，在一个对 $P(t,\ t_{k+1})$为远期中性的世界里，$F_k(t)$是一个鞅，并且服从以下过程

$$dF_k(t)=\zeta_k(t)F_k(t)dz \tag{31-7}$$

其中 dz 为维纳过程。

实际中，给利率期权定价最方便的方式是在一个关于以下一个重置日为期限的债券为远期风险中性的世界里进行，我们将这个世界称为**滚延远期风险中性世界**(rolling forward risk-neutral world)[㊀]。在这个世界里，我们对从时间 t_{k+1}到时间 t_k 的贴现是利用在 t_k 所观察到的以 t_{k+1}为期限的零息利率。在定价过程中，我们无须考虑在时间 t_k 与 t_{k+1}之间的利率会如何变化。

在时间 t，滚延远期中性世界是关于债券价格 $P(t,\ t_{m(t)})$为远期中性的。式(31-7)给出的 $F_k(t)$所遵循的过程是处在以 $P(t,\ t_{k+1})$为远期风险中性的世界里。由 27.8 节的结论，我们可以得出 $F_k(t)$在滚延远期中性世界里所遵循的过程为

$$dF_k(t)=\zeta_k(t)[v_{m(t)}(t)-v_{k+1}(t)]F_k(t)dt+\zeta_k(t)F_k(t)dz \tag{31-8}$$

远期利率与债券价格之间的关系式为

$$\frac{P(t,t_i)}{P(t,t_{i+1})}=1+\delta_iF_i(t)$$

或

$$\ln P(t,t_i)-\ln P(t,t_{i+1})=\ln[1+\delta_iF_i(t)]$$

利用伊藤引理，我们可以计算以上方程左端和右端所服从的过程，比较 dz 的系数得出[㊁]

$$v_i(t)-v_{i+1}(t)=\frac{\delta_iF_i(t)\zeta_i(t)}{1+\delta_iF_i(t)} \tag{31-9}$$

因此由式(31-8)可以得出，$F_k(t)$在滚延远期风险中性世界里的过程为

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)}=\sum_{i=m(t)}^{k}\frac{\delta_iF_i(t)\zeta_i(t)\zeta_k(t)}{1+\delta_iF_i(t)}dt+\zeta_k(t)dz \tag{31-10}$$

由式(31-4)给出的 HJM 结果是以上表达式当 δ_i 趋向于零时的极限情形(见练习题 31.7)。

31.2.2 远期利率波动率

我们现在将模型进行简化，假设 $\zeta_k(t)$仅是介于 t 之后的第一个重置日与时间 t_k 之间完整累

㊀ 在27.4 节的术语下，这个世界里以滚延定期存单(rolling CD)为计价单位。滚延定期存单是指我们以 1 美元开始，买入在 t_1 到期的债券。在 t_1 时刻，以收入的资金买入在 t_2 到期的债券；在 t_2 时刻，将收入的资金买入在 t_3 到期的债券；等等。严格地讲，我们在第 30 章构造的树形结构是在关于以滚延远期风险中性世界里，而不是在传统的风险中性世界里进行的。这里的滚延定期存单要在每一个时间步上进行滚延。

㊁ 由于 v 和 ζ 的符号相反，当期限增长时，债券价格波动率(绝对值)也将会增大，这正是所预料的。

计区间数目的函数，当其中有 i 个这样的区间时，定义 Λ_i 为 $\zeta_k(t)$ 的值，因此 $\zeta_k(t)=\Lambda_{k-m(t)}$ 是一个阶梯函数。

Λ_i（至少在理论上）可以由布莱克模型里对于上限定价的波动率来进行估计（也就是由图 28-3 中的即时波动率）[1]。假设 σ_k 为对应于时间 t_k 到 t_{k+1} 之间区间上限的布莱克波动率。比较方差项，我们可以得出

$$\sigma_k^2 t_k = \sum_{i=1}^{k} \Lambda_{k-i}^2 \delta_{i-1} \tag{31-11}$$

我们可以利用上式以递推的形式求得所有的 Λ。

【例 31-1】 假设 δ_i 都相等，前 3 个上限单元的即时波动率分别为 24%、22% 和 20%，这意味着 $\Lambda_0=24\%$，因为

$$\Lambda_0^2+\Lambda_1^2=2\times0.22^2$$

由此得出，Λ_1 为 19.80%，又因为

$$\Lambda_0^2+\Lambda_1^2+\Lambda_2^2=3\times0.20^2$$

Λ_2 为 15.23%。

【例 31-2】 考虑表 31-1 中上限单元波动率 σ_k 的数据。这些数据呈现出我们在 28.3 节讨论过的驼峰状态。Λ 的值显示在第二行。注意，Λ 呈现比 σ 更为明显的驼峰形状。

表 31-1　波动率数据；累计区间为 1 年

年，k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_k(%):	15.50	18.25	17.91	17.74	17.27	16.79	16.30	16.01	15.76	15.54
Λ_{k-1}(%):	15.50	20.64	17.21	17.22	15.25	14.15	12.98	13.81	13.60	13.40

31.2.3　模型的实现

LIBOR 市场模型可以用蒙特卡罗模拟来实现。将式(31-10)以 Λ_i 表达

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)}=\sum_{i=m(t)}^{k}\frac{\delta_i F_i(t)\Lambda_{i-m(t)}\Lambda_{k-m(t)}}{1+\delta_i F_i(t)}dt+\Lambda_{k-m(t)}dz \tag{31-12}$$

或

$$d\ln F_k(t)=\left[\sum_{i=m(t)}^{k}\frac{\delta_i F_i(t)\Lambda_{i-m(t)}\Lambda_{k-m(t)}}{1+\delta_i F_i(t)}-\frac{(\Lambda_{k-m(t)})^2}{2}\right]dt+\Lambda_{k-m(t)}dz \tag{31-13}$$

作为近似，在计算 $\ln F_k(t)$ 的漂移项时，我们假定对于 $t_j<t<t_{j+1}$，$F_i(t)=F_i(t_j)$，因此，

$$F_k(t_{j+1})=F_k(t_j)\exp\left[\left(\sum_{i=j+1}^{k}\frac{\delta_i F_i(t_j)\Lambda_{i-j-1}\Lambda_{k-j-1}}{1+\delta_i F_i(t_j)}-\frac{\Lambda_{k-j-1}^2}{2}\right)\delta_j+\Lambda_{k-j-1}\varepsilon\sqrt{\delta_j}\right] \tag{31-14}$$

式中 ε 为由均值为 0，标准差为 1 的正态分布中得出的随机抽样本。在蒙特卡罗模拟中，这个方程可以用来由 0 时刻的远期利率来计算 t_1 的远期利率，然后再用来计算 t_2 的远期利率，等等。

31.2.4　多因子的推广

LIBOR 模型可以被推广到包含多个因子的情形。假设共有 p 个因子，以 $\zeta_{k,q}$ 表示 $F_k(t)$ 的波动

[1] 在实际中，Λ 是由我们后面将讨论的最小二乘校正法来确定的。

率中来源于第 q 个因子的部分，式(31-10)可以被表达为(见练习题 31.11)

$$\frac{\mathrm{d}F_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\delta_i F_i(t) \sum_{q=1}^{p} \zeta_{i,q}(t)\zeta_{k,q}(t)}{1+\delta_i F_i(t)}\mathrm{d}t + \sum_{q=1}^{p} \zeta_{k,q}(t)\,\mathrm{d}z_q \tag{31-15}$$

当从下一个重置日到远期合约到期日之间总共有 i 个累计区间时，定义 $\lambda_{i,q}$为波动率中的第 q 个部分，式(31-14)变为

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j)\exp\left[\left(\sum_{i=j+1}^{k} \frac{\delta_i F_i(t_j)\sum_{q=1}^{p}\lambda_{i-j-1,q}\lambda_{k-j-1,q}}{1+\delta_i F_i(t_j)} - \frac{\sum_{q=1}^{p}\lambda_{k-j-1,q}^2}{2}\right)\delta_j + \sum_{q=1}^{p}\lambda_{k-j-1,q}\varepsilon_q\sqrt{\delta_j}\right] \tag{31-16}$$

式中 ε_q 为由均值为 0，标准差为 1.0 的正态分布中得出的随机样本。

当假设远期利率的漂移率在每个累计区间上为常数时，在模拟时，我们可以从一个重置日跳到下一个重置日。这是一个很方便的假设，因为我们已经提到过，滚延远期风险中性世界使得我们可以从一个重置日贴现到下一个重置日。假设我们想模拟一条具有 N 个累计区间的零息曲线，在每次试验中，我们从时间 0 的远期利率开始，这些是由初始零息曲线计算出的利率 $F_0(0)$，$F_1(0)$，…，$F_{N-1}(0)$。利用式(31-16)可以计算出 $F_1(t_1)$，$F_2(t_1)$，…，$F_{N-1}(t_1)$；然后再利用式(31-16)可以计算出 $F_2(t_2)$，$F_3(t_2)$，…，$F_{N-1}(t_2)$；依此类推，直到最后得出 $F_{N-1}(t_{N-1})$。注意，随着时间的推移，零息曲线变得越来越短。例如，假设每个区间长度为 3 个月和 $N=40$。我们从一个 10 年的零息曲线开始，在 6 年的时间点上(时间为 t_{24})所做的模拟给了我们关于一条 4 年零息曲线的信息。

我们可以利用式(31-16)计算上限单元价格，并将得出的价格与布莱克模型的价格进行比较，这样可以检验漂移项所做假设(对 $t_j<t<t_{j+1}$，$F_i(t)=F_i(t_j)$)的近似程度。$F_k(t_k)$的值是 t_k 与 t_{k+1} 之间所实现的利率，这样使得我们可以得出上限在时间 t_{k+1}上的收益，再逐个在每个累计区间上对这个收益进行贴现，直到时间 0。上限单元价格是贴现后收益的平均值。这种形式的分析说明了由蒙特卡罗模拟得出的结果与布莱克模型所得结果并无很大差别，即使当累计区间为 1 年时，大量抽样后所得出的结果证明这一点仍然正确[⊖]。

31.2.5 跳动上限、黏性上限和灵活上限

LIBOR 市场模型也可以用来对一些非标准形式的上限定价。考虑**跳动上限**(ratchet cap)与**黏性上限**(sticky cap)，这些产品含有一些确定每个上限单元利率的规则。跳动上限的上限率等于上一个重置日的 LIBOR 利率加上一个利差；黏性上限的利率等于一个被封顶后的上限率加上一个利差。假设在时间 t_j 的上限率为 K_j，在时间 t_j 的 LIBOR 利率为 R_j，利差为 s。在跳动上限里 $K_{j+1}=R_j+s$；而在黏性上限里$K_{j+1}=\min(R_j, K_j)+s$。

表 31-2 和表 31-3 给出了由单个、2 个和 3 个因子模型计算出的跳动上限和黏性上限的价格。在这里，本金为 100 美元，期限结构为水平状，利息为年息 5%，上限波动率如表 31-1 所示，其中利率每年重置一次，利差为 25 个基本点。表 31-4 和表 31-5 展示了当模型含有 2 个和 3 个因子时，如何对波动率进行分解。这些结果是基于 100 000 次蒙特卡罗模拟以及在 20.7 节中描述的对偶变量技巧，每个价格的标准误差为 0.001。

⊖ 见 J. C. Hull and A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model," *Journal of Fixed Income*, 10, 2(September 2000): 46-62。唯一例外是当上限波动率很高的情形。

表 31-2 跳动上限的定价

开始时间(年)	单因子	两个因子	三个因子	开始时间(年)	单因子	两个因子	三个因子
1	0.196	0.194	0.195	6	0.180	0.189	0.193
2	0.207	0.207	0.209	7	0.172	0.180	0.188
3	0.201	0.205	0.210	8	0.167	0.174	0.182
4	0.194	0.198	0.205	9	0.160	0.168	0.175
5	0.187	0.193	0.201	10	0.153	0.162	0.169

表 31-3 黏性上限的定价

开始时间(年)	单因子	两个因子	三个因子	开始时间(年)	单因子	两个因子	三个因子
1	0.196	0.194	0.195	6	0.498	0.512	0.524
2	0.336	0.334	0.336	7	0.502	0.520	0.533
3	0.412	0.413	0.418	8	0.501	0.523	0.537
4	0.458	0.462	0.472	9	0.497	0.523	0.537
5	0.484	0.492	0.506	10	0.488	0.519	0.534

第 3 种非标准上限是**灵活上限**(flexi cap)，它与普通上限一样，但对可以被行使的上限单元的总数却有限制。考虑一个按年支付的灵活上限，本金为 100 美元，期限结构为水平状，利率为 5%，上限波动率如表 31-1、表 31-4 和表 31-5 所示。假如在所有的实值上限单元中最多只能行使 5 次，对于单个、2 个和 3 个因子的情形，LIBOR 市场模型给出的价格分别为 3.43、3.58 和 3.91（对于其他类型的灵活上限，见作业题 31.15)。

表 31-4 2 个因子模型中的波动率因子

年，k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_{k-1,1}$(%):	14.10	19.52	16.78	17.11	15.25	14.06	12.65	13.06	12.36	11.63
$\lambda_{k-1,2}$(%):	-6.45	-6.70	-3.84	-1.96	0.00	1.61	2.89	4.48	5.65	6.65
合计波动率(%):	15.50	20.64	17.21	17.22	15.25	14.15	12.98	13.81	13.60	13.40

表 31-5 3 个因子模型中的波动率因子

年，k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_{k-1,1}$(%):	13.65	19.28	16.72	16.98	14.85	13.95	12.61	12.90	11.97	10.97
$\lambda_{k-1,2}$(%):	-6.62	-7.02	-4.06	-2.06	0.00	1.69	3.06	4.70	5.81	6.66
$\lambda_{k-1,3}$(%):	3.19	2.25	0.00	-1.98	-3.47	-1.63	0.00	1.51	2.80	3.84
合计波动率(%):	15.50	20.64	17.21	17.22	15.25	14.15	12.98	13.81	13.60	13.40

基本类型的上限价格只依赖于总波动率，而与因子的数目无关。这是由于基本类型的上限单元只依赖于一个远期利率的变化，我们所考虑的非标准产品的价格却与此不同，因为它们依赖于多个不同远期利率的联合分布。因此，这些非标准产品的价格确实依赖于因子的个数。

31.2.6 欧式互换期权定价

Hull 和 White 证明了在 LIBOR 模型下，存在一个对欧式互换期权定价的近似公式[⊖]。令 T_0 为

⊖ 见 J. C. Hull and A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model," *Journal of Fixed Income*, 10, 2 (September 2000): 46-62。其他解析近似在以下文章中提出 A. Brace, D. Gatarek, and M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance* 7, 2(1997): 127-55 and L. Andersen and J. Andreasen, "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model," *Applied Mathematical Finance*, 7, 1(March 2000): 1-32。

互换期权的期限，假设互换的支付日期为 T_1，T_2，…，T_N。定义 $\tau_i = T_{i+1} - T_i$。由式(27-23)得出在时间 t 的互换利率为

$$s(t) = \frac{P(t,T_0) - P(t,T_N)}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t,T_{i+1})}$$

对于 $1 \leqslant i \leqslant N$，以下公式同样正确

$$\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_0)} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{1 + \tau_j G_j(t)}$$

式中 $G_j(t)$ 是时间 t 观察的 T_j 与 T_{j+1} 之间的远期利率，以上两个方程定义了 $s(t)$ 与 $G_j(t)$ 之间的关系。利用伊藤引理(见练习题 31-12)，互换利率 $s(t)$ 的方差 $V(t)$ 由下式给出

$$V(t) = \sum_{q=1}^{p} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_k \beta_{k,q}(t) G_k(t) \gamma_k(t)}{1 + \tau_k G_k(t)} \right]^2 \tag{31-17}$$

式中

$$\gamma_k(t) = \frac{\prod_{j=0}^{N-1}[1 + \tau_j G_j(t)]}{\prod_{j=0}^{N-1}[1 + \tau_j G_j(t)] - 1} - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N-1}[1 + \tau_j G_j(t)]}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N}[1 + \tau_j G_j(t)]}$$

式中 $\beta_{j,q}(t)$ 是 $G_j(t)$ 波动率的第 q 个部分。我们对所有的 j 和 t 设定 $G_j(t) = G_j(0)$，并以此来逼近 $V(t)$。在标准市场模型中用来对互换期权定价的互换波动率为

$$\sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{t=0}^{T_0} V(t)\,\mathrm{d}t}$$

或

$$\sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{t=0}^{T_0} \sum_{q=1}^{p} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_k \beta_{k,q}(t) G_k(0) \gamma_k(0)}{1 + \tau_k G_k(0)} \right]^2 \mathrm{d}t} \tag{31-18}$$

在互换期权标的合约的累计区间长度与上限单元长度一致的情形下，$\beta_{k,q}(t)$ 是期限为 $T_k - t$ 的上限远期波动率的第 q 个部分，这可以从类似于表 31-5 这样的表中查出。

在欧式互换期权经纪人报价中，互换期权累计区间并不总是与相应的上限和下限的累计区间一致。例如，在美国，标准上限和下限是按季度重置的，但标准互换期权中的互换却是按半年重置。幸运的是，对于欧式互换期权的定价结果可以被推广到当每个互换累计区间都包含 M 个可以成为典型上限累计区间的情形。定义 $\tau_{j,m}$ 为第 j 个累计区间中的第 m 个时间区间，于是

$$\tau_j = \sum_{m=1}^{M} \tau_{j,m}$$

定义 $G_{j,m}(t)$ 为在时间 t 所观察的在 $\tau_{j,m}$ 累计区间上的远期利率，由于

$$1 + \tau_j G_j(t) = \prod_{m=1}^{M}[1 + \tau_{j,m} G_{j,m}(t)]$$

通过修改推导式(31-18)的分析过程，我们使得 $s(t)$ 的波动率由 $G_{j,m}(t)$，而不是 $G_j(t)$ 的波动率来表示。可以证明(见作业题 31.13)，在对互换期权定价时，代入标准市场模型的互换波动率为

$$\sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{t=0}^{T_0} \sum_{q=1}^{p} \left(\sum_{k=n}^{N-1} \sum_{m=1}^{M} \frac{\tau_{k,m} \beta_{k,m,q}(t) G_{k,m}(0) \gamma_k(0)}{1 + \tau_{k,m} G_{k,m}(0)} \right)^2 \mathrm{d}t} \tag{31-19}$$

式中 $\beta_{j,m,q}(t)$ 为 $G_{j,m}(t)$ 波动率的第 q 个部分，这是期限为从 t 到互换累计区间(T_j，T_{j+1})中的第 m 个小区间开始时刻的上限远期利率的波动率。

式(31-18)和式(31-19)中互换波动率表达式涉及近似值 $G_j(t)=G_j(0)$ 和 $G_{j,m}(t)=G_{j,m}(0)$。Hull 和 White 对由式(31-18)和式(31-19)计算出的欧式互换期权价格与由蒙特卡罗模拟所得的价格做了比较，他们发现这两个价格非常接近。一旦 LIBOR 市场模型经过校正，式(31-18)和式(31-19)提供了计算欧式互换期权的一种快捷方法。分析人员由此可以确定相对于上限，欧式互换期权的价值是否太高或太低。我们在下面将会看到，分析人员也可以采用这些结果并以互换期权市场价格来校正模型。

31.2.7 校正模型

变量 Λ_j 是 t_k 与 t_{k+1} 之间在时间 t 的远期利率波动率，其中在 t 与 t_k 之间共有 j 个整的累计区间。为了校正 LIBOR 市场模型，我们必须确定 Λ_j，并且确定如何将其分配到 $\lambda_{j,q}$ 上。参数 Λ 通常是由当前市场数据来确定的，分配到 λ 的方式则是基于历史数据。

首先考虑如何由 Λ 来确定 λ。我们可以将主成分分析法(见 21. 9 节)用在远期利率数据上。我们可以确定将 Λ 分配到 λ 的方式。主成分分析法模型为

$$\Delta F_j = \sum_{q=1}^{M} \alpha_{j,q} x_q$$

其中 M 为因子的总个数(等于不同远期利率的个数)，ΔF_j 是第 j 个远期利率 F_j 的变化，$\alpha_{j,q}$ 为第 j 个远期利率和第 q 个因子的因子载荷，x_q 为第 q 个因子的因子得分。定义 s_q 为第 q 个因子得分的标准差。如果在 LIBOR 市场模型中所用的因子个数 p 等于因子总数 M，那么对于 $1 \leqslant j,\ q \leqslant M$，我们可以设

$$\lambda_{j,q} = \alpha_{j,q} s_q$$

当 $p<M$ 时，我们必须对 $\lambda_{j,q}$ 乘上一个比例，使得

$$\Lambda_j = \sqrt{\sum\nolimits_{q=1}^{p} \lambda_{j,q}^2}$$

我们可以取

$$\lambda_{j,q} = \frac{\Lambda_j s_q \alpha_{j,q}}{\sqrt{\sum\nolimits_{q=1}^{p} s_q^2 \alpha_{j,q}^2}} \tag{31-20}$$

下面考虑 Λ 的估计。式(31-11)提供了一种使它们与上限单元价格保持一致的方法。但在实际中，我们往往不使用这种方式，因为它会导致 Λ 值大幅度的摆动，甚至有时与上限报价一致的 Λ 并不存在。通常使用的矫正方法与 30. 8 节的单因子模型相似。假设 U_i 是第 i 个校正产品的市场价格，V_i 为模型价格。我们选取使得下式达到最小的 Λ

$$\sum_i (U_i - V_i)^2 + P$$

其中 P 是一个惩罚函数，其选择标准是使得 Λ 取值“性态良好”。与 30. 8 节类似，函数 P 可能具有以下形式

$$P = \sum_i w_{1i}(\Lambda_{i+1} - \Lambda_i)^2 + \sum_i w_{2,i}(\Lambda_{i+1} + \Lambda_{i-1} - 2\Lambda_i)^2$$

当一些校正产品为欧式互换期权时，式(31-18)与式(31-19)使得利用 Levenberg-Marquardt 程序求最小值成为可行，式(31-20)可被用来由 Λ 确定 λ。

31.2.8 波动率偏态

经纪人对上限所报价格中既包括非平值上限也包括平值上限。在一些市场里，我们可以观察到波动率偏态的现象，也就是说，波动率报价(布莱克波动率)是执行价格的递减函数，这

一波动率特性可由 CEV 模型来处理(见 26.1 节中 CEV 模型在股权中的应用), CEV 模型表达形式为

$$dF_i(t) = \cdots + \sum_{q=1}^{p} \zeta_{i,q}(t) F_i(t)^{\alpha} dz_q \tag{31-21}$$

其中 α 为常数($0 < \alpha < 1$)。这种模型可以由与对数正态模型类似的方式处理,我们可以利用累积非中心 χ^2 分布对上限或下限产品由解析方法定价,对于上面讨论的欧式互换期权也存在某种解析估计式㊀。

31.2.9 百慕大式互换期权

百慕大式互换期权(Bermudan swap option)是一种非常流行的利率衍生产品,这种互换期权可以在标的互换的某些支付日或所有支付日上被行使。利用 LIBOR 市场模型对百慕大式互换期权定价非常困难,因为 LIBOR 市场模型依赖于蒙特卡罗模拟,而利用蒙特卡罗模拟时,对提前行使决策的判断非常困难。幸运的是,我们可以利用在 26.8 节中描述的处理方法来对产品定价。当存在许多因子时,Longstaff 和 Schwartz 利用了最小二乘法的处理方式,他们假定在一个支付日上不被行使的期权价格为因子值的多项式函数㊁。Andersen 证明了在定价过程中,可以采用最优提前行使边界的处理方式。Andersen 对不同的提前行使边界的参数化形式进行了比较,并发现当提前行使边界被假设为仅仅依赖于期权内在价值时,效果最好㊂。对百慕大式期权定价时,大多数交易员使用在第 30 章中介绍的单因子无套利模型。但是,使用单因子模型对百慕大互换期权定价的精确性仍是一个很有争议的问题㊃。

31.3 联邦机构房产抵押贷款证券

本章所述模型可以应用在美国的联邦机构房产抵押贷款证券(agency mortgage-backed securities,简称联邦机构 MBS)上。

联邦机构 MBS 与第 8 章所描述的资产抵押证券相似,其唯一不同之处在于债券的付款通常由诸如政府国民住房抵押贷款协会(Government National Mortgage Association, GNMA)或联邦国民住房抵押贷款协会(Federal National Mortgage Association, FNMA)这些与政府有关的机构来担保,以使得投资者不承担违约风险。这使 MBS 看起来好像是一个政府发行的普通固定收入证券。但实际上,MBS 与普通固定收入证券之间有着重要差别:MBS 中的住房贷款具有**提前偿付**(prepayment)特权。对房主而言,这些提前偿付特权很有价值。在美国,一个典型的住房贷款的期限为 30 年,并可以在任意时刻提前偿付。这意味着,房主持有 30 年期的美式期权,可以随时将房屋贷款的面值退还给贷款借出方。

在实际中,提前偿付的原因多种多样。有时利率下跌,房主决定以更低的利率再融资。在另

㊀ 关于这种方法的细节,见 L. Andersen and J. Andreasen, "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model," *Applied Mathematical Finance*, 7, 1(2000): 1-32; J. C. Hull and A. White, "Forward Rate Volatilities, Swop Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model," *Journal of Fixed Income*, 10, 2(September 2000): 46-62。

㊁ 见 F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulations: A Simple Least Square Approach," *Review of Financial Studies*, 14, 1(2001): 113-47。

㊂ 见 L. Andersen, "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model," *Journal of Computational Finance*, 3, 2(Winter 2000): 5-32。

㊃ 关于反对观点,见 L. Andersen 和 J. Andreasen 的文章"Factor Dependence of Bermudan Swaptions: Fact or Fiction," 和 F. A. Longstaff, P. Santa-Clara 和 E. S. Schwartz 的文章"Throwing Away a Billion Dollars: The Cost of Suboptimal Exercise Strategies in the Swaption Market."两篇文章均发表在 *Journal of Financial Economics*, 62, 1(October 2001)。

外一些情形下，提前偿付的简单原因是房屋已经被出售。对 MBS 定价的关键是确定**提前偿付函数**(prepayment function)。这个函数描述了在某个时刻 t，房屋贷款提前偿付与时间 t 的利率曲线以及其他相关变量之间的函数关系。

当预测个别住房贷款的提前偿付情况时，利用提前偿付函数是很不可靠的。但当许多类似的住房贷款放在一起时，**大数定律**(law of large number)会起作用。通过历史数据，我们可以比较精确地计算提前偿付的数量。我们前面谈过，提前偿付并不完全是由于利率的因素。尽管如此，提前偿付在利率很低时会更容易产生。这意味着，投资者要求 MBS 比其他固定收入产品支付更高的利息以便补偿所付出的提前偿付期权。

31.3.1 分级偿还房产抵押贷款证券

到现在为止所描述的 MBS 有时被称为**过手证券**(pass-through)。在这里，所有的投资者都获得同样的收益并承受同样的提前偿付风险。并非所有的 MBS 都以这种方式运作。**分级偿还房产抵押贷款证券**(collateralized mortgage obligations, CMO)将投资者分成不同的级别，并设定一套规则来决定如何将本金支付给不同级别的投资者。CMO 创造了不同级别的证券，不同证券承担不同的提前偿还风险，这与在资产支持证券中，不同级别的证券承担不同的信用风险类似。

作为一个 CMO 的例子，考虑某个联邦机构 MBS，其投资者被分为三级：A 级、B 级和 C 级。所有的本金支付(既包括按预先计划的，也包括提前支付的)先分配给 A 级投资者，直到对该级别投资者的支付全部完毕。然后，本金支付分配给 B 级投资者，直到该级别投资者的支付也全部完毕。最后，本金支付分配给 C 级投资者。在这种情况下，A 级投资者所承受的提前偿还风险最大。可以预料，A 级证券的期限比 B 级要短，同样，B 级证券的期限比 C 级要短。

这种结构的目的是产生不同类型的证券。对机构投资者而言，这种证券比那些简单的过手证券更有吸引力。不同类型证券所对应的提前偿付风险取决于每一类证券的面值(par value)。例如，A 类、B 类和 C 类的面值分别为 400、300 及 100 时，C 类承担的提前偿付风险很小。但当各类面值分别为 100、200 及 500 时，C 类会承担更大的提前偿付风险。

分级偿还房产抵押贷款证券的构造者还构造了许多比我们刚刚讨论的证券更加特殊的结构，业界事例 31-1 给了一个这样的例子。

业界事例 31-1　纯息债券和纯本金债券

在所谓的**剥离 MBS**(striped MBS)中，本金支付是与利息支付分开的。所有的本金支付均分配给一类证券，叫做**纯本金**(principle only, PO)债券，而所有的利息支付都分配给另一类证券，叫做**纯息**(interest only, IO)债券。IO 与 PO 两种债券都是具有很大风险的投资。当提前偿付率增加时，PO 的价值会变得较大，而 IO 的价值会变得较小。当提前偿付率减小时，相反的结论成立。在 PO 中，固定数量的本金将会还给投资者，但偿还的时间却不确定。当所含房产抵押贷款的提前偿还率较高时，将会导致收到本金的时间较早(对 PO 持有者来讲，这当然是好消息)。所含房产抵押贷款的提前偿还率较低时，将会推迟归还本金的时间，从而降低了 PO 所提供的收益率。在 IO 情形，投资者所收到的现金流是不确定的。提前偿还率越高，投资者收到的现金流越少，反之亦然。

31.3.2 对联邦机构房产抵押贷款证券的定价

对联邦机构房产抵押贷款证券的定价一般是利用蒙特卡罗模拟。利用 HJM 或 LIBOR 市场模型，我们可以模拟在 MBS 有效期内每个月的利率变化行为。考虑在一次模拟试验中可能发生的情况，在每个月内，利用目前的收益率曲线以及收益率曲线变动的历史，我们可以计算预期的提前偿付数量。由这些提前偿付的数量，我们可以确定 MBS 持有者的预期现金流，将现金流贴现到零即可得到一个 MBS 价格的样本。MBS 价值的估计值是许多模拟试验所得样本的平均值。

31.3.3 期权调整利差

除了计算房产抵押贷款证券以及其他含有隐含期权的债券价格外，交易员还常常喜欢计算所谓的**期权调整利差**(option-adjusted spread, OAS)。这是当考虑所有内含期权后，产品所提供的高于国库券收益率的利差。

对于任何期限结构模型的一项输入是初始零息收益率曲线，通常是 LIBOR 零息曲线。但是，在计算一个产品的 OAS 时，我们首先利用零息国库券曲线对其定价。我们将模型所给的产品价格与市场价格相比较，然后利用一系列的迭代来确定使得模型价格等于市场价格的国库券曲线平行移动。这项平行移动即为 OAS。

为了说明计算的过程，假设某产品市场价格是 102.00 美元，而利用国库券曲线所计算的价格是 103.27 美元。在第一次试验时，我们可以选取对国库券零息曲线做 60 个基点的平行移动。假设这时所给出的产品价格是 101.20 美元。这个价格比市场价格 102.00 美元要小，因此介于 0~60个基点之间的某个平行移动将会使模型价格等于市场价格。我们可以利用线性插值的方法来计算

$$60 \times \frac{103.27 - 102.00}{103.27 - 101.20} = 36.81$$

即以 36.81 个基点作为下一试验时的移动。假设这次所给的价格是 101.95，这说明 OAS 略微低于 36.81 个基点。线性插值将会建议下一次试验的平移是

$$36.81 \times \frac{103.27 - 102.00}{103.27 - 101.95} = 35.41$$

或 35.41 个基点，依此类推。

小　结

在计算利率衍生产品时，HJM 和 LMM 模型给用户提供了能够自由选择波动率期限结构的处理方法。LMM 模型比 HJM 模型具有两项关键的优势。首先，LMM 模型的建立是基于确定上限价格的远期利率，而不是瞬时远期利率。其次，相对而言，我们能够比较容易地利用上限价格或欧式互换期权价格对模型进行校正。HJM 和 LMM 都具有的缺点是它们不能被再重合树形所表示。在实际中，这意味着我们必须利用蒙特卡罗模拟来实现这些模型。

在美国，房产抵押贷款证券市场上产生了许多特种利率衍生产品：CMO、IO、PO 等。这些产品对其持有者所提供的现金流依赖于房产抵押贷款的提前偿还率。提前偿还率的大小与诸多因素有关，其中包括利率的水平。房产抵押贷款证券的价格对路径有很强的依赖性，因此价格计算必须依靠蒙特卡罗模拟来实现。这些产品是 HJM 模型和 LMM 模型比较理想的应用对象。

推荐阅读

Andersen, L., "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaption in the Multi-Factor LIBOR Market Model," *The Journal of Computational Finance*, 3, 2 (2000): 5–32.

Andersen, L., and J. Andreasen, "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model," *Applied Mathematical Finance*, 7, 1 (March 2000): 1–32.

Andersen, L., and V. Piterbarg, *Interest Rate Modeling*, Vols. I–III. New York: Atlantic Financial Press, 2010.

Brace A., D. Gatarek, and M. Musiela "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, 7, 2 (1997): 127–55.

Duffie, D. and R. Kan, "A Yield-Factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance* 6, 4 (1996), 379–406.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 4 (December 1990): 419–40.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of the Interest Rates: A New Methodology," *Econometrica*, 60, 1 (1992): 77–105.

Hull, J., and A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model," *Journal of Fixed Income*, 10, 2 (September 2000): 46–62.

Inui, K., and M. Kijima, "A Markovian Framework in Multifactor Heath, Jarrow, and Morton Models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 3 (September 1998): 423–40.

Jamshidian, F., "LIBOR and Swap Market Models and Measures," *Finance and Stochastics*, 1 (1997): 293–330.

Jarrow, R. A., *Modeling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, 2nd edn. New York: McGraw-Hill, 2002.

Jarrow, R. A., and S. M. Turnbull, "Delta, Gamma, and Bucket Hedging of Interest Rate Derivatives," *Applied Mathematical Finance*, 1 (1994): 21–48.

Miltersen, K., K. Sandmann, and D. Sondermann, "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Lognormal Interest Rates," *Journal of Finance*, 52, 1 (March 1997): 409–30.

Rebonato, R., *Modern Pricing of Interest Rate Derivatives: The LIBOR Market Model and Beyond*. Princeton Umiversity Press, 2002.

练习题

31.1 解释关于短期利率的马尔科夫模型与非马尔科夫模型之间的区别。

31.2 证明在多因子HJM模型下，式(31-6)中远期利率的漂移项与波动率之间的关系式。

31.3 “当LMM模型中的远期利率波动率$s(t, T)$是常数时，所得到的模型是Ho-Lee模型。”通过证明LMM给出的债券价格过程与第30章中Ho-Lee模型一致性来验证这个结果是正确的。

31.4 “当LMM模型中的远期利率波动率$s(t, T)$等于$\sigma e^{-a(T-t)}$，所得到的模型是Hull-White模型。”通过证明LMM给出的债券价格过程与第30章中Hull-White模型一致性来验证这个结果是正确的。

31.5 同HJM模型相比，LMM模型的优点是什么？

31.6 从直观上说明当因子的个数增加时，跳跃上限的价值也会增加。

31.7 证明当δ_i趋于零时，式(31-10)变为式(31-4)。

31.8 解释为什么粘性上限要比一个类似的跳跃上限更贵。

31.9 解释为什么提前偿还率对IO和PO有相反的影响。

31.10 “期权调整利差与债券的收益率是类似的。”解释这个结论。

31.11 证明式(31-15)。

31.12 证明式(31-17)中互换利率的方差$V(T)$的公式。

31.13 证明式(31-19)。

作业题

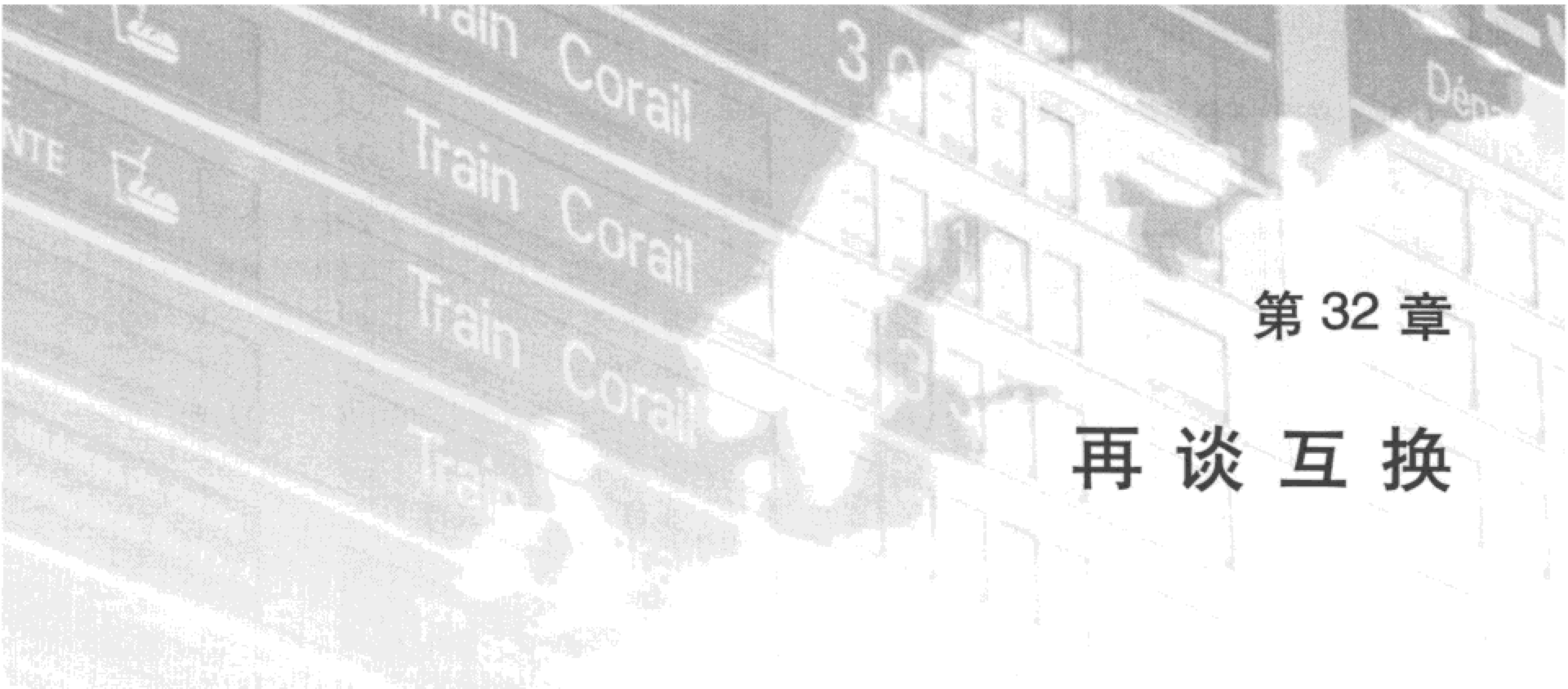
31.14 在一个按年付款的上限里，期限为1年、2年、3年和5年的上限单元的布莱克波动率分别是18%、20%、22%和20%。当期限如下时，估计LIBOR市场模型中1年远期利率的波动率：(a)0~1年，(b)1~2年，(c)2~3年和(d)3~5年。假设零息曲线为水平，利率为每年5%（按年复利）。利用DerivaGem估计2年、3年、4年、5年和6年上限的水平波动率。

31.15 在第31.2节里考虑的灵活上限中，持有者有行使前N个实值上限单元的义务。此后持有者不能再行使其他上限单元（在例子中，$N=5$）。有时灵活上限也可以由另外两种方式来定义：

(a) 持有者可以决定是否行使一个上限单元，但能够行使的上限单元数不超过N个。

(b) 一旦持有者决定行使一个上限单元，所有随后的实值上限单元都必须被行使，直到最多N个。

讨论对这些类型的灵活上限定价时会存在什么问题。在三种类型的灵活上限中，你认为哪类最贵？哪类最便宜？



第 32 章 再谈互换

互换合约对衍生产品场外交易市场的成功起了关键作用。事实证明，互换合约是管理风险的一种灵活工具。无论从现在所交易的合约种类，还是每年的交易总量，我们都可以说互换是有史以来金融市场上最成功的革新之一。

在第 7 章里我们讨论了如何对标准利率互换定价。标准的定价方式可以被概括为："假设远期利率将会实现"。步骤如下：

- 假设将来的 LIBOR 利率等于由今天的 LIBOR/互换零息曲线所计算出的远期利率，计算互换的净现金流。
- 互换的价值等于所得净现金流通过 LIBOR/互换零息曲线进行贴现后现值的总和。

本章我们描述几种非标准互换，一些可以利用"假设远期利率将会实现"的处理方式；一些需要应用我们在第 29 章讲过的曲率、时间和 Quanto 调节；另一些则包括隐含期权，我们必须利用第 28、30 和 31 章中所描述的方法来定价。

32.1 标准交易的变形

许多利率互换是第 7 章里所讨论的标准利率互换的简单变形。有时利率互换的名义本金会随时间以某种固定的形式变化。当名义本金随时间变化增加时，利率互换被称为**递升互换**(step-up swap)。当名义本金随时间变化递减时，利率互换被称为**摊还互换**(amortizing swap)。当某家公司对一项目进行融资而以浮动利率借入资金，借入资金的数量逐渐增加，这时如果公司希望将浮动利率转换为固定利率，递升互换将会非常有用。当某家公司的债务为固定利率，而债务数量逐步递减时，可以利用摊还互换将债务转换为浮动利率。

互换交易的双方可以有不同的本金，双方付款频率可以不同。这在业界事例 32-1 中有所描述，这一虚拟的互换交易是微软与高盛之间的交易，交易的浮动利率方的名义面值为 1.2 亿美元，固定利率方的名义面值为 1 亿美元，浮动利率付款频率为每个月一次，固定利率付款频率为每 6 个月一次。

业界事例 32-1　虚拟非标准互换定约摘要

交易日：2010 年 1 月 5 日
生效日：2010 年 1 月 11 日
工作日计算约定：随后的工作日
假日日历：美国

结束日：2015 年 1 月 11 日
固定息方
固定息付款方：微软
固定息方名义面值：1 亿美元

固定利率：每年6%

固定利率计天方式：实际天数/365 (Actual/365)

固定息付款日期：从2010年7月11日开始，直到并且包括2015年1月11日，每年的7月11日和1月11日

浮动息方

浮动息付款方：高盛

浮动息方名义面值：1.2亿美元

浮动利率：1月期美元LIBOR利率

浮动利率计天方式：实际天数/360 (Actual/360)

浮动息付款日期：2010年7月11日，和从2010年7月11日开始直到并且包括2015年1月11日，每个月的11日

浮动利率方的参考利率并不一定总是LIBOR。在有些情形下，参考利率可以是商业票据(commerical paper, CP)利率。在基差互换(basis swap)中，以基于一种浮动利率的现金流与另一种浮动利率的现金流进行交换。例如，在某基差互换中，3个月期的CP利率加上10个基点与3个月期的LIBOR进行交换，双方的面值均为1亿美元。金融机构的资产及负债往往与不同的浮动利率有关，金融机构可以采用基差互换来达到对资产负债管理的目的。

当互换的参考浮动利率不是LIBOR时，我们仍然可以利用"假设远期利率将会实现"的处理方式对其定价。但当假设远期利率将会实现时，我们需要使用不同于LIBOR的零息曲线来计算将来的现金流，所得的现金流仍按LIBOR利率贴现。

32.2 复合互换

简单利率互换的另一种变形为**复合互换**(compounding swap)。在业界事例32-2中我们给出了一个这样的例子。在这个例子中，无论是对于浮动利率方还是固定利率方都只有一个付款日期，即利率互换的截止日。浮动利率为LIBOR+20个基点。与其定时将付款交割，浮动利息一直被按LIBOR+10个基点的利息被复合到利率互换的截止日期。固定利率为6%，与其定时将付款进行交割，此利息也被按6.3%的利率复合到利率互换的截止日期。

业界事例32-2 某虚拟的复合非标准互换定约

交易日：2010年1月5日

生效日：2010年1月11日

假日日历：美国

工作日计算约定：随后的工作日

结束日：2015年1月11日

固定息方

固定息付款方：微软

固定息方名义面值：1亿美元

固定利率：每年6%

固定利率计天方式：实际天数/365 (Actual/365)

固定息付款日期：2015年1月11日

固定息复合利率：按6.3%

固定息利率复合日期：从2010年7月11日开始，直到并且包括2014年7月11日，每年的7月11日和1月11日

浮动息方

浮动息付款方：高盛

浮动息方名义面值：1亿美元

浮动利率：6月期美元LIBOR利率

浮动利率计天方式：实际天数/360 (Actual/360)

浮动息付款日期：2015年1月11日

浮动息复合利率：按LIBOR+10个基点

浮动息利率复合日期：从2010年7月11日开始，直到并且包括2015年1月11日，每年的7月11日和1月11日

对于像业界事例32-2这样的复合互换，我们可以利用“假设远期利率将会实现”的处理方式对其定价。处理固定利率的一方很简单，这是因为支付的时间是在到期日并且所付数量也是已知的。处理浮动利息方的“假设远期利率将会实现”方法也是可行的，因为我们可以设计一系列远期利率合约(FRA)，其中浮动利率现金流与假设每个浮动利率都等于相应远期利率时的价值相交换[⊖]。

【例32-1】 一个按年重置的复合互换具有3年有效期。支付的是固定利率，而收取的是浮动利率。固定利率为4%，浮动利率为12个月LIBOR。固定利率方按3.9%复利，而浮动利率方按12个月LIBOR减去20基点的利率复利。LIBOR零息曲线呈水平状，利率为5%按年复利。名义本金为1亿美元。

对固定利率方，在一年末挣取的利息为400万美元，并在第二年末被复利成4×1.039(百万)=415.6万美元。数量为400万美元的第二期利息将会被加到第二年末，从而向前复利的总数是815.6万美元。这会在第三年末被复利成8.156×1.039(百万)=847.4万美元，而且在第三年末又会有400万美元的利息。从而在第三年末互换的固定利率方共有1247.4万美元。

在浮动利率方，我们假定将来所有的利率都等于相应的远期LIBOR利率。在给定的LIBOR零息曲线下，将来的所有利率都是5%按年复利。在第一年末计算的利息为500万美元，将其以4.8%的利率(远期LIBOR减去20基点)向前复利，在第二年末会变成5×1.048(百万)=524万美元。加上利息，向前复利的数量为1 024万美元。再将其向前复利，我们将得到1 024×1.048=1 073.1万美元。加上最后的利息将会得到1 537.1万美元。

我们可以假设互换将会导致在第三年末现金流入为1 573.1万美元，现金流出为1 247.4万美元。因此，互换的价值为

$$\frac{1\,573.1-1\,247.4}{1.053^3}=281.4$$

即281.4万美元(这里的分析忽略了计量天数惯例的影响)。

32.3 货币互换

在第7章里，我们引入了货币互换。货币互换可以将在一个货币下的利率暴露转化为对另一种货币下的利率暴露。通常有两项本金，每个货币中都有一项。如7.8节所述，在互换有效期的开始与结束时本金均予以交换。

假设货币互换所涉及的货币为美元(USD)与英镑(GBP)。在一个定息对定息的货币互换下，每个货币下都指定一个固定利率。一方的支付是以美元的固定利率按美元本金来确定利息，另一方的支付是以英镑的固定利率按英镑本金来确定利息。在7.9节中我们曾讨论过如何对这类互换定价。

另一种流行的货币互换是浮息对浮息。这时，一方的支付是将美元LIBOR(可能加上一个利差)用在美元本金上来确定。与此类似，另一方的支付是将英镑LIBOR(可能加上一个利差)用在英镑本金上来确定。第三类互换是交叉货币利率互换(cross currency interest swap)，即在一种货币下的浮动利率与另一种货币下的固定利率相交换。

对浮息对浮息与交叉货币利率互换，我们均可以利用“假设远期利率将会实现”的处理方式来定价，在每种货币下都假设将来的LIBOR利率等于今天的远期利率。这样可以使得在一种货币下的现金流得以确定。美元现金流由美元LIBOR零息利率贴现，而英镑现金流则由英镑LIBOR零

⊖ 关于具体细节，见 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNote 里的 Technical Note 18。

息利率贴现，然后用目前的汇率将两个现值转换到同一种货币下。

为了反映市场现状，有时会对以上程序加以调整。从理论上讲，一个新的浮息对浮息互换应当涉及将一种货币下的 LIBOR 转换成另一种货币下的 LIBOR（不加利差）。但在实际中，宏观经济影响会导致利差的出现。为此，金融机构经常调整贴现率。例如，假设在当前的市场条件下，在新建立的所有期限的浮息对浮息互换中美元 LIBOR 可以与日元 LIBOR 减去 20 基点相交换。在对这个互换定价时，一个美国的金融机构将会对美元现金流以美元 LIBOR 贴现，而对日元现金流将以日元 LIBOR 减去 20 基点贴现[⊖]。在所有同时涉及日元和美元现金流的互换中，金融机构都将会采取这种做法。

32.4 更复杂的互换

下面将考虑“假设远期利率将会实现”的处理方式不再适用的互换例子。在每种情形下，我们都需要对远期利率进行调整。本章的结果建立在第 29 章结论的基础上。

32.4.1 LIBOR 后置互换

标准利率互换的特点是将前一个付息日所观察的浮动利率在下一个付息日支付。有时交易的另一种产品叫做 **LIBOR 后置互换**（LIBOR-in-array swap），其特点是在一个支付日所付的浮动利率由在这个支付日所观察到的利率本身确定。

假设一个互换的重置日期是 t_i，$i=0,1,\cdots,n$，而且 $\tau_i=t_{i+1}-t_i$。定义 R_i 为区间 t_i 与 t_{i+1} 之间的 LIBOR 利率，F_i 为 R_i 的远期利率，σ_i 为这个远期利率的波动率（σ_i 的值通常是由上限单元价格隐含而得）。在一个 LIBOR 后置互换中，浮动利率方在时间 t_i 的支付是基于 R_i，而不是通常的 R_{i-1}。如在 29.1 节所述，当对支付额定价时，有必要对远期利率做一个曲率调整。定价时应当基于假设远期利率为

$$F_i+\frac{F_i^2\sigma_i^2\tau_i t_i}{1+F_i\tau_i} \tag{32-1}$$

而不是 F_i。

【例 32-2】 在一个 LIBOR 后置互换中，本金为 1 亿美元。按年收取 5% 的固定利率并支付 LIBOR。在第 1、第 2、第 3、第 4 和第 5 年的年底交换支付。收益率曲线呈水平状，利率为每年 5%，按年复利。所有的上限单元波动率均为每年 22%。

每个浮动利率方支付的远期利率均为 5%。假如这是个标准互换不是后置互换，它的价值（忽略计天约定）正好为零。由于这是个后置互换，我们必须进行曲率调整。在式(32-1)中，对所有的 i，$F_i=0.05$，$\sigma_i=0.22$ 和 $\tau_i=1$。曲率调整将在所有时间 t_i 的利率由 0.05 变成为

$$0.05+\frac{0.05^2\times0.22^2\times1\times t_i}{1+0.05\times1}=0.05+0.000\,115t_i$$

因此在第 1、第 2、第 3、第 4 和第 5 年年底支付的浮动利率应当分别被假设成 5.011 5%、5.023 0%、5.034 5%、5.046 0% 和 5.057 5%。第一个交换日期的净交换值等价于 1 亿美元的 0.011 5%，即 11 500 美元的现金外流。我们可以类似地计算其他交换的等价净现金流。互换的价格为

$$-\frac{11\,500}{1.05}-\frac{23\,000}{1.05^2}-\frac{34\,500}{1.05^3}-\frac{46\,000}{1.05^4}-\frac{57\,500}{1.05^5}$$

即 −144 514 美元。

⊖ 这种调整并不严谨，但不做的话，每当做一个新的 JPY/USD 浮息对浮息互换时，交易员都会马上有收入或损失。

32.4.2 CMS 与 CMT 互换

固定期限互换(constant maturity swap, CMS)是一种浮动利率等于某一个固定期限互换利率的利率互换。例如，某 CMS 互换的浮动利率方可能是每6个月支付一次并等于5年的互换利率。通常会有一个滞后时间而使得在一个特定支付日期的支付等于在前一个支付日期所观察的互换利率。假设利率在时间 t_0，t_1，t_2，…被设定，而分别在时间 t_1，t_2，t_3，…支付，L 为本金面值。在时间 t_{i+1}的浮动利率支付为 $\tau_i LS_i$，式中 $\tau_i = t_{i+1} - t_i$，S_i 是在时间 t_i 的互换利率。

假设 y_i 是互换利率 S_i 的远期值。在对时间 t_{i+1}的支付定价时，我们发现可以对远期互换利率做一个曲率调整，即把互换利率假设成

$$y_i - \frac{1}{2}y_i^2\sigma_{y,i}^2 t_i \frac{G_i''(y_i)}{G_i'(y_i)} - \frac{y_i\tau_i F_i\rho_i\sigma_{y,i}\sigma_{F,i}t_i}{1 + F_i\tau_i} \tag{32-2}$$

而不是 y_i。在这个方程中，$\sigma_{y,i}$是远期互换利率的波动率，F_i 是目前在时间 t_i 和 t_{i+1}之间的远期利率，$\sigma_{F,i}$是这个远期利率的波动率，ρ_i 是远期互换利率与远期利率之间的相关系数。$G_i(x)$是债券作为其收益率 x 的函数在时间 t_i 的价格。债券的券息为 y_i，并具有与计算 CMS 利率所用互换同样的有效期与支付频率。$G_i'(x)$和 $G_i''(x)$是 G_i 关于 x 的一阶和二阶导数。波动率 $\sigma_{y,i}$可以由互换期权隐含而得出；波动率 $\sigma_{F,i}$可以由上限单元价格隐含而得出；而相关系数 ρ_i 可以由历史数据来估计。

式(32-2)涉及曲率和时间调整，其中的调节量为

$$-\frac{1}{2}y_i^2\sigma_{y,i}^2 t_i \frac{G_i''(y_i)}{G_i'(y_i)}$$

与我们在29.1节里的例29-2中计算的调整项类似，它是建立在互换利息 S_i 只发生在单个时间 t_i，而不是发生在一个年金付款时间系列的假设上的。另一项

$$-\frac{y_i\tau_i F_i\rho_i\sigma_{y,i}\sigma_{F,i}t_i}{1 + F_i\tau_i}$$

与我们在29.2节所计算的调整项类似，它考虑了由 S_i 所计算的支付是发生在 t_{i+1}而不是发生在 t_i 的事实。

【例32-3】 在一个6年期 CMS 互换中，收取的是5年互换利率，而支付的是5%的固定利率。本金面值为1亿美元。支付每半年发生一次(标的5年互换利率与 CMS 互换本身都是这样)。支付日期的交换数量由上一个支付日期的互换利率确定。期限结构呈水平状，利率为每年5%，按半年复利。所有5年互换期权均有15%的隐含波动率，而所有6个月期限的上限单元隐含波动率均为20%。每个上限率与每个互换利率之间的相关系数是0.7。

在这种情形下，对所有的 i，$y_i = 0.05$，$\sigma_{y,i} = 0.15$，$\tau_i = 0.5$，$F_i = 0.05$，$\sigma_{F,i} = 0.20$ 和 $\rho_i = 0.7$。并且

$$G_i(x) = \sum_{i=1}^{10} \frac{2.5}{(1 + x/2)^i} + \frac{100}{(1 + x/2)^{10}}$$

于是 $G_i'(y_i) = -437.603$ 和 $G_i''(y_i) = -2261.23$。式(32-2)给出了总的曲率/时间调整量为 $0.000\,119\,7t_i$，或每年1.197个基点，直到互换利率被观察到为止。例如，为了对 CMS 互换定价，在4年后的5年互换利率应当被假设成5.047 9%，而不是5%，在4.5年的时间点上所收入的净现金流应当被假设成 $0.5 \times 0.000\,479 \times 100\,000\,000 = 23\,940$ 美元。我们可以类似地计算其他的净现金流。取现值后，我们可以得到互换的价值为159 811美元。

固定期限国债互换(constant maturity treasury swap, CMT)与 CMS 类似，只是这里的浮动利率为具有特定期限的政府债券收益。对 CMT 互换的分析与 CMS 互换基本上是一样的，这时只要将 S_i 定义为具有特定期限长度的政府债券面值收益即可。

32.4.3 跨货币互换

跨货币互换(differential swap)，有时也简称为 **Diff 互换**(diff swap)，是一种利率互换。互换的浮动利率是在一种货币下观察到，但却用在另一种货币的本金上。假设我们在货币 Y 下观察到介于 t_i 和 t_{i+1} 之间的 LIBOR 利率，并在时间 t_{i+1} 用在货币 X 下的本金上。定义 V_i 为货币 Y 下介于 t_i 和 t_{i+1} 之间的远期利率，W_i 为一个期限为 t_{i+1} 合约的远期汇率(表示为一个单位的货币 X 所值的货币 Y 数量)。如果货币 Y 下的 LIBOR 利率用在货币 Y 下的本金上，在计算时间 t_{i+1} 的现金流时，我们可以假设在时间 t_i，LIBOR 利率等于 V_i。从 29.3 节中的分析我们知道，当将其用于货币 X 下的在时间 t_i 的本金时，我们需要做一个 Quanto 调节：我们可以在 LIBOR 利率等于

$$V_i + V_i\rho_i\sigma_{W,i}\sigma_{V,i}t_i \tag{32-3}$$

的假设下对现金流定价，其中 $\sigma_{W,i}$是 W_i 的波动率，$\sigma_{V,i}$是 V_i 的波动率，ρ_i 是 V_i 与 W_i 之间的相关系数。

【例 32-4】 美国与英国的零息利率均为水平状，利率均为每 5%，按年复利。在一个 3 年期按年支付的 Diff 互换合约中，收取的是 12 月的美元 LIBOR，支付的是 12 月英镑 LIBOR，而且两种利率都是用在 1 亿英镑的本金上。估计出的在美国所有 1 年远期利率波动率均为 20%，所有期限的远期美元/英镑汇率(每英镑的美元数)的波动率均为 12%，而且两者之间的相关系数为 0.4。

在这种情形下，$V_i=0.05$，$\rho_i=0.4$，$\sigma_{W,i}=0.12$，$\sigma_{V,i}=0.2$。因此，依赖于在时间 t_i 所观察的 1 年期美元利率的现金流应当基于假设利率为

$$0.05+0.05\times0.4\times0.12\times0.2\times t_i = 0.05+0.000\,48t_i$$

这意味着为了定价的缘故，我们应当假设在时间 1、2 和 3 年时互换的净现金流为 0，4 800 英镑和 9 600 英镑。因此，互换的价值为

$$\frac{0}{1.05}+\frac{4\,800}{1.05^2}+\frac{9\,600}{1.05^3}=12\,647$$

即 12 647 英镑。

32.5 股权互换

股权互换(equity swap)中的一方同意付出一定本金数量的股指收益，另一方同意付出一定的本金数量的固定或浮动利率收益。通过采用股权互换，基金经理可以在不买入或卖出股票的前提下，增大或缩小对于某股指的风险暴露。股权互换是一种较为便利地将一系列股指远期打包以便满足市场需求的交易形式。

这里的股指通常为总收益指数，总收益指数是指所有股息都被再投资到股指所包括的股票里。业界事例 32-3 是一个股权互换的定约。在此股权互换中，6 个月的 S&P 500 股指收益率与 LIBOR 交换。互换双方的本金均为 1 亿美元，每 6 个月支付一次。

业界事例 32-3 某虚拟的股权互换定约

交易日：2010 年 1 月 5 日	假日日历：美国
生效日：2010 年 1 月 11 日	工作日计算预定：随后的工作日

结束日：2015 年 1 月 11 日

股权方

股权付款方：微软

股权方名义面值：1 亿美元

股权指数：S&P 500 总收益

股权指数收益率：$100(I_1 - I_0)/I_0$，其中 I_1 为付款日的指数水平，I_0 为前一个付款日的指数水平。在此例中，第一个付款日的 I_0 为 2010 年 1 月 11 日的指数水平。

股权付款日期：从 2010 年 7 月 11 日开始，直到并且包括 2015 年 1 月 11 日，每年的 7 月 11 日和 1 月 11 日

浮动息方

浮动息付款方：高盛

浮动息方名义面值：1 亿美元

浮动利率：美元 6 月期 LIBOR

浮动利率计天方式：实际天数/360(Actual/360)

浮动息利息付款日期：从 2010 年 7 月 11 日开始，直到并且包括 2015 年 1 月 11 日，每年的 7 月 11 日和 1 月 11 日

对于一个像业界事例 32-3 这样的股权对浮息互换，在刚开始时合约的价值为零。这是因为一个金融机构可以不付任何费用而复制出一方的现金流：在每个支付日期以 LIBOR 利率借取本金，而将其投资于股指，并将所得票息再投资于股指中，直到下一个支付日。类似地，我们可以证明在每个支付日后，互换的价值也是零。

在两个支付日之间，我们必须对下一个支付日的股权现金流和 LIBOR 现金流定价。LIBOR 现金流在上一个重置日就已经被确定，因此可以很容易得到其价值。股权现金流的价值是 LE/E_0，其中 L 是本金。E 是股指目前的取值，而 E_0 是其在上一个重置日的取值。[㊀]

32.6 具有内含期权的互换

一些互换带有隐含期权。本节我们考虑一些常见的例子。

32.6.1 计息互换

计息互换(accrual swap)是一种一方的利息只有在浮动参考利率介于某个区间时才会累计的互换。有时区间会在整个互换期间保持不变，有时会被定期重新设定。

作为计息互换的一个例子，考虑一个在每季度将固定利率 Q 与 3 个月 LIBOR 相交换的交易。我们假定只有当 3 个月 LIBOR 的年率低于 8% 时，固定利率才会累计。假设本金是 L。在一个正常的互换中，在每个支付日固定利率支付方将会付出 QLn_1/n_2，其中 n_1 是前一个季度里的天数和 n_2 是一年里的天数。(这里我们假定计天方式是“实际天数/实际天数”)。在一个计息互换中，这一项变成了 QLn_3/n_2，其中 n_3 是前一个季度里 3 个月 LIBOR 低于 8% 的天数。固定利率支付方在每个当 3 个月 LIBOR 高于 8% 的日子里可以节省 QL/n_2[㊁]。因此可以将固定利率支付方的头寸当成等价于一个普通互换与一系列在互换有效期内每天都有的两点式期权(binary option)之和。当 3 个月 LIBOR 高于 8% 时，两点式期权的收入为 QL/n_2。

为了推广，我们假设 LIBOR 的截止利率是 R_K(在刚才考虑的情形下是 8%)，而且每 τ 年交换一次支付。考虑在互换有效期内的第 i 天，并且假设到第 i 天的时间是 t_i。假设在第 i 天时 τ 年 LIBOR 利率是 R_i，因此当 $R_i < R_K$ 时利息才会累计。定义 F_i 为 R_i 的远期值和 σ_i 为 F_i 的波动率(后者可以从上限单元即时波动率来估计)。利用通常的对数正态分布假设，在一个对于时间 $t_i + \tau$ 到期的零息债券是远期风险中性的世界里，LIBOR 大于 R_K 的概率为 $N(d_2)$，其中

㊀ 关于详细讨论，见作者网页上的技术报告(Technical Note 19)。

㊁ 对于节假日，通常的约定是将有关利率取为上一个业务日的利率。

$$d_2 = \frac{\ln(F_i/R_K) - \sigma_i^2 t_i/2}{\sigma_i \sqrt{t_i}}$$

两点式期权收益被实现的时间是在第 i 天之后的支付日。假设这个时间是 s_i。在一个对于时间 s_i 到期的零息债券是远期风险中性的世界里，LIBOR 大于 R_K 的概率为 $N(d_2^*)$，其中计算 d_2^* 与 d_2 的公式是一样的，只是对 F_i 做一个很小的时间调整来反映时间 $t_i+\tau$ 与时间 s_i 之间的差别。

对应于第 i 天的两点式期权价值为

$$\frac{QL}{n_2}P(0,s_i)N(d_2^*)$$

将互换有效期内每一天上的这个表达式加在一起，即可得到两点式期权的总价值。由于时间调整（使得 d_2 被 d_2^* 代替）非常小，所以在实际中常常被忽略。

32.6.2 可取消互换

可取消互换(cancelable swap)是一个简单的利率互换交易，但其中一方有权决定在某一日期或更多日期上终止交易。终止一个利率互换交易与进入一个反方向利率互换等价。考虑微软与高盛之间的一个互换交易。如果微软有权取消互换，微软的头寸等价于一个普通利率互换与一个进入相反方向互换期权的长头寸组合。如果高盛有权取消互换，微软的头寸等价于一个普通利率互换与一个进入相反方互换期权的短头寸组合。

如果可取消日期只有一个，这时可取消互换等价于一个普通利率互换与一个欧式期权的组合。例如在一个 10 年的利率互换中，微软付出 LIBOR，同时收入 6% 固定利率。假定微软有权在第 6 年末取消利率互换，对于微软而言，这一可取消互换等价于一个收入 6% 固定利率，付出 LIBOR 的普通利率互换，加上一个 6 年期限、进入 4 年期付出 6% 固定利率，收入 LIBOR 的互换期权(此期权被称为 6×4 欧式期权)。我们可以采用第 28 章里的标准互换期权模型来定价。

如果可取消互换可在一系列日期上被取消，此互换等价于一个普通利率互换与一个百慕大期权的组合。例如，微软与某对手进行了一个 5 年互换交易，微软每半年收入 6% 固定利率，同时付出 LIBOR。假定微软的交易对手在 2~5 年的每一个付款日均有权终止互换。对微软而言，此交易等价于一个普通利率互换与一个百慕大期权的短头寸的组合，这一百慕大期权的持有者有权进入在第 5 年终止的，收入固定利率为 6%，同时付出 LIBOR 的利率互换，期权行使日期为 2~5 年的每一个付款日。在第 30 章和第 31 章中，我们曾讨论过如何对百慕大互换期权定价的方法。

32.6.3 可取消复合互换

有时复合互换可以在特定的时期上被终止，浮动利息方支付将浮动利息复合到终止时间的数量，而固定利息方支付将固定利息复合到终止时间的数量。

一些技巧可以被用来对**可取消复合互换**(cancelable compounding swap)定价。首先假设浮动利率为 LIBOR，并按 LIBOR 复利。我们假定在互换有效期末，固定利率方和浮动利率方都收取互换的本金数量。这与考虑普通互换时从表 7-1 到表 7-2 是类似的。这样做并不改变互换的价值，但可以使得浮动利率方的价值在支付日上总是等于本金面值。在决定是否取消互换时，我们只需要注意固定利率方。我们构造一个像在第 30 章中所描述的利率树形，然后由通常在树上以向后倒推的方式计算固定利率方的价值。在每个可以取消互换的节点上，我们检验取消互换还是保留互换为最优。取消互换的效果是将固定利率方设成面值。如果我们支付固定利率而收取浮动利率，目标是将固定利率方的值最小化；如果是收取固定利率而支付浮动利率，目标则是将固定利率方的值最大化。

当浮动利率方为 LIBOR 加上一个利差，而且按 LIBOR 复利时，与其将利差所对应的现金流加在浮动利率方，我们可以将其从固定利率方减去。然后可以像没有利差时那样对期权定价。

当复利是按 LIBOR 加上一个利差时，我们可以利用下面的近似方法处理：[㊀]

- 假设远期利率将被实现，在每个取消日上计算互换中浮动利率方的价值。
- 假设浮动利率是 LIBOR 并按 LIBOR 复利，在每个取消日上计算互换中浮动利率方的价值。
- 在一个取消日上将第一步的结果高于第二步结果的部分定义为“利差值”。
- 将期权按上面所述方法处理。在决定是否取消互换时，从计算的固定利率方价值中减去利差值。

32.7 其他互换

本章讨论的互换仅是所交易的不同类型互换中的少数几种。在实际中，不夸张地说，不同交易产品的范围仅仅受金融工程师的想象力以及公司资金部主管对新兴风险管理工具的胃口的约束。

在20世纪90年代中期，一种在美国较为流行的互换为**指数递减比率互换**(index amortizing swap)[有时也被称为**指数本金互换**(indexed principal swap)]。在此互换中，本金减少的数量与利率水平有关。利率越低，本金的减少程度越大。至少在近似意义上，最初的指数递减比率互换的固定息方等价于住房贷款支持债券的投资收益。对投资者而言，指数递减比率互换可将投资者对住房贷款支持债券的投资收益转化为浮动利息收益。

现在**商品互换**(commodity swap)交易变得越来越流行。一家每年消耗100 000桶原油的公司可以进入一个商品互换，在此互换中，这家公司在今后10年内每年付800万美元，同时收入100 000S，其中S为每桶原油的市场价格。一家原油生产商可能会进入相反的交易，这样原油生产商可以锁定每桶原油80美元的价格。在第33章里我们将讨论能源衍生产品。

在本书的其他章节里我们还讨论了一些其他类型的互换。例如，第23章讨论了资产互换，第24章概括了总收益互换和各种类型的信用违约互换，第25章分析了波动率以及方差互换。

怪异交易

某些互换的收益较为怪异。宝洁与信孚银行在1993年所做的交易就是这类交易的例子(见业界事例32-4)。这一交易在后来成为一起诉讼的焦点[㊁]，其细节在许多公开渠道可以获得。

业界事例32-4　宝洁公司的怪异交易

宝洁公司在1993年11月2日同信孚银行做了一笔被称做“5/30”的离奇互换交易，这一交易期限为5年，每半年会有资金交付，交易的面值为2亿元，信孚银行在交易中付年息为5.3%的固定利率，而宝洁付给信孚银行的利率为30天CP(商业票据)的平均利率减去75个基点再加上某个利差，这里的商业票据平均利率是在利率观测区间内的30天商业票据利率的平均值。

在第一个付款日(1994年5月2日)，利差为零。在接下来的几个付款日，利差为

$$\max\left[0, \frac{98.5\times\left(\frac{5\text{年的期 CMT 利率\%}}{5.78\%}\right)-(30\text{年期的 TSY 价格})}{100}\right]$$

㊀ 这种处理方式并不完全精确，这是因为我们假定了行使取消期权的决定不受将来支付是按不同于 LIBOR 的利率来复利的影响。

㊁ 见 D. J. Smith，“Aggressive Corporate Finance: A Close Look at the Procter and Gamble-Bankers Trust Leveraged Swap.”，*Journal of Derivatives* 4，4(Summer 1997)：67-79。

公式中CMT为固定期限国债利率（此利率是由美国联储报告的5年国债利率），30年期TSY价格是在2023年满期的，券息为6.25%的国债买入价与卖出价的平均值。注意，以上计算公式的计量为百分比，而不是以基点计算。例如以上公式所求得的利差为0.1而CP平均利率为0.06，由此可以算出给信孚银行的利息为0.1+0.06-0.0075=15.25%。

宝洁做此交易时，希望利差大约为负，因此宝洁可将5.3%的固定利率转化为此商业票据减去75个基点的浮动利率。而事实上，在1994年的利率急剧上涨，债券价格急剧下降。这笔交易让宝洁付出了惨重的代价。

小　结

互换已经成为品种繁多的金融产品。许多产品的价格可以由这样来计算：(a)假设LIBOR（或其他浮动参考利率）将会等于它的远期值；(b)将所得现金流由LIBOR/互换利率进行贴现。这包括普通利率互换，大多数的货币互换，本金按预先约定方式变化的互换，双方具有不同支付日期的互换，以及复合互换，等等。

在对互换产品定价时，对某些互换我们需要调整远期利率。这些调整叫做曲率、时间与Quanto调整。需要做这些调整的互换产品包括LIBOR后置互换、CMS/CMT互换以及跨货币互换等。

股权互换涉及将一个股指的收益交换成固定或者浮动利率，它们的设计常常使得其价值在支付日为零，但在支付日之间的价值可能会不为零。

一些互换具有隐含期权。一个计息互换等价于一个普通互换加上一个很多的两点式期权组合（在互换有效期内每天都有一个）。一个可取消互换是一个普通互换加上一个百慕大式的互换期权。

推荐阅读

Chance, D., and Rich, D., "The Pricing of Equity Swap and Swaptions," *Journal of Derivatives* 5, 4 (Summer 1998): 19–31.

Smith D. J., "Aggressive Corporate Finance: A Close Look at the Procter and Gamble–Bankers Trust Leveraged Swap," *Journal of Derivatives*, 4, 4 (Summer 1997): 67–79.

练习题

32.1　计算业界事例32-1中互换的所有固定现金流及其支付时间。假设计量天数惯例是用于目标支付日期而不是实际支付日期。

32.2　假设互换约定固定利率与两倍的LIBOR利率相交换。对这个互换还能利用"假设远期利率将会实现"的规则来定价吗？

32.3　如下2年期的定息对浮息复合互换的价值是多少？互换本金是1亿美元，支付每半年进行一次。互换是收取固定利率而支付浮动利率。固定利率是8%并按8.3%复利（都是每半年复利一次）。浮动利率是LIBOR加上10个基点并按LIBOR加上20个基点的利率复利。LIBOR零息曲线呈水平状，利率为8%，按半年复利。

32.4　在一个5年期的互换中，假定以通常的方式付出的利率为LIBOR，收入的利率为以LIBOR复利的LIBOR利率。双方的本金均为1亿美元。付出LIBOR的频率为6个月，收入LIBOR的复合频率也为6个月。假定利率曲线为水平5%，计算互换价值。

32.5　仔细解释为什么一个银行可能会对货币互换的现金流使用与LIBOR稍微不同的利率贴现。

32.6　在32.4节的例32-3中如果所有上限波

动率是18%而不是20%，5年期互换上所有期权的波动率均为13%而不是15%，计算总的曲率/时间调整。为了计算互换价值，3年时的5年期互换利率应当假设成多少？互换的价值是多少？

32.7 解释为什么普通互换和32.2节里的复合互换可以利用“远期利率将会实现”的规则来定价，但对32.4节里的LIBOR后置互换却不行。

32.8 在书中讨论的计息互换中，只有当浮动利率低于某个水平时固定利率才会累计。讨论如何将分析推广到另一种情形，只有当浮动利率高于某一水平而低于另一水平时才会累计。

作业题

32.9 LIBOR零息利率在美国是水平为5%，而在澳大利亚是水平为10%（均为按年复利）。在一个4年期互换中，收取澳大利亚LIBOR并支付9%，而两个利率均用于1亿美元的本金上。付款每年交换一次。澳大利亚所有一年远期利率的波动率均估计为25%，所有期限的远期美元/澳元汇率（每美元的澳元数）的波动率均为15%，两者之间的相关系数是0.3，互换的价值是多少？

32.10 估计宝洁在32.7节里的5/30互换里所付的利率。假设：CP利率是6.5%，国债收益率曲线是水平为6%；CP利率是7.5%，国债收益率曲线是水平为7%，按半年复利。

32.11 假设你与一个不做曲率调整的不太内行的对手做一笔LIBOR后置互换交易。如想利用这个优势，你会支付固定利率，还是收取固定利率？你会如何构造互换的有效期与付款频率？

考虑以下情形，收益率曲线为水平，利率为10%，按年复利。所有上限波动率均为18%。对有效期分别为5年、10年和20年，付款每年交换一次的LIBOR后置互换，内行交易员和外行交易员所给价值的区别是多少？假设面值本金是100万美元。

32.12 假设LIBOR零息利率曲线是水平为5%，按年复利。在一个5年期互换中，公司X付固定利率6%而收取LIBOR。3年后的2年期互换利率波动率是20%。

(a) 互换的价值是多少？

(b) 如果公司X有权在3年后取消互换，利用DerivaGem计算互换的价值。

(c) 如果对方有权在3年后取消互换，利用DerivaGem计算互换的价值。

(d) 如果双方均有权在3年后取消互换，互换的价值是多少？



第 33 章

能源与商品衍生产品

衍生产品的价值依赖于标的变量。本书到目前为止主要考虑了当标的变量为股票价格、股票指数、汇率、债券价格、利率或信用事件所产生的损失。在本章中，我们考虑一些其他标的变量。

在本章的前半部分我们考虑当标的变量是商品的情形。第 2 章讨论了商品上的期货合约，第 17 章讨论了如何对商品期货合约上的欧式和美式期权定价的问题。当期货合约的到期日与期权到期日相同时，欧式期货合约的收益与欧式即期期权合约的收益相同，因此，可以按对欧式期货期权定价的布莱克模型来对欧式即期期权定价。但是，当期权为美式或其他按很复杂的方式依赖于商品即期价格时，我们就需要使用更复杂的模型来定价。商品价格常常显示均值回归的特征（与利率相似），并且常常具有跳跃性。对一些刻画利率而建立的模型进行改进后可以用在商品价格上。

本章后半部分考虑气候与保险衍生产品。这些衍生产品的一个重要特征是它们依赖某些没有系统风险的变量。例如，对于某个特殊地点的温度期望值或由于飓风所造成的损失，我们可以合理地假设它们在现实世界与风险中性世界里是相同的。这说明对这些类型的衍生产品定价来说，历史数据会有更大用处。

33.1 农产品

农产品包括种植的产品（或由其产生的产品），如玉米、小麦、可可、咖啡、白糖、棉花和冻橙汁；也包括与家畜有关的产品，如黄牛、猪肉和五花肉。与所有商品一样，农产品的价格是由市场供需决定的。美国农业部定期公布贮备与生产的状况。像棉花与小麦这样的农产品，一个被密切关注的统计量是**库存-使用比例**（stocks-to-use ratio），即年终库存量与该年度使用量的比例。一般情况下，这个比例是在 20% ~40% 之间，其对价格波动率有很大影响：如果关于某个商品的这项比例较低，那么商品价格对供应的变化将会很敏感，因此波动率将会上升。

在农产品价格上假设某种均值回归性质是有道理的。当价格下跌时，农场主将会发现生产这种产品不太合算，使得供应下降会对价格产生上涨的压力。与此类似，当某种农产品价格上升时，农场主会将更多的资源用来生产这种产品，从而由于供应的增加而对产品价格产生下降的压力。

农产品价格常常会显示季节性，这是因为储存需要费用，而且产品储存的时间也是有限的。气候是决定大多数农产品的关键因素。冰霜会大面积摧毁巴西咖啡作物，而佛罗里达的飓风很可能会影响冰冻橙汁的价格，等等。农作物商品价格的波动率在收获季节之前往往是最高的，而当产量确定后，波动率就会下降。在作物生长季节，随气候的变化，农产品价格所服从的过程往往显示跳跃性。

许多交易的农作物产品是用来饲养家畜的（例如，CME 集团所交易的玉米期货指明是用来喂

家畜的玉米)。家畜的价格(或在屠宰后的价格)往往会依赖于这些商品的价格，而这些商品的价格则受气候影响。

33.2 金属

另一类重要的商品是金属，包括黄金、白银、铂金、钯、铜、锡、钎、锌、镍和铝。金属与农产品的特征很不一样，其价格不受季节与气候的影响，因为它们是由地下挖出来的，可以化整为零，相对来讲容易储存。有些金属，比如铜，几乎总是用在产品加工上，所以应该分类为消费资产。如 5.1 节所述，持有其他资产(比如黄金与白银)的主要目的为了投资，所以应当分类为投资资产。

与农产品一样，分析师通过关注储存水平来确定短期价格波动率。货币汇率波动也可能会导致价格波动，这是因为开采金属的国家往往不同于报出金属价格的国家。从长远来讲，金属的价格取决于其在不同生产过程中被使用的趋势，以及所发现这种金属的新产源。勘探技术、开采方法、地缘政治、企业联合以及环保政策对金属价格也会有影响。

金属供应的一个可能来源是回收。一块金属可能会用来制造某种产品，在今后 20 年里，由于回收，也许这块金属的 10% 又重新回到市场。

我们一般不假定作为投资资产的金属价格服从均值回归过程，因为均值回归过程将会给投资者一种套利的机会。作为消费资产的金属，有时可以假定其价格具有一些均值回归性质。当一种金属的价格上涨时，在一些生产过程中很可能会避免使用这种金属，而且从困难地方开采这种金属从经济上来讲变得切实可行，这些现象将会对价格产生下降的压力。与此类似，当价格下跌时，在一些生产过程中将会尽量使用这种金属，而且从困难地方开采这种金属将会不再可行，因此将会对价格产生上涨的压力。

33.3 能源产品

能源产品是最重要也是交易最活跃的商品之一。在场外市场和交易所里都有许多种类的能源衍生产品交易。在这里我们将考虑原油、天然气和电能。对于这些产品，有种种理由支持其价格服从均值回归过程的假设。当一种资源的价格上涨时，其消费量很可能会下降，从而对价格产生下跌的压力。当一种资源的价格下跌时，其消费量很可能会上升，从而对价格产生上涨的压力。

33.3.1 原油

原油市场是世界上最大的商品市场，全球需求量大约为每天 8 000 万桶。10 年期的固定价格供油合约已经在场外市场上流行了许多年。这些合约通常是以原油固定价格与浮动价格进行交换。

由于比重与含硫量的不同，原油分成许多等级。对原油定价的两种重要基准是布兰特原油(Brent crude oil，来自北海)和得州轻油(West Texas Intermediate，WTI)。原油会被提炼成诸如汽油、民用燃料油、燃料油和煤油。

在场外市场上，几乎所有以股票或股指作为标的资产衍生产品的形式都有相应的以原油价格作为标的资产的衍生产品。互换、远期合约、期权都很普遍。在这些合约中，有时需要现金交割，有时则需要实物交割(即交付原油)。

交易所里的合约也很流行。CME 集团和洲际交易所(Intercontinental-Exchange，ICE)交易一些原油期货和原油期货期权合约。有些期货合约以现金交割，其他合约以实物交割。例如，ICE 交易的布兰特原油期货有以现金交割的选择，而 CME 集团交易的轻质低硫(light sweet)原油期货则需要以实物交割。在两种情况下，一份合约的标的资产是 1 000 桶原油。CME 集团交易的两种很受欢迎的成品油合约是民用燃料油和汽油。在这两种情况下，一份合约需要交付 42 000 加仑。

33.3.2 天然气

20 世纪八九十年代，在全世界范围内天然气市场经历了放松管制(deregulation)的阶段，政府不再垄断这个市场。现在供应天然气的公司与生产天然气的公司并不一定是一家，供应商面临着满足日常需求的问题。

一种典型的场外市场合约是在一个月内按大致均匀的速度交付指定数量的天然气。在场外市场上，远期合约、期权以及互换合约都有交易。通常，天然气卖方负责将天然气通过管道输送到指定的地点。

CME 集团交易的天然气合约是交付 100 亿英国热量单位(British thermal unit)的天然气。对未被平仓的合约，在交付月内卖出方需要按大致均匀的速度将天然气输送到路易斯安那州的某个指定的枢纽。ICE 在伦敦交易类似的合约。

天然气是建筑物取暖常用的能源，同时也被用来发电，而电力又用在空调设备上。因此，对天然气的需求具有季节性，而且受气候影响。

33.3.3 电力

电力是一种特殊的商品，原因是电力无法储存。[⊖]在任何时刻，对一个地区供电的最大数量是由该地区所有发电厂的最大发电量决定的。在美国，有 140 个所谓控制地区(control area)的区域。在一个控制地区内首先将供需达到平衡，然后再将多余的电力卖给其他控制地区。这些多余的电力形成了电力批发市场，将一个控制地区的电力卖给另一个控制地区的能力取决于两个地区输送电网的容量。由一个地区将电力输送到另一个地区时，电网拥有者会收取费用，而且在输送过程中也会损失能量。

大部分电力用于空调系统，因此对电力的需求(从而其价格)在夏天的几个月中要比在冬天的月份中高得多。由于电力是无法储存的，电力的即期价格有时会发生非常大的变化。酷暑曾经使即期价格在短时间内上涨高达 1 000%。

与天然气一样，电力也经历了放松管制的阶段，政府垄断的现象逐渐消失，而与此相随的是电力衍生产品市场的兴起。目前 CME 集团交易电力价格上的期货合约，而且在场外市场上远期合约、期权以及互换的交易都很活跃。典型的合约(交易所或场外)是指明一方在一个指定的月份内在一个指定的地点按指定的价格接收一定数量兆瓦的电力。在一个 5×8 合约里，在指明的月份内，接收电力的时间是非高峰时间(晚上 11 点到早上 7 点)，每周 5 天(星期 1 到星期 5)。在一个 5×16 合约里，在指明的月份内，接收电力的时间是高峰时间(早上 7 点到晚上 11 点)，每周 5 天。在一个 7×24 合约里，在指明的月份内，接收电力时间是每天昼夜不停。在期权合约里，或者是日行权，或是月行权。在日行权的情形下，期权持有者可以在一个月内的每一天都选择是否行使期权(提前一天通知)而按指定的行使价格接收指定数量的电力。在月行权的情况下，只是在月初决定是否行使期权，而在整个月内按指定的行使价格接收电力。

在电力与天然气市场上，一种有趣的合约是所谓的**摆动期权**(swing option)，也叫**收购付款期权**(take-and-pay option)。在这种合约里，期权持有者在一个月内每天按指定价格必须购买的最多与最少数量的电力是预先指定的，而且在整个月内的最多与最少数量也是预先指定的。在行权月内，期权持有者可以改变(或摆动)购买电力的速度，但一般情况下改变的次数是有限制的。

33.4 商品价格模型

为了对衍生产品定价，我们常常希望在传统风险中性世界里对商品的即期价格建立模型。由

⊖ 有时发电厂会将多余的电力用来将水抽到水电厂的上面，以便将来用来发电。为了储存电力，能做的也就是如此了。

17.7 节我们知道，在这个世界里商品价格在将来的期望值等于其期货价格。

33.4.1 简单过程

我们可以用以下方式对商品价格建立一种简单模型。假设商品价格增长率的期望仅依赖于时间，而且商品价格的波动率是常数，那么商品价格的风险中性过程为

$$\frac{dS}{S} = \mu(t)\,dt + \sigma dz \tag{33-1}$$

而且我们有

$$F(t) = \hat{E}[S(t)] = S(0)e^{\int_0^t \mu(\tau)d\tau}$$

其中 $F(t)$ 是期限为 t 的期货合约价格，$\hat{E}$ 表示在风险中性世界里的期望。于是

$$\ln F(t) = \ln S(0) + \int_0^t \mu(\tau)\,d\tau$$

对两边关于时间求导数将会得到

$$\mu(t) = \frac{\partial}{\partial t}[\ln F(t)]$$

【例 33-1】 假设在 2008 年 7 月末，活牛期货价格如下

（单位：美分/磅）

2008 年 8 月	62.20	2009 年 2 月	63.37
2008 年 10 月	60.60	2009 年 4 月	64.42
2008 年 12 月	62.70	2009 年 6 月	64.40

我们可以利用这些期货价格来估计活牛价格在风险中性世界里的增长率。例如，当使用式(33-1)所示的模型时，在风险中性世界里活牛价格在 2008 年 10 月与 12 月之间的增长率为

$$\ln\left(\frac{62.70}{60.60}\right) = 0.034$$

即每两个月为 3.4%，按连续复利。当按年计算时，相当于每年 20.4%。

【例 33-2】 假设活牛期货价格如例 33-1 所示。一个养殖决策需要现在投资 10 万美元，而且在第 3 个月、第 6 个月和第 9 个月后各支出 2 万美元。投资的效果是在年底能有额外的活牛可以出售。这里的不确定性来源主要有两项：能够用于出售的额外活牛磅数和每磅活牛的价格。活牛磅数的期望值是 30 万。从例 33－1 中我们知道在风险中性世界里，1 年后活牛价格的期望值是每磅 64.40 美分。假设无风险利率是每年 10%，这项投资的价值为（按千美元计）

$$-100 - 20e^{-0.1\times0.25} - 20e^{-0.1\times0.50} - 20e^{-0.1\times0.75} + 300\times0.644e^{-0.1\times1} = 17.729$$

这里我们假定了可以销售的额外活牛的不确定性具有零系统风险，而且可以销售的额外活牛数量与价格之间没有相关性。

33.4.2 均值回归

我们已经介绍过，大多数商品价格服从均值回归过程，价格有被拉回到中心价值的倾向。在描述商品价格 S 所服从的风险中性过程时，比式(33-1)更现实的过程是

$$d\ln S = [\theta(t) - a\ln S]dt + \sigma dz \tag{33-2}$$

这种过程包含了均值回归的性质，而且与第 30 章中对短期利率所假设的过程是类似的。这个过程有时也被写成

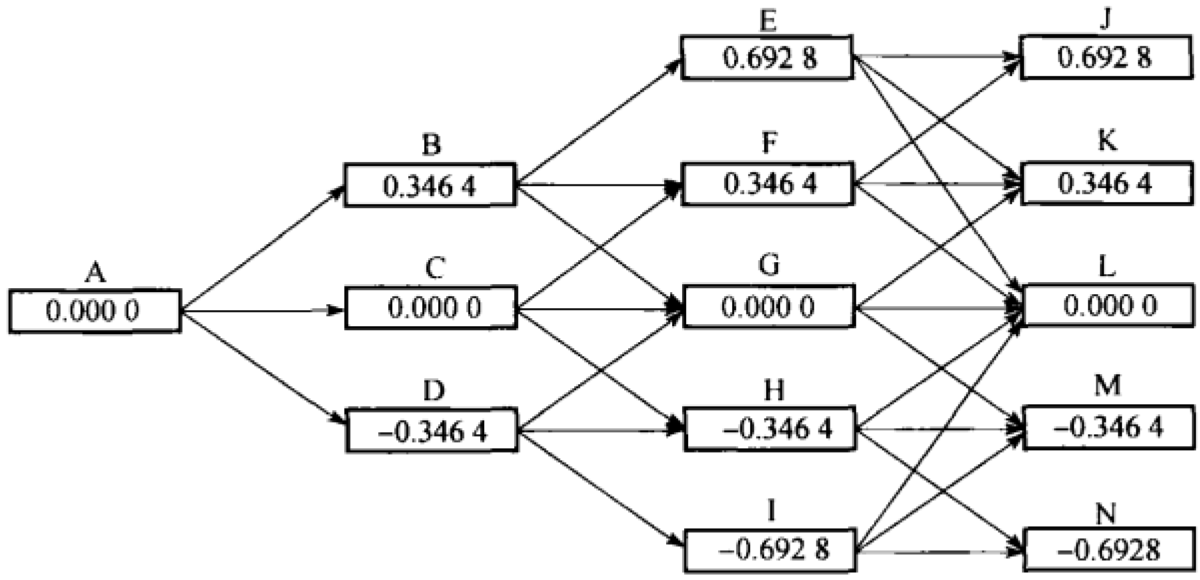
$$\frac{dS}{S}=[\theta^*(t)-a\ln S]dt+\sigma dz$$

由伊藤引理可知这与式(33-2)的过程是等价的，其中 $\theta^*(t)=\theta(t)+\sigma^2/2$。

30.7 节中的三叉树方法可以用来构造 S 的树形，并且由此来确定式(33-2)中使得 $F(t)=\hat{E}[S(t)]$ 的 $\theta(t)$ 值。我们将通过建立关于商品价格的 3 步树型来展示这个构造过程。假设目前商品价格是 20 美元，而且 1 年、2 年和 3 年的期货价格分别是 22 美元、23 美元和 24 美元。假设在式(33-2)中，$a=0.1$ 和 $\sigma=0.2$。我们首先定义初始值为零，并且服从如下过程的变量 X

$$dX=-aXdt+\sigma dz \tag{33-3}$$

利用 30.7 节中的程序，我们可以构造 X 的三叉树，树形显示在图 33-1 中。



节点:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.166 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.886 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.086 7
p_m:	0.666 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6
p_d:	0.166 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.086 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.886 7

图 33-1　X 的树形

注：构造该树是建立即期商品价格 S 树形的第一步，这里 p_u，p_m 和 p_d 是从一个节点向"上"、"中"和"下"移动的概率。

变量 $\ln S$ 服从与 X 同样的过程，只是它具有依赖时间的漂移项。与 30.7 节相似，通过变动节点的位置，我们可以将 X 的树型转换成关于 $\ln S$ 的树型，所得结果展示在图 33-2 中。最初的节点对应于目前的商品价格 20，因此节点的变动是 ln20。假设在 1 年时间节点上的变动为 α_1。X 在 1 年时 3 个节点上的值是 +0.346 4，0 和 −0.346 4。所以相应的 $\ln S$ 值是 $0.3464+\alpha_1$、α_1 和 $\alpha_1-0.3464$。因此 S 的值分别是 $e^{0.3464+\alpha_1}$、e^{α_1} 和 $e^{-0.3464+\alpha_1}$。我们需要令 S 的期望值等于期货价格。这意味着

$$0.1667e^{0.3464+\alpha_1}+0.6666e^{\alpha_1}+0.1667e^{-0.3464+\alpha_1}=22$$

这个方程的解是 $\alpha_1=3.071$。这说明 S 在一年时的值分别为 30.49、21.56 和 15.25。

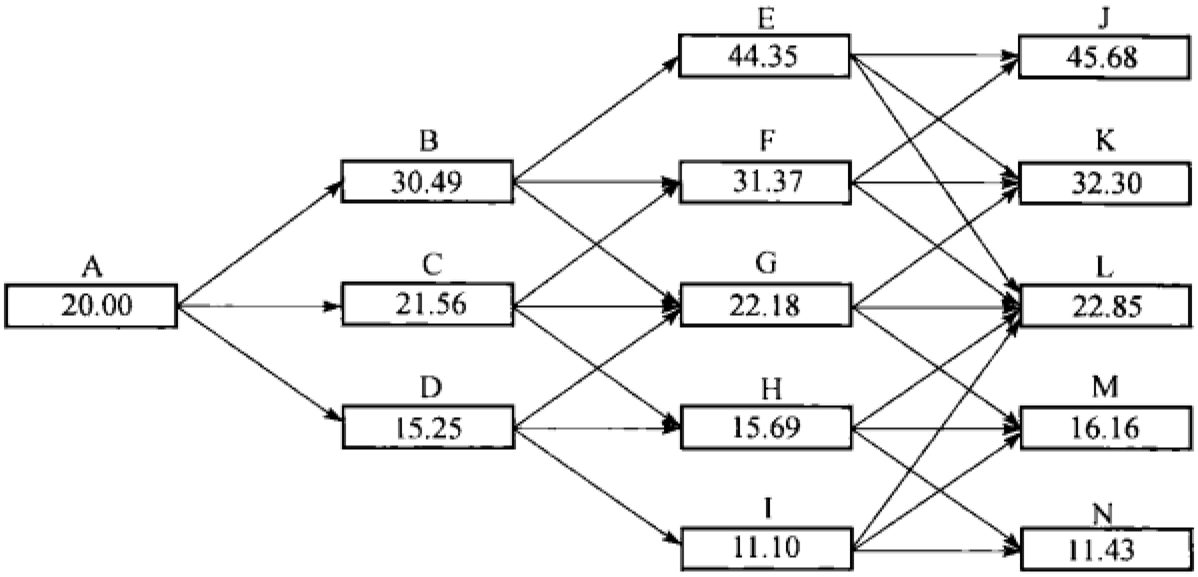
在 2 年的时间点上，我们首先通过到达节点 B、C 和 D 的概率来计算到达节点 E、F、G、H 和 I 的概率。到达节点 F 的概率等于到达节点 B 的概率乘以从 B 到达 F 的概率，再加上到达节点 C 的概率乘以从 C 到达 F 的概率，即

$$0.1667\times0.6566+0.6666\times0.1667=0.2206$$

与此类似，到达节点 E、G、H 和 I 的概率分别是 0.020 3、0.518 3、0.220 6 和 0.020 3。在 2 年的时间点上，节点变动的数量 α_2 必须满足

$$0.0203e^{0.6928+\alpha_2}+0.2206e^{0.3464+\alpha_2}+0.5183e^{\alpha_2}+0.2206e^{-0.3464+\alpha_2}+0.0203e^{-0.6928+\alpha_2}=23$$

其解 $\alpha_2=3.099$。这说明 S 在 2 年时的值分别为 44.35、31.37、22.18、15.69 和 11.10。在第 3 年时，我们可以做类似的计算。图 33-2 展示了所计算出的 S 树形。

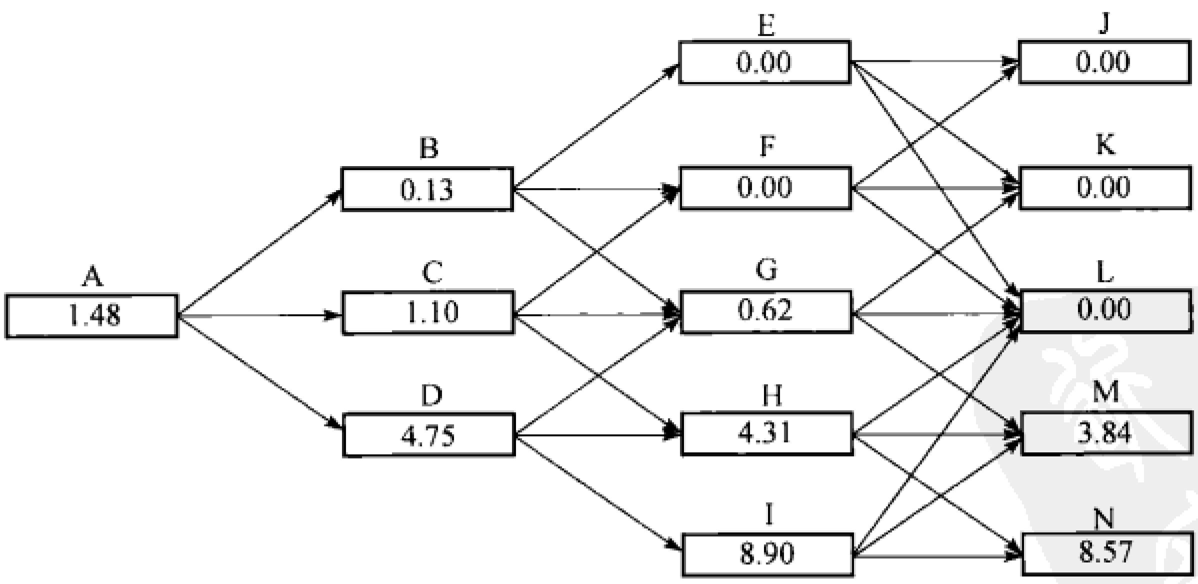


节点:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.166 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.886 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.086 7
p_m:	0.666 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6
p_d:	0.166 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.086 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.886 7

图 33-2 即期商品价格 S 的树形

注：p_u，p_m 和 p_d 是从一个节点向“上”、“中”和“下”移动的概率。

【例 33-3】 假如我们利用图 33-2 中的树形对即期商品价格上的 3 年期美式看跌期权定价，执行价格为 20，利率为每年 3%（连续复利）。在树形上以通常的方式向后计算，我们得到图 33-3，期权的价值是 1.48 美元。在节点 D、H 和 I 上，期权会被提前行使。如果需要更精确的值，我们可以利用更多步数的树形。在更多步数的树形上，我们可以通过对期货价格进行插值来得到对应于树形上每一步的期货价格。



节点:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.166 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.886 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.086 7
p_m:	0.666 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6
p_d:	0.166 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.086 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.886 7

图 33-3 利用图 33-2 中树形对执行价格为 20 美元的欧式看跌期权定价

33.4.3 插值与季节性

当使用许多步数的树形时，我们需要在期货价格之间进行插值来得到相对于每一步末的期货价格。当价格呈现季节性时，插值的方式应当反映这种特点。假设我们需要的时间步长等于一个月，兼容季节性的一种简单做法是收集每月的即期价格历史数据，并计算价格的12月移动平均。然后可以计算一个**季节性因素百分比**(percentage seasonal factor)，这个值等于一个月内即期价格与即期价格(大约)以本月为中心的12个月移动平均之比的平均值。

然后利用季节性因素百分比来消除已知期货价格中的季节性，相对于每个月消除季节性后的期货价格可以利用插值来得到。然后再利用季节性因素百分比将季节性加回到这些期货价格里，并且由此建立树形。例如，假设在市场上观察的9月份与12月份期货价格分别为40和44，我们需要计算10月份与11月份的期货价格。再假设由历史数据计算出的9月份、10月份、11月份和12月份的季节性因素百分比分别为0.95、0.85、0.8和1.1。消除季节性后的期货价格为：9月份 $40/0.95=42.1$ 和12月份 $44/1.1=40$。由插值得到的10月份与11月份消除季节性后的期货价格分别为41.4与40.7。在构造树形时所用的10月份与11月份加上季节性后的期货价格分别为 $41.4\times0.85=35.2$ 和 $40.7\times0.8=32.6$。

像我们讲过的那样，有时商品价格的波动会呈现季节性。例如，由于气候的不确定性，某些农产品价格在作物生长季节波动性较大。我们可以利用第22章里所讨论的方法来检测波动率，而且对于波动率我们可以估计相应的季节性因素百分比。从而在式(33-2)与式(33-3)我们可以将参数 σ 换成 $\sigma(t)$。当波动率是时间函数时，对其构造三叉树形的步骤在网页 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes 里的 Technical Note 9 和 16 里有详细讨论。

33.4.4 跳跃

由于受气候相关的需求影响，有些商品的价格，比如像电力和天然气，显示出跳跃的特征。而另外一些商品，尤其是农产品，由于和气候有关的供应影响，价格也往往会显示跳跃。我们可以在式(33-2)中引入跳跃项，从而即期价格所服从的过程变成了

$$d\ln S=[\theta(t)-a\ln S]dt+\sigma dz+dp$$

其中 dp 是生成百分比跳跃的柏松过程。这与在26.1节里描述股票价格的默顿混合跳跃-扩散模型相似。一旦跳跃频率与跳跃大小的概率分布被选定后，我们可以计算在将来时间 t 由于跳跃所引起的商品价格平均增长幅度。为了确定 $\theta(t)$，将到期日为 t 的期货价格中减去这个增长量之后，我们可以利用三叉树方法。如20.6节与26.1节所述，蒙特卡罗模拟方法可以用来实现这种模型。

33.4.5 其他模型

有时人们使用更加复杂的模型来描述原油价格。如果 y 表示方便收益率，那么即期价格的比例漂移项为 $r-y$，其中 r 为短期无风险利率。即期价格的过程为

$$\frac{dS}{S}=(r-y)dt+\sigma_1 dz_1$$

Gibson 和 Schwartz 建议将方便收益率作为一个具有均值回归性质的过程

$$dy=k(\alpha-y)dt+\sigma_2 dz_2$$

其中 k 和 α 为常数，dz_2 和 dz_1 是相关的维纳过程。为了能够与期货价格达到完全匹配，我们假定 α 是时间 t 的函数。

对于天然气与电力价格，Eydeland 和 Geman 提出了如下形式的随机波动率模型

$$\frac{dS}{S}=a(b-\ln S)dt+\sqrt{V}dz_1$$

$$dV = c(d - V)dt + e\sqrt{V}dz_2$$

其中 a，b，c，d 和 e 均为常数，dz_2 和 dz_1 是相关的维纳过程。后来，在假定 b 也是随机时，Geman 将这种过程用来描述原油的价格。

33.5 气候衍生产品

许多公司的业绩表现都可能会受到气候的影响。[⊖]对这些公司而言，像对冲其外汇风险或利率风险一样来对冲气候风险的做法是有道理的。

场外市场上的第一种气候衍生产品是在 1997 年引进的。为了理解产品的运作，我们首先解释两个变量：

HDD：升温天数

CDD：降温天数

一天的 HDD 定义成

$$HDD = \max(0, 65 - A)$$

而一天的 CDD 定义成

$$CDD = \max(0, A - 65)$$

其中 A 是在当天某个指定的气象站处最高与最低温度的平均(计量单位为华氏度)。例如，如果在一天内(子夜到子夜之间)的最高温度是 68 华氏度，而最低温度是 44 华氏度，这时 $A = 56$，因此这一天的 HDD 为 9，CDD 为 0。

场外市场上的典型衍生产品是收益依赖于在一个月内的累积 HDD 或 CDD 的远期合约或期权。例如，某衍生产品交易商可能在 2011 年 1 月份卖给客户如下形式的期权：期权的标的变量是在芝加哥奥黑尔(O'Hare)机场气象站 2012 年 2 月份的累积 HDD，执行价格是 700，每一度/天所对应的收益为 1 万美元。如果实际的累积 HDD 为 820，那么收益将为 120 万美元。在合约里常常含有收益上限。如果在我们的例子中收益上限为 150 万美元，该合约与牛市差价是等价的(见第 11 章)：客户持有变量 HDD 上执行价格为 700 的看涨期权长头寸与执行价格为 850 的看涨期权短头寸。

一天的 HDD 是度量在一天内取暖所需要的能源，一天的 CDD 是度量在一天内降温所需要的能源。大多数气象衍生产品合约是在能源生产商与客户之间签订的。但是零售商、连锁超市、食品与饮料加工、卫生服务、农产品公司以及娱乐行业都是气候衍生产品的潜在用户。气候风险协会(The Weather Risk Management Assocaition，见 www.wrma.org)的成立是为了向气候风险管理行业提供服务。

在 1999 年 9 月，芝加哥商品交易所开始交易气候期货与气候期货上的欧式期权。合约的标的变量是在某个气象站所观察的某个月的累积 HDD 和 CDD。在月底一旦知道了 HDD 与 CDD 后，合约马上按现金形式交割。一份期货合约的大小是 20 乘以当月初的累积 HDD 与 CDD。目前 CME 为世界各地 42 个城市提供气候期货与期权，而且也提供在飓风、结霜、降雪上的期货与期权。

33.6 保险衍生产品

当衍生产品合约用于对冲目的时，它们有许多与保险合约相同的特征。两种合约的设计都是为了对不利事件提供保护，因此并不令人惊奇的是，许多保险公司都有附属部门进行衍生品交易，而且保险公司的许多业务与投资银行非常相似。

在对冲像飓风和地震这样的灾难性(CAT)风险暴露时，保险业传统的做法是进行所谓的**再保险**(reinsuarance)。再保险合约有多种形式。假设某保险公司对加州地震有 1 亿美元的风险暴露，

⊖ 美国能源部曾估计大约 1/7 的美国经济受到气候影响。

但希望将暴露降低到3 000 万美元。一种做法以每年签订保护按比例70% 风险暴露的再保险合约。如果在某一年内加州地震的赔偿总数是5 000 万美元，那么对公司的费用仅有1 500 万美元。另一种更流行的方法可以降低再保险费用，即购买一系列覆盖所谓**超额损失层**(excess cost layers)的再保险合约。第一层可能对3 000万 ~4 000 万美元之间的损失提供保障；下一层则可能会覆盖4 000 万 ~5 000 万美元之间的损失，等等。每个再保险合约都叫做**超额损失**(excess-of-loss)再保险合约。再保险提供者卖出了总损失上的牛市差价，即执行价格等于损失层低端值的看涨期权长头寸和执行价格等于损失层高端值的看涨期权短头寸。⊖

在传统上，CAT 再保险的主要提供者是一些再保险公司与劳埃德集团(Lloyds syndicates，即由富人构成的无限责任集团)。近年来，保险业意识到再保险的需要完全超出了这些传统来源，并且开始寻找使资本市场提供再保险的新途径。1992 年发生的安德鲁飓风(Hurricane Andrew)促使保险业对自己的运作方式进行反思。这次飓风在佛罗里达造成的保险损失高达150 亿美元，这比在佛罗里达州之前7 年内所收的相关保险费用还要高。假如安德鲁飓风也袭击到迈阿密市的话，保险损失会高达400 亿美元。由于像安德鲁飓风与其他一些灾害性事件的发生使保险/再保险的费用急剧上涨。

在场外市场上出现了一些代替传统再保险的产品，其中最受欢迎的是CAT 债券。CAT 是由保险公司的附属机构发行的债券，其利息比普通债券要高。与高利息相交换的是债券持有人同意一种提供对超额损失再保险的合约。由债券的条款决定，债券的利息或本金(或两者)可以用来支付赔偿。在上面的例子里，一家保险公司希望对加州地震所造成的在3 000 万 ~4 000 万美元之间的损失进行保护，这时保险公司可以发行面值为1 000 万美元的CAT 债券。当由于加州地震对保险公司所造成的损失超过3 000 万美元时，债券持有人将会损失一部分甚至全部本金。另一种覆盖这个超额损失层的做法是保险公司发行很大数量的债券，使得只有债券的利息受到影响。

33.7 气候与保险衍生产品定价

气候与保险衍生产品的一个明显特点是产品的收益中没有系统风险(即在市场上给予补偿的风险)，这说明由历史数据所得到的估计值同样也可以用于风险中性世界里。因此，气候与保险衍生产品可以通过以下方式定价：

- 利用历史数据估计收益的期望值。
- 按无风险利率对收益的期望值贴现。

气候与保险衍生产品的另一个关键特征是标的不确定性随时间增长的方式。对于股票价格，不确定性的增长大致与时间的平方根成正比。股票价格在4 年内的不确定性(以价格对数值的标准差来度量)大致是一年价格不确定性的2 倍。对于商品价格，尽管有均值回归性质的作用，但是在4 年内的不确定性(以价格对数值的标准差来度量)仍然比在一年内的不确定性高很多。对于气候，不确定性随时间的增长就很不明显。某个地点在4 年后2 月份的HDD 比在同一地点1 年后2 月份的HDD 不确定性会稍稍高一些。与此类似，对4 年后开始一段时间里由于地震所造成损失的不确定性只是比与1 年后开始类似一段时间里由于地震所造成损失的不确定性稍高一些。

我们现在考虑对累积HDD 上期权的定价问题。我们可以搜集50 年历史数据，并由此来估计HDD 的概率分布。这些数据可以用于吻合对数正态或者其他的概率分布，然后可以计算收益的期望值，将其按无风险利率贴现即可得出期权的价值。通过分析历史数据的趋向与考虑气象学家的预测，我们可以对这里的分析加以改进。

⊖ 有时再保险的形式也可能是当损失达到某个水平时提供一笔支付，此时保险提供者卖出了在损失上的现金或空手二项看涨期权。

【例 33-4】 考虑以芝加哥奥黑尔机场气象站的累积 HDD 做标的资产，期限为 2013 年 2 月，执行价格为 700 的看涨期权，每一度/天支付 1 万美元。假设从历史数据估计的 HDD 服从对数正态分布，均值为 710，HDD 自然对数的标准差等于 0.07。由式(14A-1)，收益期望值为

$$10\,000 \times [710N(d_1) - 700N(d_2)]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(710/700) + 0.07^2/2}{0.07} = 0.237\,6$$

$$d_2 = \frac{\ln(710/700) - 0.07^2/2}{0.07} = 0.167\,6$$

即 250 900 美元。假设无风险利率为 3%，所考虑期权的定价时间是 2012 年 2 月份(离到期日还有一年)。期权的价值是

$$250\,900 \times e^{-0.03 \times 1} = 243\,400$$

即 243 400 美元。

我们可以调整 HDD 的概率分布趋向。假设通过线性回归我们发现，2 月份的 HDD 以每年 0.5 的速度下降(也许是因为全球变暖的结果)，因此对 2013 年 2 月份的 HDD 估计只有 697。将收益自然对数的标准差保持不变，这样将收益期望值降至 180 400 美元，期权的价值为 175 100 美元。

最后，假设气候专家预测 2013 年的 2 月份很可能比较暖和，这时应当降低对 HDD 期望值的估计，从而期权的价值会降低。

在保险方面，Litzenberger 等人证明了 CAT 债券的收益与股票市场没有明显的相关性(这与我们想象的是一样的)。这也印证了气候衍生品中没有系统风险，而且定价时可以利用保险公司所收集的精算数据来进行。

CAT 一般会对高于通常水平的利率赋予很高的概率，对特大损失赋予低概率。投资者为什么会对这种证券感兴趣呢？答案是这种证券的收益期望(考虑到可能的损失后)比无风险投资的收益要高。然而，在一个很大的组合里，CAT 债券的风险(至少在理论上)可以完全得到分散，因此 CAT 债券具有改进风险-收益均衡关系的可能性。

33.8 能源生产商如何对冲风险

能源生产商面临两类风险：一类是与能源市场价格有关的风险(价格风险)，另一类是与能源被购买数量有关的风险(数量风险)。虽然价格会随着数量变化进行调节，但两者之间的关系并非完美。在构造对冲决策时，能源生产商必须将这两种风险都考虑在内。价格风险可以利用本章所讨论的能源衍生产品进行对冲，而数量风险则可以用气候衍生产品进行对冲。定义：

Y——一个月的盈利；

P——一个月的平均能源价格；

T——一个月的相关气温变量(HDD 或 CDD)。

能源生产商可利用历史数据来得到一个最佳拟合线性回归方程：

$$Y = a + bP + cT + \varepsilon$$

其中 ε 为误差项。能源生产商因此可以进入数量为 $-b$ 的能源远期合约或期货合约以及数量为 $-c$ 的气候远期合约或期货合约来对冲风险。以上关系式也可以用于分析其他期权策略的有效性。

小 结

当需要控制和管理风险时，衍生产品市场在开发新产品以满足客户需求方面有很强的创造力。

有许多不同形式的商品衍生品，标的变量可以是地里种植的农产品、家畜、金属以及能源产

品。在对它们定价的模型里通常会包括均值回归，有时会明确考虑季节性并使模型包括跳跃项。原油、天然气以及电力作为标的变量的能源衍生产品尤其重要，对这些产品定价的模型与描述股票价格、汇率以及利率所用的模型一样复杂。

在气候衍生产品市场，HDD 和 CDD 两个测度可以用来描述一个月内的天气温度。这些测度可以用来描述交易所交易与场外市场衍生产品的最终收益。毫无疑问，随着气候衍生产品的发展，在今后我们将会看到有关降雨、降雪以及其他气候变量的衍生产品。

保险衍生产品已经逐渐开始取代传统的再保险合约。这些产品为保险公司管理像飓风和地震等这样的灾难性风险提供了工具。毫无疑问，将来我们将会看到其他保险产品(例如，人寿保险以及汽车保险)会以类似的方式进行交易。

在气候和保险衍生产品中，标的变量里没有系统风险。这意味着我们可以采用历史数据法来计算收益期望，并利用无风险利率对收益进行贴现以求得衍生产品的价值。

推荐阅读

On commodity derivatives

Clewlow, L., and C. Strickland. *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*. Lacima Group, 2000.

Edwards, D.W. *Energy, Trading, and Investing: Trading, Risk Management and Structuring Deals in the Energy Markets*. Maidenhead: McGraw-Hill, 2010.

Eydeland, A., and H. Geman. "Pricing Power Derivatives," *Risk* (October 1998): 71–73.

Eydeland, A., and W. Krzysztof. *Energy and Power Risk Management*. Hoboken, NJ: Wiley, 2003.

Geman, H. *Commodities and Commodity Derivatives: Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals, and Energy*. Chichester: Wiley, 2005.

Gibson, R., and E. S. Schwartz. "Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims," *Journal of Finance*, 45 (1990): 959–76.

On weather derivatives

Arditti, F., L. Cai, M. Cao, and R. McDonald. "Whether to Hedge," *RISK: Supplement on Weather Risk* (August 1999): 9–12.

Cao, M., and J. Wei. "Weather Derivatives Valuation and the Market Price of Weather Risk," *Journal of Futures Markets*, 24, 11 (November 2004), 1065–89.

Hunter, R. "Managing Mother Nature," *Derivatives Strategy* (February 1999).

On insurance derivatives

Canter, M.S., J.B. Cole, and R.L. Sandor. "Insurance Derivatives: A New Asset Class for the Capital Markets and a New Hedging Tool for the Insurance Industry," *Journal of Applied Corporate Finance* (Autumn 1997): 69–83.

Froot, K.A. "The Market for Catastrophe Risk: A Clinical Examination," *Journal of Financial Economics*," 60 (2001): 529–71.

Froot, K.A. *The Financing of Catastrophe Risk*. Chicago: University of Chicago Press, 1999.

Geman, H. "CAT Calls," *Risk* (September 1994): 86–89.

Hanley, M. "A Catastrophe Too Far," *Risk Supplement on Insurance* (July 1998).

Litzenberger, R.H., D.R. Beaglehole, and C.E. Reynolds. "Assessing Catastrophe Reinsurance-Linked Securities as a New Asset Class," *Journal of Portfolio Management* (Winter 1996): 76–86.

练习题

33.1 HDD 与 CDD 的含义是什么？

33.2 典型的天然气远期合约是如何构造的？

33.3 对于衍生产品定价，历史数据法和风险中性之间的区别是什么？在哪种情形下，

两种方法得出的结果是一致的？

33.4 假定在 7 月份每一天的最低温度为 68 华氏度，最高温度为 82 华氏度，一个关于 7 月份累积 CDD，执行价为 250 的期权收益为多少？假定每一度/天的收益为 5 000 美元。

33.5 为什么电力价格的波动率比其他能源价格的波动率要大？

33.6 为什么我们可以采用历史数据法来计算气候衍生产品和 CAT 债券的价格？

33.7 “HDD 与 CDD 可以被看成是以温度为标的变量的期权收益。”解释这一观点。

33.8 假定你有过去 50 年有关温度的数据可以使用，仔细解释如何由此数据来计算对于某一个月累积 CDD 的远期合约价格。

33.9 你认为一年期限的原油远期合约价格波动率是会大于还是会小于现期市场价格的波动率？解释你的观点。

33.10 具有较高波动率和较强均值回归性质的能源价格特点是什么？给出这种能源的一个例子。

33.11 能源制造商如何利用衍生产品来对冲风险？

33.12 解释 2009 年 5 月依每天行使的 5 × 8 电力期权运作方式。解释 2009 年 5 月依月行使的 5 × 8 期权的运作方式。哪一个期权价值更高？

33.13 解释 CAT 债券的运作方式。

33.14 假定两个券息、期限和价格均相同的债券，其中一个公司债券信用评级为 B，另一个债券为 CAT 债券。由历史数据所做的推断显示出在今后每一年这两个债券的损失期望都相等。这时你会建议交易组合经理去购买哪一个债券，为什么？

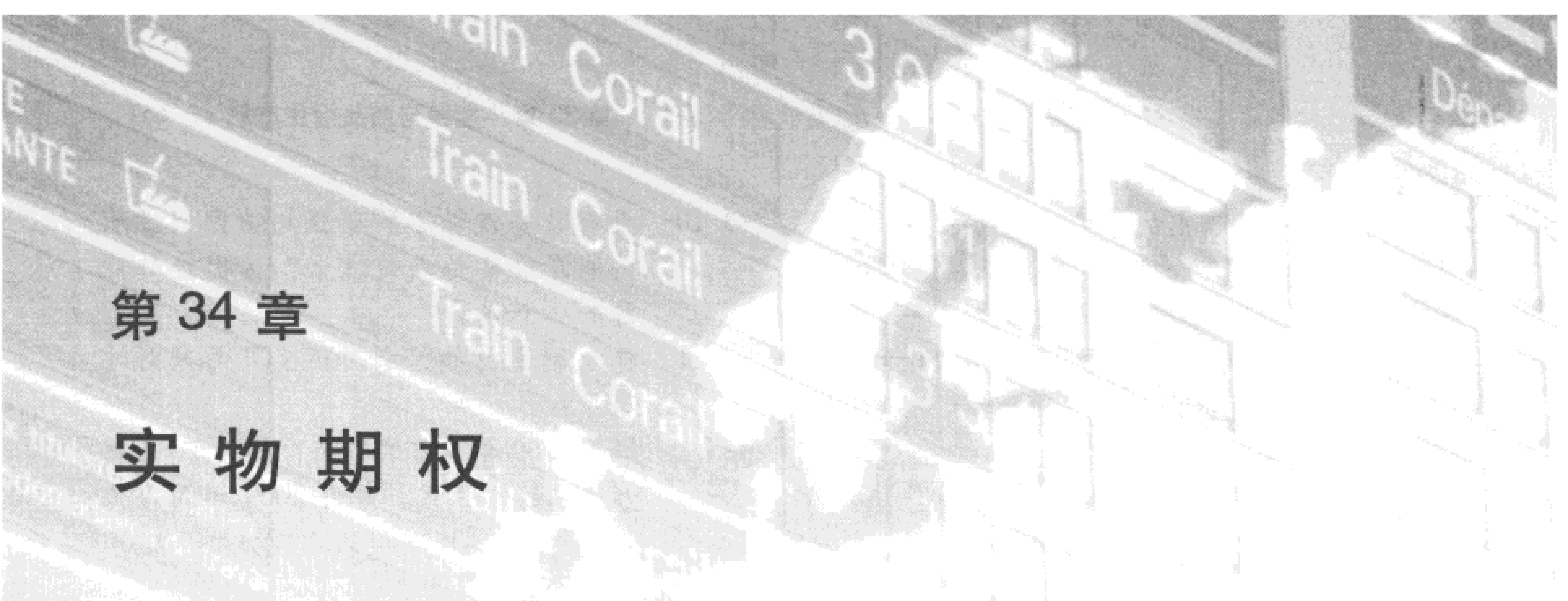
作业题

33.15 一家保险公司的某项保险损失可以用正态分布来描述。正态分布的期望值为 1.5 亿美元，标准差为 5 000 万美元(假定风险中性损失与现实世界损失没有区别)。一年无风险利率为 5%，解释在以下几种情形下保险合约的费用：

(a) 在一年后支付占保险公司整体费用比例为 60% 的合约。

(b) 在一年后如果损失超出 2 亿美元，保险赔偿为 1 亿美元的保险合约。

33.16 当 1 年期与 2 年期的期货价格分别为 21 美元和 22 美元(而不是 22 美元和 23 美元)时，如何调整图 33-2 中的图形？这对例 33-3 中的美式期权价格有什么影响？



第 34 章

实 物 期 权

到现在为止，我们所关心的问题几乎全是对金融资产的定价。本章我们探讨如何将这些方法推广到对于实物资产的资本投资机会的评估上，这里的实物资产包括土地、建筑、厂房以及设备。由于在这些投资机会中常常含有隐含期权(像扩大投资的权利、放弃投资的权利、推迟投资的权利，等等)，利用传统的资本投资评估技巧对这些期权定价是非常困难的。一种称为**实物期权**(real option)的方法试图利用期权定价理论来处理这些问题。

在本章中，我们首先解释传统方法是如何对实物资产投资进行评估的，并说明为什么利用这种方法对隐含期权估价会非常困难。我们将解释如何把风险中性定价方法推广到处理实物资产定价的问题上，并且利用几个例子来展示在不同情形下如何使用这种风险中性定价方法。

34.1 资本投资评估

对资本投资项目评估的传统处理方式是“**净现值**”(net present value，NPV)法。一个项目的NPV是其未来预期现金流增值的贴现值。计算贴现值所用的贴现率是一种经过“风险调整”(risk-adjusted)的贴现利率，它的选取反映了项目的风险程度。项目风险越大，贴现率也会越高。

作为例子，考虑一项费用为1亿美元而延续5年的投资。预期每年的现金流入估计为2 500万美元。如果经过风险调整后的贴现率是12%(连续复利)，那么投资的净现值(以百万计)是

$$-100+25e^{-0.12\times1}+25e^{-0.12\times2}+25e^{-0.12\times3}+25e^{-0.12\times4}+25e^{-0.12\times5}=-11.53$$

净现值为负值表明了承担这个项目的结果将会降低公司对股东的价值，因此不应投资这一项目。而正的净现值则表明应当投资这个项目，因为这样做的结果将会增加股东的财富。

风险调整后的贴现率应当是公司(公司的股东)投资所需求的收益。它可以通过许多方式来计算。经常被推荐的一种方法是利用资本资产定价模型(capital asset pricing model，CAPM)。步骤如下：

- 选取一些主要业务与所考虑项目类似的公司。
- 计算这些公司的Beta，并将它们的平均值来作为项目Beta的近似。
- 将所需求的收益率设为无风险利率加上项目Beta乘上市场收益率超过无风险利率的部分。

利用传统NPV方法所遇到的一个难题是许多项目都含有隐含期权。例如，某个公司在考虑建造一个工厂来加工一项新产品，当情况不如预先想象的那么好时，公司常常有放弃这个项目的权利；而当市场上对其新产品的需求超出预料时，公司同样有扩大工厂的权利。这些权利常常具有与基本项目很不相同的风险特征，因此，在定价时需要使用不同的贴现率。

为了理解这里的问题，考虑在第12章开头给出的例子。这时，股票的当前价格为20美元，在3个月后价格可能是22美元也可能是18美元。风险中性定价说明了股票上，执行价格为21美元、期限为3个月的看涨期权价值为0.663。第12章开始的第一个页下注说明，如果在现实世界

里投资者对股票所需求的预期收益率是16%，那么相应的对期权所需求的预期收益率将会是42.6%。类似的分析表明，如果这是个看跌期权而不是看涨期权的话，对期权所需求的预期收益率将会是-52.5%。这些分析意味着，如果利用传统的净现值方法对看涨期权定价，正确的贴现率应当是42.6%；而对看跌期权定价时，正确的贴现率应当是-52.5%。对于这些贴现率，我们没有什么简单的办法来估计(这里可以求得这些贴现率的原因是因为我们可以用别的方法对期权定价)。与此类似，对由于放弃、扩大以及其他权利所产生的现金流，也没有容易的办法来估计适当的经风险调整的贴现率。这正是我们探讨能否将通常的金融资产期权上的风险中性定价原理用在实物资产期权上的动机。

利用NPV方法的另一个难题是如何计算适用于基本项目(即没有隐含期权的项目)贴现率。上面三步程序中用来计算Beta的公司本身也都应具有自己的扩大和放弃一些项目的权利，在它们的Beta里已经反映了这些期权信息，因此这些公司并不一定适用于估计基本项目的Beta。

34.2 风险中性定价的推广

在27.1节里，我们定义一个变量θ的风险市场价格为

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{34-1}$$

式中r是无风险利率，μ是仅依赖于θ的可交易证券收益率，σ是它的波动率。如27.1节所示，对任何仅依赖于θ的可交易证券都会得到同样的风险市场价格λ。

假设某个实物资产依赖于一些变量$\theta_i (i=1, 2, \cdots)$。令$m_i$和$\sigma_i$分别为$\theta_i$的增长率期望和波动率，于是

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i dt + s_i dz_i$$

式中z_i是一个维纳过程。定义θ_i的风险市场价格为λ_i。可以通过推广风险中性定价原理来证明对任何依赖于θ_i的资产，我们都可以利用以下方式来定价[⊖]。

- 将每个θ_i的预期增长率从m降到$m-\lambda s$。
- 用无风险利率对现金流进行贴现。

【例34-1】 在某个城市里，租用商品房产的费用是按新签署的5年租用合同中每平方英尺每年所付款项来报价的。目前，每平方英尺的费用为30美元。费用的增长率期望为每年12%，波动率为每年20%，它的风险市场价格为0.3。某公司有如下机会：它可以现在付100万美元而有权在2年后按每平方英尺35美元的费用租用100 000平方英尺，租期为5年。无风险利率是每年5%(假定是常数)。定义V为两年后所报出的每平方英尺写字楼空间的费用。为简化运算，我们假设每年都是预先交付租金。期权的收益是

$$100\,000\, A\max(V-35, 0)$$

其中A是由下式所给出的摊还因子

$$A = 1 + 1\times e^{-0.05\times1} + 1\times e^{-0.05\times2} + 1\times e^{-0.05\times3} + 1\times e^{-0.05\times4} = 4.535\,5$$

因此在风险中性世界里收益的期望值为

$$100\,000 \times 4.535\,5 \times \hat{E}[\max(V-35,0)] = 453\,550 \times \hat{E}[\max(V-35,0)]$$

⊖ 为了说明与风险中性定价的一致性，假定θ_i为一个无股息股票，因为θ_i为交易证券，式(34-1)意味着$(m_i - r)/s_i = \lambda_i$，或$m_i - \lambda_i s_i = r$。因此，对增长率期望的调整等价于将股票收益设定为无风险利率。关于一个更为一般结果的证明，见网页 www.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes 里的Technical Note 20。

其中$\hat{E}$表示在风险中性世界里的期望。利用式(14A-1)，我们得出以上表达式等价于

$$453\,550[\hat{E}(V)N(d_1)-35N(d_2)]$$

其中

$$d_1=\frac{\ln[\hat{E}(V)/35]+0.2^2\times 2/2}{0.2\sqrt{2}}$$

$$d_2=\frac{\ln[\hat{E}(V)/35]-0.2^2\times 2/2}{0.2\sqrt{2}}$$

在风险中性世界里，商业房产费用的增长率期望是$m-\lambda s$，其中m是现实世界里的增长率，s是波动率，λ是风险市场价格。在这里，$m=0.12$，$s=0.2$和$\lambda=0.3$，于是风险中性增长率期望是0.06，或每年6%。因此$\hat{E}(V)=30e^{0.06\times 2}=33.82$。将此代入上面表达式中，我们即可得到在风险中性世界里收益的期望值是110.15万美元。以无风险利率贴现后，期权的价值为$150.14e^{-0.05\times 2}=135.86$万美元，这说明为这个期权支付100万美元是划算的。

34.3 估计风险市场价格

利用实物期权的方法来评估投资可以使我们避免像33.1节中所述的那样去估计风险调整后的贴现率，但需要估计所有随机变量的风险市场价格参数。当一个特定变量存在历史数据时，我们可以用资本资产定价模型来估计它的风险市场价格。为了说明这种估计方法，我们考虑一个仅依赖于这个变量的投资资产。定义：

μ——投资资产收益率的期望；

σ——投资资产收益的波动率；

λ——变量的风险市场价格；

ρ——变量的百分比变化与一个包含广泛股票的指数收益率之间的瞬时相关系数；

μ_m——股票指数收益率的期望值；

σ_m——股票指数收益率的波动率；

r——短期无风险利率。

因为投资资产仅依赖于市场变量，它的收益与指数之间的瞬时相关系数也等于ρ。应用连续时间下的资本资产定价模型，我们有

$$\mu-r=\frac{\rho\sigma}{\sigma_m}(\mu_m-r)$$

由式(34-1)，$\mu-r$的另一表示方式为

$$\mu-r=\lambda\sigma$$

因此

$$\lambda=\frac{\rho}{\sigma_m}(\mu_m-r) \tag{34-2}$$

利用这个方程，我们可以估计λ。

【例34-2】 某公司的季度销售额历史数据所显示的公司销售额百分比变化与S&P 500股指收益之间的相关系数为0.3。S&P 500的波动率是每年20%，历史数据表明，S&P 500收益高于无风险利率部分的期望值是5%。式(34-2)给出了对公司销售额的风险市场价格估计为

$$\frac{0.3}{0.2}\times 0.05=0.075$$

当所考虑变量没有历史数据时，有时可以使用其他变量作为替代。例如，如果构建了一个工厂用来加工一个新产品，那么我们可以搜集其他类似产品的销售额数据。市场指数与新产品之间的相关系数可以假设为这些其他产品与市场之间的相关系数。在一些情形下，对式(34-2)中ρ的估计必须靠主观判断。如果分析员确信一个变量与市场指数的表现无关，那么应当将它的风险市场价格设成零。

对某些变量，如果可以直接估计它在风险中性世界里所服从的过程，那么就没有必要去估计它的风险市场价格。例如，当变量是一个金融资产的价格时，它在风险中性世界里的总收益率应该等于无风险利率。如果变量是短期利率r，第30章说明了如何由初始利率期限结构来估计它的风险中性过程。在本章后面，我们将说明如何利用期货价格来估计商品价格的风险中性过程。

对于商品，如第33章所述，期货价格可以用来估计风险中性过程。例33-2是一个实物期权的简单应用，其中利用了期货价格来评估关于饲养活牛的投资决策。

34.4 对业务的评估

对业务评估的一种传统方法是将“价格/利润的倍数”(P/E multiplier)乘以当前利润，这一传统方法对新企业评估不太适用。一个新企业常常具有这样的特点，由于在头几年内企业试图获取更多的市场并与客户建立关系，企业的利润往往为负。对这些企业的评估必须要依靠估计企业在未来不同情形下的利润和现金流。

在这种情况下，实物期权方法会很有用处。公司在未来的现金流一般会依赖于一些变量，像销售额增长，可变成本与销售额的百分比、固定成本，等等。对一些关键变量，我们应当利用像前两节所述的方法来估计它们的风险中性随机过程，然后可以用蒙特卡罗方法生成在各种不同情形下每年的净现金流。很可能公司在一些情形下盈利很好而在另一些情形下却会倒闭而停止运作(在模拟过程中必须表明在何种情形下企业将会倒闭的规则)。公司的价值等于每年净现金流的期望以无风险利率贴现的现值。业界事例34-1给了一个将此方法应用于对亚马逊公司定价的例子。

业界事例34-1 评估亚马逊公司

在利用实物期权对公司定价方面，其中发表最早的一篇文章是Schwartz和Moon(2000)，他们考虑了亚马逊公司在1999年底的价格。假设公司的销售利润R与其收入增长率μ服从以下随机过程：

$$\frac{\mathrm{d}R}{R}=\mu\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}z_1$$

$$\mathrm{d}\mu=\kappa(\bar{\mu}-\mu)\mathrm{d}t+\eta(t)\mathrm{d}z_2$$

假定两个维纳过程$\mathrm{d}z_1$和$\mathrm{d}z_2$互不相关，并且根据历史数据，Schwartz和Moon对$\sigma(t)$，$\eta(t)$，κ，与$\bar{\mu}$做了一些合理的假设。

假设卖出产品成本是销售额的75%，其他可变成本是销售额的19%，而固定成本是每季度7 500万美元。最初销售额水平是3.56亿美元，最初税务结转亏损是5.59亿美元，税率是35%。变量R的风险市场价格可以通过历史数据按33.3节中所述方法估计，变量μ的风险市场价格被假设成零。

分析的展望期被设定为25年，在展望期最后，公司的价值被假定为10倍于公司的税前盈利，最初的现金持有量为9.06亿，当现金余额为负值时，公司将会破产。

蒙特卡罗模拟法可以产生将来的不同情形，在不同情形下，需要将行使可转换债券以及行使雇员期权的可能性考虑在内。对于股权人而言，公司的价值等于将来的现金流以无风险利率进行贴现后的总和。

在这些假设下，Schwartz和Moon得出亚马逊公司股票在1999年底的估价为12.42美元，当时其市场价格为76.125美元(虽然在2000年，该股票价格大幅下跌)。实物期权法的优点在于这一方法对关键的假设进行了

识别。Schwartz 和 Moon 发现估计的股价对增长率的波动率 $\eta(t)$ 十分敏感，该波动率是期权价值的主要来源，$\eta(t)$ 上小小的增量会使得期权价值增大，也会使得亚马逊公司股票的估价大大增大。

34.5 投资机会中期权的定价

我们已经提到过，大多数投资项目都会涉及期权。这些期权可以给项目增加可观的价值，但人们常常会忽略这些期权或使用错误的方法定价。隐含在投资项目里的期权可能包括：

放弃期权(abandonment option)。这是指转让或结束项目的权利，是项目价值上的美式看跌期权，期权的执行价格是项目的清仓(或转让)价值减去清仓时的所有费用。当清仓价值很低时，执行价格可能为负值。放弃期权可以减轻非常糟糕的投资结果对项目的影响，从而增加最初项目的价值。

扩大期权(expansion option)。这是指在以后当条件有利时增加投资，从而增加生产的权利，是在增加生产能力价值上的美式看涨期权。期权的执行价格是增加生产能力的成本被贴现到行使期权时的价值。执行价格常常与最初的投资有关。如果在最初构建时管理层计划的生产规模已经超过预期生产的水平，那么执行价格会相对很小。

缩减期权(contraction option)。这是减小项目规模的权利，它是关于减低生产能力价值上的美式看跌期权。期权的执行价格是在行使时刻所有将节省的未来支出的贴现值。

推迟期权(option to defer)。对于管理人而言，一种非常重要的权利是能够推迟项目，这是项目价值上的美式看涨期权。

延期期权(option to extend)。有时可能在付出一笔固定费用后可以延长一个资产的寿命，这是在资产将来价值上的欧式看涨期权。

34.5.1 例子

作为对含有隐含期权投资评估的简单例子，我们考虑下面的问题：一家公司需要决定是否要投资1 500 万美元以使在今后3 年内从某处按每年200 万单位的速度提取600 万单位商品。运作设备的固定开支是每年600 万美元，而可变成本是提取每单位商品需要 17 美元。我们假设所有期限的无风险利率均为每年 10%，商品即期价格是每单位 20 美元，1 年、2 年和 3 年的期货价格分别是每单位 22 美元、23 美元和 24 美元。

34.5.2 没有隐含期权时

我们首先假定这个项目中没有隐含期权。在 1 年、2 年和 3 年后，商品价格在风险中性世界里的期望值分别是 22 美元、23 美元和 24 美元。在风险中性世界里，项目收益的期望值可以通过费用支出数据计算，在 1 年、2 年和 3 年的值分别是(按百万美元计)4.0、6.0 和 8.0。因此，项目的价值为

$$-15.0+4.0e^{-0.1\times1}+6.0e^{-0.1\times2}+8.0e^{-0.1\times3}=-0.54$$

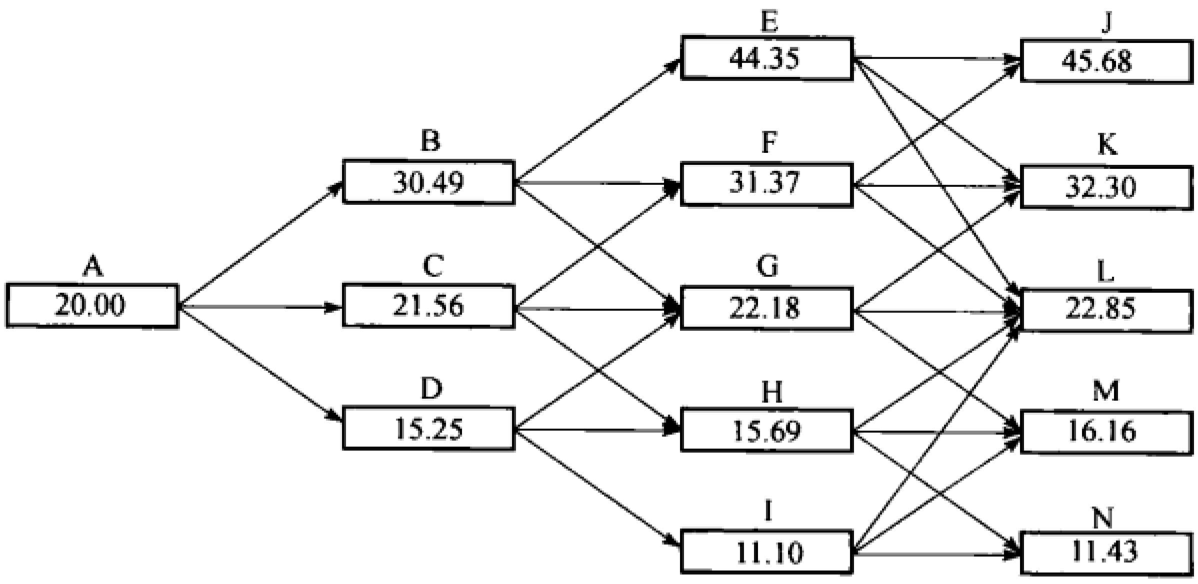
分析表明，公司不应当承担这个项目，因为这样做会使股权持有者的财富降低 54 万美元。

34.5.3 利用树形

我们现在假设商品的即期价格服从随机过程

$$\mathrm{d}\ln S=[\theta(t)-a\ln S]\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{34-3}$$

其中 $a=0.1$ 和 $\sigma=0.2$。对于这里的例子，在 33.4 节里我们说明了如何对商品价格构造树形，如图 34-1 所示(与图 33-2 相同)。树形所代表的过程与对 S 所假设的过程、对 a 和 σ 所假设的值，以及 1 年、2 年和 3 年的期货价格是一致的。



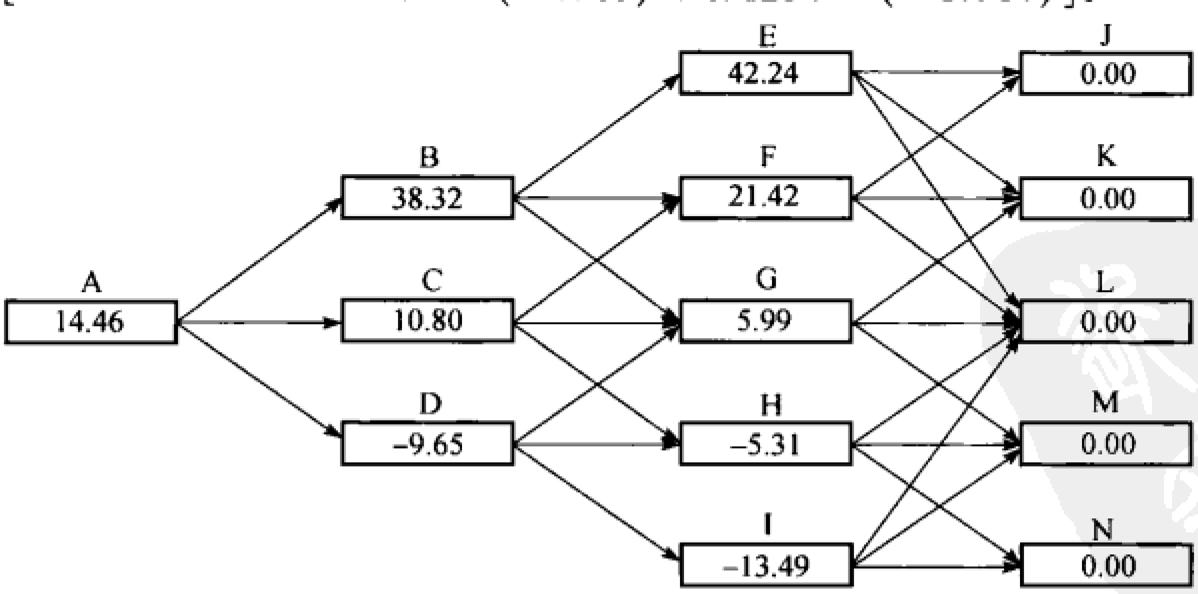
节点:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.166 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.886 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.086 7
p_m:	0.666 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6
p_d:	0.166 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.086 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.886 7

图 34-1 即期商品价格的树形

注：这里 p_u，p_m 和 p_d 是从一个节点向“上”、“中”和“下”移动的概率。

当没有隐含期权时，我们不需要利用树形来对项目估价(我们已经知道在没有期权时项目的基本价值是 -0.54)。但是，在我们考虑期权之前，为了帮助理解以及将来计算，我们利用树形来对没有期权时的项目进行估价，并且验证前面所得到的结果。图 34-2 展示了项目在图 34-1 中的每个节点上的价值。例如，考虑节点 H。在第 3 年末商品价格为 22.85 的概率是 0.221 7，于是在第 3 年内的盈利是 $2 \times 22.85 - 2 \times 17 - 6 = 5.70$。与此类似，在第 3 年末商品价格为 16.16 的概率是 0.656 6，因此盈利是 -7.68，以及在第 3 年末商品价格为 14.43 的概率是 0.121 7，因此盈利是 -17.14。由此可以得到在图 34-3 中节点 H 上价值为

$$[0.2217 \times 5.70 + 0.6566 \times (-7.68) + 0.1217 \times (-17.14)]e^{-0.1\times 1} = -5.31$$



节点:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.166 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.886 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.086 7
p_m:	0.666 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6
p_d:	0.166 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.086 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.886 7

图 34-2 对没有内含期权的基本项目进行评估

注：这里 p_u，p_m 和 p_d 是从一个节点向“上”、“中”和“下”移动的概率。

作为另一个例子，考虑节点 C，移动到价格为 31.37 的节点 F 的概率是 0.166 7。于是在第 2 年的现金流为 $2\times31.37-2\times17-6=22.74$。在节点 F 后的现金流价值为 21.24，因此，当移动到节点 F 时项目的总价值为 $21.42+22.74=44.26$。类似地，当我们移动到节点 G 和 H 时，项目的总价值分别为 10.35 和 −13.93。因此，项目在节点 C 的价值为

$$[0.1667\times44.16+0.6666\times10.35+0.1667\times(-13.93)]e^{-0.1\times1}=10.80$$

图 34-2 显示了在最初的节点 A 上，项目的价值为 14.46。因此，当我们将项目在开始时的成本考虑进去时，项目的价值为 −0.54，这与我们前面的计算结果一致。

34.5.4 放弃期权

现在假设公司具有随时放弃项目的权利。我们假定项目一旦被放弃，项目将没有残值，而且不需要再支付费用。放弃权利是执行价格为零的美式看跌期权，其价格的计算显示在图 34-3 中。由于在节点 E、F、和 G 上项目的价值为正，期权不应当被行使，而在节点 H 和 I 上应当行使期权。在节点 H 和 I 上看跌期权的价值分别是 5.31 和 13.49。在树上向后递推计算，我们可以计算在节点 D 上如果期权不被行使，其价值为

$$(0.1217\times13.94+0.6566\times5.31+0.2217\times0)e^{-0.1\times1}=4.64$$

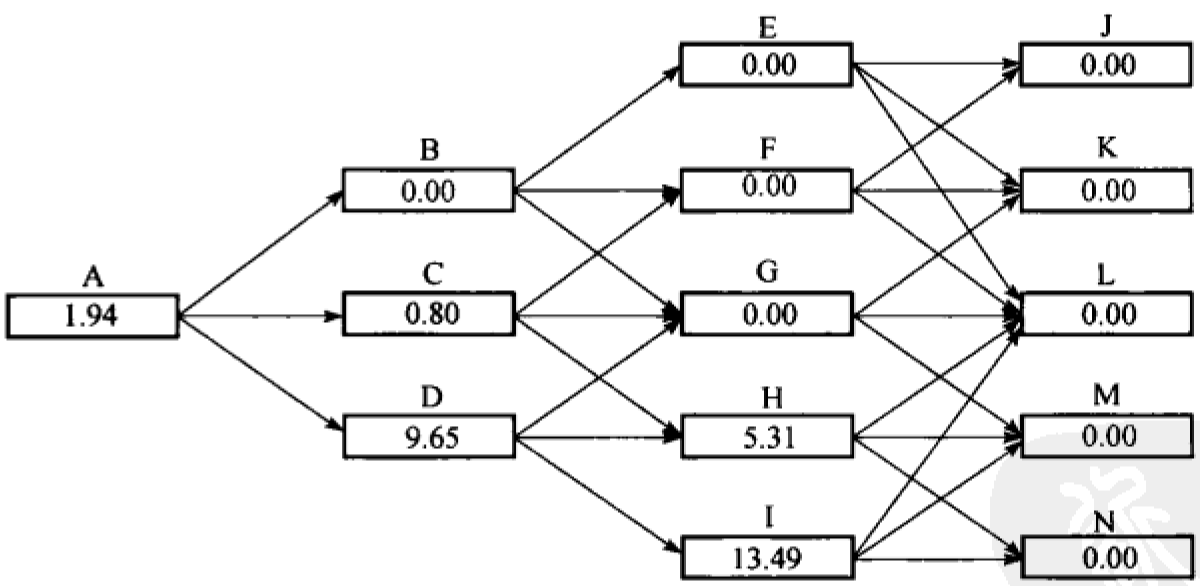
在节点 D 行使期权的价值为 9.65。这个值大于 4.64，因此我们应当在节点 D 上行使期权。看跌期权在节点 C 的价值为

$$(0.1667\times0+0.6666\times0+0.1667\times5.31)e^{-0.1\times1}=0.80$$

在节点 A 的价值为

$$(0.1667\times0+0.6666\times0.80+0.1667\times9.65)e^{-0.1\times1}=1.94$$

因此，放弃期权具有 194 万美元的价值，它将项目的价值由 −54 万美元增加到 +140 万美元。因此，前面一个不吸引人的项目会给股权持有人带来正价值。



节点:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.166 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.886 7	0.121 7	0.166 7	0.221 7	0.086 7
p_m:	0.666 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6	0.656 6	0.666 6	0.656 6	0.026 6
p_d:	0.166 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.086 7	0.221 7	0.166 7	0.121 7	0.886 7

图 34-3 对含有放弃期权的项目进行评估

注：这里 p_u、p_m 和 p_d 是从一个节点向“上”、“中”和“下”移动的概率。

34.5.5 扩大期权

下面我们假设公司没有放弃项目的权利，但具有在任何时间将项目的规模扩大 20% 的权利，

扩大规模的费用是200万美元。商品产量从每年200万单位增加到240万单位，可变成本仍保持在每单位17美元，但固定成本却增加了20%，由600万美元增至720万美元。以上过程是支付200万美元来购买20%的由图34-2表示的基本项目上的美式看涨期权，期权价值由图34-4计算。在节点E，应当行使期权，收益是$0.2\times 42.24-2=6.45$。在节点F也应当行使期权，收益是$0.2\times 21.42-2=2.28$。在节点G、H和I上，期权不应当被行使。在节点B，行使期权要比等待的价值大，期权价值为$0.2\times 38.32-2=5.66$。在节点C，如果期权不被行使，它的价值为

$$(0.1667\times 2.28+0.6666\times 0.00+0.1667\times 0.00)e^{-0.1\times 1}=0.34$$

如果被行使，其价值为$0.2\times 10.80-2=0.16$。因此，在节点C不应当行使期权。在节点A，如果期权不被行使，其价值为

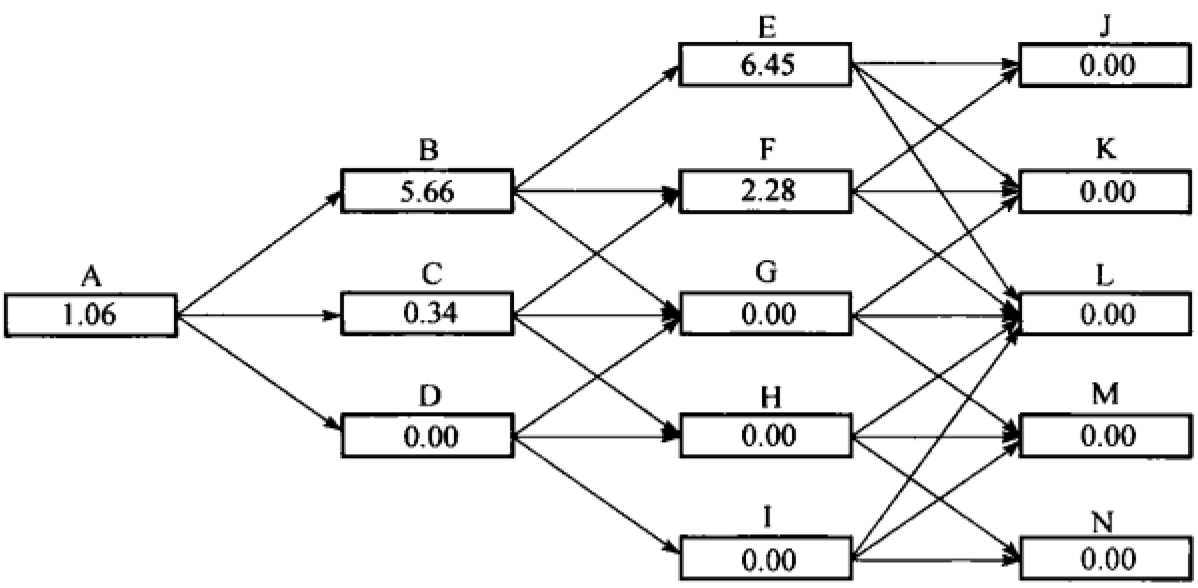
$$(0.1667\times 5.66+0.6666\times 0.34+0.1667\times 0.00)e^{-0.1\times 1}=1.06$$

如果期权被行使，其价值为$0.2\times 14.46-2=0.89$，因此提前行使期权不是最优。在这种情况下，期权会将项目的价值从-0.54增加到$+0.52$。这里我们再次发现以前项目具有负值但现在却是正值。

相对来说，图34-4中的扩大期权比较容易评估，因为一旦期权被行使，随后的所有现金流出和流入均增加20%。在固定成本保持不变或增长小于20%的情形，我们需要在图34-4的节点上考虑更多的信息。具体而言，我们需要记录下面信息：

- 其后固定开支的贴现值；
- 其后除去可变开支的收入。

然后可以计算行使期权时的收益。



节点:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
p_u:	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
p_m:	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
p_d:	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

图34-4 对含有扩大期权的项目进行评估

注：这里p_u、p_m和p_d是从一个节点向“上”、“中”和“下”移动的概率。

34.5.6 多种期权

当一个项目具有两个或更多个期权时，它们一般是不会独立的。含有期权A和B的价值一般不等于两个期权之和。为了说明这一点，假定我们所考虑的公司同时具有放弃和扩大的权利。当项目已经被放弃时，再扩大项目是不可能的。而且放弃项目的看跌期权价值一般会依赖于项目是

否已经被扩大过。[1]

上述例子中的两个期权之间的相互影响可以通过在每个节点上考虑 4 个状态来处理：

- 还没有放弃；还没有扩大；
- 还没有放弃；已经被扩大；
- 已经放弃；还没有被扩大；
- 已经放弃；已经被扩大。

从树上向后递推时，我们需要在每个节点上计算所有 4 种不同期权的价值总和。在 26.5 节里对依赖路径期权定价的处理方法有更详细的讨论。

34.5.7 多个随机变量

当存在多个随机变量时，基本项目的价值一般可以通过蒙特卡罗模拟来确定，但对项目的隐含期权定价却变得更加困难。这是因为蒙特卡罗模拟是从工程开始进行模拟，直到工程结束。当模拟到某一点时，我们没有关于工程未来现金流贴现值的信息。然而，有时可以使用在 26.8 节中提到的关于利用蒙特卡罗方法计算美式期权价格的技巧。

为了说明这一点，Schwartz 和 Moon(2000)解释了如何将业界事例 34-1 中的分析推广到可以考虑包括当未来现金流的贴现值为负时[2]放弃项目的权利(即宣布破产的权利)。在每个时间节点上，假定放弃期权价值与一些变量，如现期收入、收入增长率、波动率、现金余额与税务结转亏损之间存在一种多项式关系。每次模拟都在时间点上提供了一个为取得以上关系的最小二乘法估计的观察样本，这正是 26.8 节里 Langstaff 和 Schwartz 的方法。[3]

小　结

在本章中，我们探讨了如何将本书前面所建立的定价原理应用在实物资产和实物资产的期权上，我们说明了利用风险中性定价原理对依赖于任何一组变量的资产定价。每个变量的增长率期望都要加以调整，以便反映它的风险市场价格。在调整之后，资产的价格等于其现金流的期望值按无风险利率贴现后的现值。

风险中性定价原理为资本投资评估提供了一种内在兼容的处理方法，同时也可以用来对实际中一个项目里常常含有的隐含期权加以定价。通过对亚马逊公司在 1999 年底的定价和一个商品项目定价的例子，我们展示了如何使用这种方法。

推荐阅读

Amran, M., and N. Kulatilaka, *Real Options*, Boston, MA: Harvard Business School Press, 1999.

Copeland, T., T. Koller, and J. Murrin, *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies*, 3rd edn. New York: Wiley, 2000.

Copeland, T., and V. Antikarov, *Real Options: A Practitioners Guide*, New York: Texere, 2003.

Schwartz, E.S., and M. Moon, "Rational Pricing of Internet Companies," *Financial Analysts Journal*, May/June (2000): 62–75.

Trigeorgis, L., *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, Cambridge, MA: MIT Press, 1996.

---

[1] 在例 34-3 和图 34-4 中的期权碰巧不相关，但是当取时间间隔更小而使得树形变得更大时，两个期权之间的影响将会成为问题。

[2] 34.4 节的分析假定现金流余额为负时，破产会发生，但这一假设对亚马逊不一定为最优。

[3] 见 F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approch," *Review of Financial Studies*, 14, 1(Spring 2001): 113-47。

练习题

34.1 对于新的资本投资机会评估有两种不同的方法，它们是净现值定价法和风险中性定价法，解释它们之间的区别。在对实物期权定价时，风险中性定价方法有什么优点？

34.2 铜价的风险市场价格是0.5，铜价的波动率是每年20%，即期市场价格是每磅80美分，而且6月期的期货价格是每磅75美分。在以后6个月里，铜价的百分比增长率期望是多少？

34.3 一种商品的价格波动率是常数，而且增长率期望仅依赖于时间。证明在传统风险中性世界里

$$\ln S_T \sim \phi\left[\ln F(T) - \frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 \sqrt{T}\right]$$

式中S_T是商品在时间T的价格，而$F(t)$是在时间0，一个在时间t到期的合约期货价格，$\phi(m, v)$是均值为m、方差为v的正态分布。

34.4 推导商品的便利收益率与其风险市场价格之间的关系。

34.5 一个公司的毛收入与市场指数之间的相关系数是0.2. 市场收益高于无风险利率6%，而且市场收益的波动率是18%。公司收入的风险市场价格是多少？

34.6 一家公司可以购买一种在3年后按每单位25美元价格买入100万单位商品的期权。商品的3年期期货价格是每单位24美元。无风险利率是年息5%按连续复利，期货价格的波动率是每年20%。期货的价值是多少？

34.7 一个正在签约租车合同的司机可以得到在4年后以1万美元购买此车的权利，汽车当前价格为3万美元。假设汽车价格S服从如下随机过程

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

式中$\mu = -0.25$，$\sigma = 0.15$，dz是一个维纳过程。已估计出汽车价格的风险市场价格是-0.1。期权的价值是多少？假设所有期限的无风险利率均为6%。

作业题

34.8 假设小麦的即期价格、6月期期货价格和12月期期货价格分别是每蒲式耳250美分，260美分和270美分。假设小麦价格服从式(34-4)中的过程，其中$a = 0.05$，$\sigma = 0.15$。在风险中性世界里对小麦价格构造一个二叉树。

一个农场主的项目需要现在支出1万美元，而且在6个月后再支出9万美元。这个项目将会增收的小麦产量为每年4万蒲式耳，项目的价值是多少？假设农场主能够在6个月后放弃项目，从而避免在那时数量为9万元的费用，放弃期权的价值是多少？假设无风险利率为5%，按连续复利。

34.9 在34.5节考虑的例子中：

(a) 如果费用是300万美元而不是零，那么放弃期权的价值是多少？

(b) 如果费用是500万美元而不是200万美元，那么扩大期权的价值是多少？



第35章

重大金融损失与借鉴

自20世纪80年代中期开始，衍生产品市场出现了若干起引人注目的重大损失，其中最大的损失来自于美国住房按揭产品的交易，这在第8章中已有所介绍。业界事例35-1列举了一些金融机构的损失事件，业界事例35-2列举了一些非金融机构的损失事件。这里所列举的事件中有一个显著特点，那就是由单一雇员造成重大损失所出现的次数较为突出。1995年尼克·利森所做交易的后果使得一个运作了200年之久的英国老牌银行巴林银行垮台；在1994年里，罗伯特·西特仑的交易造成加州奥兰治县的损失达20亿美元；约瑟夫·杰特的交易给基德公司带来的损失达3.5亿美元；约翰·拉斯纳克给爱尔兰联合银行带来的7亿美元损失直到2002年才得以曝光；2006年，由于布莱恩·亨特的风险交易而使Amaranth对冲基金损失了60亿美元。2008年，法国兴业银行的杰里米·科维尔在股指期货交易中，给银行造成的损失额超过70亿美元。另外，大和银行、壳牌石油公司及住友株式会社的重大损失都是由于个人的行为所致。

业界事例35-1　金融机构的重大金融损失

爱尔兰联合银行

这家银行因为其外汇交易员约翰·拉斯纳克在若干年里所做的非授权投机交易而损失7亿美元。拉斯纳克以制造虚假期权交易的形式掩盖了他的损失。

Amaranth对冲基金

此对冲基金因对天然气价格走向下赌而损失60亿美元。

巴林银行

这家运作了200年的英国老牌银行因为其外派新加坡的交易员尼克·利森的行为而毁于一旦。尼克·利森的职责是从新加坡及大阪的日经225期货指数报价中进行套利，而实际上他采用了期货及期权对日经225指数进行了大笔方向性投机，最终他带来的损失高达10亿美元。

大和银行

这家日本银行外派到纽约的一个交易员在20世纪90年代给这家银行造成了10亿美元的损失。

安然交易对手

通过一些极有想象力的合约，安然对自己的股东隐瞒了公司的真实情况。几家被指帮助安然实现目的的金融机构与安然股东在庭外解决了纷争，并因此损失了至少10亿美元。

基德公司

公司交易员约瑟夫·杰特的个人行为给该投资公司带来了3.5亿美元的损失，约瑟夫所交易的产品主要是美国国债，他的损失是由于公司计算机系统用于计算盈利的公式错误而造成的。

长期资本管理银行

在1998年，由于在俄国政府对自身所发行债券的违约以及随后的市场“择优而栖”现象而使这家对冲基金损失了大约40亿美元。纽约联储银行组织了14家银行对该基金注资，从而使基金能够得到有序的解体。

米德兰银行

这家英国银行因在20世纪90年代初期对利率走向下赌而损失5亿美元。该银行后来被汇丰银行兼并。

国民西敏寺银行

这家银行在1997年因对互换期权定价时使用了错误模型而损失1.3亿美元。

兴业银行

杰里米·科维尔在2008年1月因为投机股指的走向而给这家法国银行造成了超过70亿美元的损失。

次级住房抵押贷款损失

2007年，投资者对由美国次级住房抵押贷款产生的结构产品丧失了信心，从而导致了信用紧缩现象，并导致许多像瑞银集团、美林、花旗集团这样的金融机构数百亿美元的损失。

业界事例35-2　非金融机构的重大金融损失

联合里昂食品公司

这家公司资金部在1991年因出售美元/英镑看涨期权而损失1.5亿美元。

吉布森礼品公司

这家制造礼品卡的公司在1994年与信孚银行(Bankers Trust)进行结构性产品交易时损失了近2 000万美元。后来这家公司起诉了信孚银行，法律纠纷最终得到庭外解决。

哈默史密斯-富勒姆市政当局

英国伦敦哈默史密斯-富勒姆行政区的市政当局因为英镑互换以及期权交易在1988年损失了近6亿美元。所有这些合约被英国法庭宣布无效，英国法庭的决定主要是因为交易对手缺乏对于这些衍生产品的知识。

德国金属公司

这家德国公司进入了长期限的远期合约。合约阐明此公司将提供原油及汽油，同时这家公司采用短期期货合约来对冲风险，后来这家公司因不得不停止这种交易而损失18亿美元。

奥兰治县

奥兰治县资金管理人罗伯特·西特仑的行为造成了这个加州城市在1994损失了近20亿美元，这位管理人利用衍生产品来对利率进行投机，他下赌注利率不会增长。

宝洁公司

这家美国公司的资金部与信孚银行进行结构性产品交易时损失了近9 000万美元，后来这家公司起诉信孚银行，法律纠纷最终得到庭外解决。

壳牌石油公司

这家公司在日本分公司的一个雇员因交易无授权的货币期货而损失了10亿美元。

住友株式会社

这家日本公司的一个交易员在20世纪90年代因交易铜现市、期货及期权交易而损失了大约20亿美元。

这里列举的损失有些涉及衍生产品，但这些损失并不能代表整个衍生产品市场的现状。衍生产品市场的规模达数万亿美元。不管从哪个角度来看，这个行业都是一个十分成功的行业，它确实满足了很多人的需求。前美联储主席艾伦·格林斯潘在2003年5月曾说过以下一席话：

采用多种多样的衍生产品，以及采用更为完善的方法来检测和管理风险已经成为最大金融媒介机构强化其负载能力的主要动力。

虽然业界事例35-1及业界事例35-2所列举的损失只占市场交易量的一小部分(无论是交易数量还是交易价值)，但我们仍然应该认真研究这些实例并从中吸取教训。

35.1 定义风险额度

所有的公司必须对自身所能承担的风险有一个清晰并且含义明确的定义，这一点至关重要。公司应该制定管理程序来保证额度的贯彻执行。整体的风险额度应该由董事会建立，然后这些额度应被转化为负责特定风险管理人员的特定额度。每天的风险报告应该是对将来市场变化所带来盈亏的一个预测，风险报告所预测的数值要与实际损失进行比较以便保证报告所用定价工具的准确性。

在应用衍生产品时，公司应该对于自身所面临的风险进行仔细检测，正如第1章介绍的那样，衍生产品既可以被用来对冲风险也可以用于进行投机与套利。如果不对风险进行仔细检测，我们几乎不可能知道交易员是否由一个对冲者变成了投机者，或者从一个套利者变成了投机者。巴林银行和兴业银行就是典型的管理失败的实例，尼克·利森和科维尔的职责是进行低风险的套利，但是他们由套利者变成了投机者。这两家银行管理系统非常不完善，以至于当时没有人知道他们在做什么。

这里的观点并不是说我们不能承担任何形式的风险，一个公司的资金管理人、一个金融机构的交易员或者基金经理关于市场变量将来的变化有采取某种行动的权利，但这些交易人员的交易量一定要受到某种制约，公司必须建立准确地报告有关交易风险的系统。

35.1.1 认真对待风险额度

如果某个交易员在超过风险额度情况下取得了盈利，我们这时应该怎么办？对于管理部门来讲，这是一个棘手的问题。交易员的盈利会使人们忽略其违反额度的行为，但这是一种短视的做法，所促成的风险文化会对风险额度不再重视，这就会给将来的失败埋下隐患。在业界事例35-1及业界事例35-2中，很多情形都是因为曾经承担过某些风险并因此盈利，这些公司对风险显示了一些过于自满的态度。

这里一个典型的实例是奥兰治县。奥兰治县的西特仑在1991~1993年曾给这个城市带来了巨大的盈利，城市也依赖于以他的交易收入作为运转资金，人们这时因为盈利而忽略西特仑所承担的风险，不幸的是1994年西特仑的损失远超过了他若干年的盈利。

在盈利时对于违反交易额度的惩罚与在亏损时对于违犯交易额度的惩罚要一视同仁，否则的话交易员在交易损失之后会加大自身的交易量来取得盈利，并希望人们忘记自己的交易损失。

35.1.2 不要认为你会猜透市场

有的交易员对于市场预测可能比其他人更为优秀，但是他不可能永远正确。交易员能在所有预测中有60%正确就已经相当不错了，一个交易员出类拔萃的战绩（像20世纪90年代初的西特仑）很可能是由于运气，而并非交易技巧。

假定某金融机构雇用了16名交易员，其中一名交易员在过去一年中的每一个季度都盈利，这位交易员是否应拿到更多的奖金呢？他的交易额度是否应该增加呢？第一个问题的答案无疑是肯定的，但第二个问题的答案应该是否定的。在四个季度中均盈利的概率为0.5^4，即1/16，这意味着即使完全出于随机，在过去一年里每16个交易员中至少有一位每个季度“都会盈利”。我们不应该相信交易员的运气会永远持续，不应该因为交易员的暂时盈利而给他增加交易额度。

35.1.3 不要忽略多元化的好处

当一个交易员比较擅长预测某些市场变量时，公司往往会倾向于给这个交易员增加交易额度。我们已经指出，这么做可能是一个很糟糕的决策，因为交易员的交易结果很可能是出于运气而非智慧。即使我们真的相信某交易员具备这种天赋，我们能在多大程度上允许不分散投资组合

的风险以便利用这个交易员的天赋呢？答案是风险分散所带来的好处是巨大的，一个能出色到使我们忽略分散风险的好处而对某个单一市场变量进行投机的交易员是不大可能存在的。

接下来我们用一个实例来说明问题。假定有 20 只股票，股票的预期收益均为 10%，每只股票收益的标准差为 30%，任意两只股票之间的相关性都是 0.2，投资者将资产以均等的形式投入这 20 只股票。投资者投资组合的预期收益为 10%，标准差为 14.7%，风险分散使得投资者的风险降低了一半以上。也可以讲风险分散使得我们对每一份所承担风险的收益加大了一倍。只进行一种股票投资的投资者必须极其“聪明”才能取得比以上更好的风险收益替换关系。

35.1.4 进行情形分析以及压力测试

在计算 VaR 的同时我们必须进行情形分析和压力测试，这会有助于我们对薄弱环节的风险的进一步理解，在第 21 章中，我们曾讨论过情形分析及压力测试等管理工具，这些工具对于管理人员来讲至关重要。人类有一个很不好的倾向，那就是在做出决策时往往过分依赖一两个情形。例如在 1993 ~ 1994 年里，宝洁公司在其决策过程中如此相信利率会维持在低水平，而完全忽略了利率增长 100 个基点的可能性。

对于不同情形的构造，管理人员一定要有创造力，并且利用经验丰富的管理人员的判断。一种途径是选取 10 ~ 20 年的历史数据中最极端的事件作为分析的情形。如果对于某个关键变量缺乏数据，我们可以将某些相近的数据作为近似，将这些近似变量的历史收益数据作为这个关键变量收益的近似。例如，对于某个国家发行的债券没有太多的历史数据，我们可以采用一些与这一国家相似的其他国家债券作为近似，并从这些相似国家债券的历史数据来构造各种不同的情形。

35.2 对于金融机构的教训

本节我们主要考虑金融结构应该吸取的教训。

35.2.1 对于交易员的管理

在交易大厅里常有一种倾向：那些表现出色的交易员往往认为是“惹不得”，而且凌驾于管理制度之上。显然基德公司国债产品的“明星”交易员约瑟夫·杰特常常由于“太忙”而没有时间回答公司风险管理人员的问题。

所有的交易员，特别是那些盈利高的交易员都应该非常负责任，这一点至关重要。再有，金融机构应当清楚了解一笔高收入的交易是否由于承担过高风险所致。另外，银行必须检验自身交易系统以及定价模型的准确性，以确保这些交易工具不会被滥用。

35.2.2 确保前台、中台以及后台职责的分离

金融机构前台主要由交易员组成，这些交易员的职责是进行交易，即对产品进行买卖；中台主要是由风险管理人员所组成，这些风险管理人员的职责是监控前台的风险；后台的职责主要是记账以及财会结算。有些金融衍生产品灾难的源泉是由于对以上几个职能部门的职责没有进行区分，利森掌管了巴林银行在新加坡分行的前台以及后台，因此他有机会在长时间内掩盖其大笔交易损失，而远在伦敦的上级高管对他的行为毫无察觉。而杰里米·科维尔曾在兴业银行的后台工作过，在成为交易员后，他利用自己对银行系统的知识隐瞒了所做的交易。

35.2.3 不可盲目地相信模型

一些金融机构的大笔金融损失是由模型及计算机系统的错误造成的。基德公司曾被自身的计算机系统愚弄，另外一个例子是国民西敏寺银行因使用错误模型而蒙受损失，这家银行错误的互

换期权定价模型给银行带来了相当大的损失。

如果某家金融机构采用相对简单的交易策略而获得大笔盈利，那么有很大的可能性这家机构在计算盈利时所用的模型中存在问题，类似地，如果某家金融机构对于某个特定产品报价一直比其他同业竞争者报价要好，那么很有可能这家公司所采用的模型同其他市场参与者的模型会有所不同，这时这家机构应对自身的模型进行仔细分析，对于交易平台的主管来讲，赢得某一单项生意太多同赢得生意太少同样令人担忧。

35.2.4　以保守的方式记录起始盈利

当一家金融机构向一家非金融机构出售复杂的结构性产品时，产品的价格会与模型有直接的关系。例如，产品中如果包含期限较长的利率期权，这时产品价格会同所采用的利率模型有相当大的关系，这时市场上经常以按模型计价(marking to model)的方式来计算产品每天的价格变动，原因是在市场上找不到类似的产品来作为这些结构性产品的定价标准。

假定一家金融机构出售给客户某产品的价格比实际价格，或比模型价格高出 1 000 万美元，这里的 1 000 万被称为起始盈利(*inception profit*)。这一起始盈利应该在什么时刻被记入账户呢？对于这笔盈利的处理方法有多种多样，有些银行马上将这笔钱记为盈利，而一些其他银行会在合约期限内逐渐地将这笔收入计入盈利账户。

将起始盈利迅速记入盈利账户是一种非常危险的做法，这样做会鼓励交易员采用激进的模型，因为交易员会在挣得分红后，会选择在模型以及交易价格受到严格审核之前离开银行。将起始盈利慢慢记入盈利账户是一种较好的做法，这样做会使得交易员在交易之前有动机去检测不同模型以及不同假设对于交易产品价格的不同影响。

35.2.5　不要向客户出售不适宜的产品

卖给客户不适宜的产品对于金融机构是很容易发生的事情，这种现象尤其在客户具有承担某种风险的胃口时更为明显，但这么做是非常没有远见的。关于这一点最引人注目的实例是信孚银行(BT)在 1994 年春天之前的一些交易行为，那时许多 BT 的客户被 BT 说服购买了许多高风险但对客户根本不适宜的产品。一个典型产品(例如在第 32 章中讨论过的 5/30 互换)会给客户提供较大机会节省几个基点的融资费用而同时有较小机会造成大笔费用的支出，这些产品在 1992 ~ 1993 年给 BT 许多客户带来了收益，但在 1994 年利率上涨时终于出现问题，这些问题最终对 BT 的公众形象产生了很大伤害。由于几个推销员的过分激进行为，BT 在多年内与企业客户之间所建立的信任以及它在同行中令人羡慕的衍生产品创新者形象被丢失殆尽。BT 不得不向客户付出大笔赔偿以试图在庭外解决法律纠纷，在 1999 年 BT 被德意志银行吞并。

35.2.6　不要忽略流通风险

在对市场上交易不太活跃的奇异性产品定价时，金融工程师所依靠的往往是市场上交易活跃的产品价格，例如：

- 金融工程师往往采用市场上交易活跃的政府债券，即指标债券(on the run bonds)来建立零息利率曲线，然后利用这些曲线来对交易不频繁的产品非指标债券(off the run bonds)进行定价。
- 金融工程师经常利用交易活跃的期权价格来计算隐含资产波动率，然后将这些波动率用于市场上不太活跃的产品定价之中。
- 金融工程师经常利用交易活跃的利率交易产品(例如利率上限及利率期权)求得利率变动的隐含信息，然后将这些信息用于计算复杂结构性产品的价格。

以上做法并不是不合理，但是假设市场交易不频繁的产品价格与其理论价格相同的做法可能会非常危险。当金融市场经历一种又一种的风波以后常常会发生择优而栖的现象，这时流通性对于投资者来讲变得非常重要，而流通性不好的产品只能以同其理论价格相比有很大折价的价格卖出。这时在交易决策中假设流通性相对不好的产品在短期内的售出价格同理论价格相同将是一个很危险的假设。

一起由于流动风险造成重大损失的例子是业界案例2-2里提到的LTCM。LTCM采用的套利策略为收敛套利(convergence arbitrage)，在这种套利策略中需要识别两种债券(或债券组合)，这两种债券的理论价格应该一致，如果在市场上一种债券的价格较低，这时可以买入这种低价格债券而卖出高价格债券，这种套利的基本假设就是如果两个债券的理论价格一致，那么其市场价格在最终也一致。

在1998年夏天LTCM遭受了巨大损失。其损失的主要原因是俄罗斯政府对自己债券的违约造成了市场上择优而栖现象的发生，LTCM在交易中持有流通性差产品的长头寸而同时持有流通性好产品的短头寸(例如，LTCM同时持有非指标债券的长头寸及指标债券的短头寸)。在俄罗斯债券违约后，流通好的产品与流通差的产品的差价急剧增大，LTCM杠杆效应又极强，因此在蒙受损失的同时又伴随着追加抵押金的要求，这时LTCM已无法再满足追加抵押金的要求。

LTCM的故事再一次强调了情形分析以及压力测试的重要性，通过这些分析我们可以看到最坏情形所对应的损失，LTCM在决策过程中应该检验以前历史上所发生过的择优而栖现象并以此来对自己面临的流通风险进行定量化检测。

35.2.7 在所有人都做同样交易时应加倍小心

有时市场上很多参与者会同时进行同样的交易，这种现象会造成危险的市场环境，这样的市场会产生大幅度振荡，并使市场参与者蒙受巨大损失。

我们在第18章曾给出了一个实例，这一实例是关于资产组合保险策略及1987年10月的市场暴跌，在市场暴跌前的一个月，有越来越多的交易组合管理人以合成看跌期权的形式来对他们的资产组合进行保护，组合管理人在市场升值时买入股票或股票指数期货而在市场下跌时卖出股票或股票指数期货，这种策略会造成市场的不稳定，原因是市场一个较小的下跌会造成资产管理人抛出股票的热潮，这一热潮使得市场进一步下跌，从而进一步促成投资组合管理人抛售更多的股票。毫无疑问如果没有投资组合保险策略的存在，1987年10月股票的下跌也不会那么严重。

另外一个实例是1998年LTCM的损失。由于其他许多对冲基金也采用了同样的收敛套利策略，这使得的LTCM困境更是雪上加霜。由俄罗斯债券违约所造成的择优而栖现象发生以后，LTCM曾试图变卖自己的部分资产以满足抵押金的要求，不幸的是其他对冲基金也面临类似的问题，这些对冲基金也想做类似的交易，这进而使得市场情况更加恶化，流通差价变得比原来更大，同时使得择优而栖现象更加严重。假设，LTCM的头寸为美国国债，持有流通性差的非指标债券的长头寸以及流通性好的指标债券的短头寸，当“择优而栖”现象产生后两种债券的收益率的差价增大，LTCM只有变卖其部分非指标债券并同时买入指标债券，其他对冲基金也在进行同样的交易，所有这些交易促成了指标债券价格相对于非指标债券价格继续上涨，以及两种债券收益率的差价比以往更大。

另外一个实例是关于20世纪90年代英国保险公司的损失。在90年代末，英国许多保险公司卖出了大量的保险合约，在这些保险合约中保险公司承诺投保者在退休时收到年金收益远高于市场上及其他锁定利息的产品，当时可能是迫于市场监管者的压力，所有保险公司都希望在市场上从金融机构那里买入长期限的利率互换以对冲自己面临的风险，同保险公司进行交易的金融机构决定买入长期英镑国债来对冲自己面临的风险，因此造成债券的市场价格的上扬，利率的下降，

这时市场需要更多的国债来维持动态对冲，因此长期英镑利率进一步下降。金融机构因长期利率的下降而蒙受损失，保险公司发现因为对冲自身面临的风险而使得自己的处境更为糟糕。

从这些故事中我们得到的主要教训是对于金融市场的整体认识至关重要。当市场许多参与者进行相似交易策略时我们应该对市场隐含的内在危机保持清醒的认识。

35.2.8 短期资金会产生流动性问题

对于银行利用短期债务来资助长期资产时所面临的利率风险，人们已经有了清晰的认识(见4.10节)。银行一般会很小心地利用利率互换或其他衍生产品来对冲这些风险。

从多方面讲，金融机构利用短期债务来资助长期资产(或其他长期需要)时的流动性风险要比利率风险严重得多，但直到2007年的金融危机之前都没有得到足够的重视。这里的问题是当市场对一家金融机构失去信心后(无论有无道理)，这家金融机构将会发现根本无法将债务延续下去。在正常情况下，金融机构也许会在7月1日发行商业票据，在8月1日发行1个月期的新商业票据将其偿还，然后在9月1日再发行新的1个月期的新商业票据将其偿还，等等。当市场失去信心时，金融机构将会无法发行新的商业票据，这时会立即出现流动性问题。

金融危机使市场对许多金融机构失去了信心，尤其对那些大量发放抵押贷款或人们认为在次级抵押贷款所产生的份额上有很大头寸的金融机构。北岩(Northern Rock)是英国的一家抵押贷款提供商，这家金融机构是这场危机最早倒下中的一个(见业界事例4-3)。这家机构就是利用短期商业票据来资助其大部分抵押贷款拆借的。当投资者对不动产市场失去信心时，其短期商业票据无法延续下去。在业界事例1-1中我们曾提到过，雷曼也是利用短期票据来资助其长期需要的。但人们对其状况感到担忧时，短期票据将无法延续，从而加速公司破产。至于那些经营由次级抵押贷款来构造像第8章里所述产品的公司，由于它们通常是利用短期期票据来资助那些等待债券化的抵押到款存货，因此它们也经历了流动性问题。

金融危机所带来的一个变化是现在高管们不但注意银行的资金充足程度，而且注意银行的流动性。

35.2.9 市场透明度至关重要

2007年的信用紧缩给我们的教训之一是市场透明度的重要性。在2007年之前，交易高度结构性产品的投资者对标的资产缺乏认识，他们唯一所知的仅是评级公司对于资产的评级。在事后看来，我们认为投资者当时应该对标的资产有所了解，并且认真检验自身所承担的风险。但必须承认，做事后诸葛亮总是很容易。

由于2007年次级债券危机，投资者对所有的结构性产品都丧失了信心，并纷纷撤离这一市场，因而造成了结构性产品市场的崩溃，结构产品份额所能卖出的价格远远低于其理论价格。伴着择优而栖现象的出现，信用溢差进一步增大。如果市场具有透明度，投资者了解自己买入的资产担保债券产品，虽然次债仍会产生一定损失，但择优而栖现象以及市场震荡的效应就不会那么强。

35.2.10 管理奖励制度

2007年的信用危机给我们的一个关键教训是奖励制度的重要性。银行的奖励制度常常强调雇员的短期表现，现在有的金融机构已经改变奖励制度，奖金是基于在长于1年内的表现(比如5年)。这样做的优势是很明显的，它会阻止交易员去做那些在近期看起来很好，而在将来可能会造成巨大损失的业务。

当贷款被债券化时，使放贷人的利益与最终承担风险的投资者利益相一致是很重要的，这样

放贷人将不会有谎报贷款质量的动机。一种达到这种目的的方式是监管部门要求贷款组合的放贷人保留一部分由组合产生的份额以及其他产品。

35.2.11 永远不能忽略风险管理

当一切都好(或看起来挺好)时，常常会有假定情况永远不会变糟的倾向，并且常会忽略风险管理部门所做的压力测验以及其他分析的结果。在2007年的信用危机之前，常常会听到一些风险管理被忽视的故事。2007年7月(信用危机之前)，花旗集团总裁查克·普林斯所做的评论正是这种对风险管理的错误态度的例子：

当音乐停止时，就流动性而言，情况会很复杂。但是只要音乐还在演奏，你就该起身跳舞。我们还在跳。

查克·普林斯在当年的下半年就丢了工作，花旗集团由于信用危机所造成的损失高于500亿美元。

35.3 对于非金融机构的教训

本节我们主要考虑非金融结构应该吸取的教训。

35.3.1 理解你的交易目的

企业应该永远不去做自己不理解的交易或采用自己不理解的交易策略。尽管这听起来好像十分明显，但我们会吃惊地发现常常在一些非金融机构遭受巨大损失之后，交易员会承认自己并不理解所做的交易，并声称投资损失是由于投资银行的误导所至。奥兰治县的资金主管西特仑就是其中一员，还有哈默史密斯和富勒姆的交易员，虽然他们的交易量巨大，但他们对于利率互换及其他利率衍生品的知识是惊人的缺乏。

如果一个企业的高管对于下级所提出的交易不理解，那么这个交易也不应该被通过。一个简单规则是如果一个交易的结构和做此交易的原因是如此复杂以至于管理人员都不能理解，这时我们基本可以确定这一交易对企业是不合适的。采用这一规则，宝洁公司的交易一定会得到否决。

保证彻底理解一个金融产品的方式是对这一产品进行定价，如果一个企业没有内部力量去对某产品进行定价，那么企业不应该交易这种产品。在实践中企业常常依赖投资银行所给出的关于价格的建议，这样做是很危险的。宝洁公司的案例就说明了这一点，当企业想对交易进行平仓时，产品的价格是由信孚银行的特有模型计算所得，这种做法不可能提供对价格的任何检验。

35.3.2 保证对冲者不要成为投机者

生活中一个不幸的事实是：对冲交易相对来讲枯燥无味，而投机行为却充满刺激。当一家公司雇用了一交易员来管理其外汇、商品以及利率风险时，以下的危险现象可能会产生：在最初时交易员工作勤奋，并赢得了公司高管的信任，这时他会对公司的风险暴露进行评估并采取对冲措施。但随着时间的推移，交易员逐渐确信他自己可以看透市场，并渐渐地变成投机者，在刚刚开始投机时，他可能一切顺利，但不久产生了交易损失，为了掩盖损失，交易员会将交易量加倍来进行赌博，进而又可能触发更大的损失，久而久之交易员行为可能会造成重大金融损失。

就像我们以前讨论的那样，风险额度一定要由高管来事先确定，对于额度的实施要设定一定的控制环节，企业在进行交易之前要对自身面临的外汇、利率、商品等风险做一个分析，交易决策是为了保证将风险控制在一定的可接受范围内，企业的交易与企业风险暴露的脱节是出现问题的明显前兆。

35.3.3 要警惕将资金部变成盈利中心

在过去的20年有一种将公司的资金部门转换为一个盈利中心的趋势，这么做看来有一定好处，资金部门有动力去减少融资费用并且尽可能提高自身的风险盈利，问题是资金部门所能取得的盈利是有限的，在进行融资或者将额外资金进行投资时，资金部门主管所面临的是一个有效市场，资金部门只有在承担更大风险的前提上才能改善自身的管理底线（即降低融资成本），公司的对冲项目可以给资金部门主管采取敏锐行动并因而提高盈利的机会，但我们应该记住对冲的主要目的是为了减少风险而不是增加预期盈利，如第3章所述，采用对冲决策后的结果比不采用任何对冲决策的结果更糟的可能性是50%。因此将资金部门变为交易中心的危险是使得资金部门（主管）成为投机者，因此像奥兰治县及宝洁公司的现象也就容易产生。

小 结

衍生产品的应用带给资金部的损失使许多资金管理人员忧心忡忡。针对这些损失，一些非金融机构宣称它们要缩减以至于杜绝使用衍生产品，这一决定很不幸，因为衍生产品确实可以给资金管理人员提供一些管理风险的有效工具。

这些损失强调了我们在第1章中提出的一个观点，衍生产品既可用于对冲也可用于投机；也就是说衍生产品既可减低风险也可以增加风险。损失产生的大多数情形是因为对衍生产品使用不当，在这些情形中，那些有明确或不明确责任对公司风险对冲的雇员却对风险进行了投机。

由这些损失所得出的一个重要借鉴是内部控制（internal control）的重要性。公司高管一定要对衍生产品的使用政策，以及允许雇员对市场变动所取的头寸要有一个明确的说明。管理人员要确保内控和政策的实施。如果仅仅给予某个人交易衍生产品的授权，但同时对这个人没有实现风险监控，这种情形往往会带来金融灾难。

推荐阅读

Dunbar, N. *Inventing Money: The Story of Long-Term Capital Management and the Legends Behind It*. Chichester, UK: Wiley, 2000.

Jorion, P. *Big Bets Gone Bad: Derivatives and Bankruptcy in Orange County*. New York: Academic Press, 1995.

Jorion, P. "How Long-Term Lost Its Capital," *Risk* (September 1999).

Ju, X., and N. Pearson. "Using Value at Risk to Control Risk Taking: How Wrong Can You Be?" *Journal of Risk*, 1 (1999): 5–36.

Persaud, A. D. (ed.) *Liquidity Black Holes: Understanding, Quantifying and Managing Financial Liquidity Risk*. London, Risk Books, 2003.

Sorkin, A. R., *Too Big to Fail*. New York: Penguin, 2009.

Tett, G. *Fool's Gold: How the Bold Dream of a Small Tribe at J. P. Morgan Was Corrupted by Wall Street Greed and Unleashed a Catastrophe*. New York: Free Press, 2009.

Thomson, R. *Apocalypse Roulette: The Lethal World of Derivatives*. London: Macmillan, 1998.

Zhang, P. G. *Barings, Bankruptcy and Financial Derivatives*. Singapore: World Scientific Publishing, 1995.



术 语 表

ABS 见资产支持证券(Asset-Backed Security)。

ABS CDO 由 ABS 所派生出的份额产品。

Accrual Swap 计息互换 利率互换的一种变形，一方的利息只在满足一定的条件时才进行累积。

Accrued Interest 应计利息 自上一个券息付出日到今天为止债券所累积的券息。

Adaptive Mesh Model 自适应网格模型 由 Figlewski 和 Gao 提出的一种模型，该模型在资产价格的重要区域上自动由粗网格的树形产生细网格的树形。

Agency Costs 代理费用 由于管理人不以股权人的利益为主，而给股权人带来的费用。

American Option 美式期权 一种在期权期限内随时可以行使的期权。

Amortizing Swap 摊还互换 在互换交易中的面值按某种指定的方式递减。

Analytic Result 解析结果 一种由某种方程式所表达的结果。

Arbitrage 套利 由两种或更多产品价格之间的漏洞锁定盈利的投资方式。

Arbitrageur 套利者 套利的参与者。

Asian Option 亚式期权 期权收益与指定时间段内标的资产的平均价格有关。

Ask Price 卖盘价 交易商卖出资产的价格，也被称为卖出价(Offer Price)。

Asked Price 索取价 见卖盘价(Ask Price)

Asset-Backed Security, ABS 资产支持证券 由贷款组合、证券、信用卡应收款以及替他资产所派生出的债券产品。

Asset-or-Nothing Call Option 资产或空手看涨期权 当标的资产价格高于执行价格时，期权收益等于标的资产的价格，否则期权收益为0。

Asset-or-Nothing Put Option 资产或空手看跌期权 当标的资产价格低于执行价格时，期权收益等于标的资产的价格，否则期权收益为0。

Asset Swap 资产互换 债券的券息与 LIBOR 加上溢差进行交换而形成的互换。

As-You-Like-It Option 任选期权 见选择人期权(Chooser Option)。

At-the-Money Option 平值期权 期权执行价格等于标的资产价格。

Average Price Call Option 平均价格看涨期权 期权收益等于标的资产价格平均值与执行价格之差与0的最大值。

Average Price Put Option 平均价格看跌期权 期权收益等于执行价格与资产价格平均值的差与0的最大值。

Average Strike Option 平均执行价格期权 期权收益依赖于资产价格与资产价格平均值的差。

Backdating 倒填日期 将文件日期修改成早于当前日期的行为(常常是违法的)。

Back Testing 回顾测试 利用历史数据对 VaR 进行检测的方式。

Backwards Induction 倒推归纳 一种由树形的底端倒推到树的起点来对期权定价的过程。

Barrier Option 障碍期权 期权收益与标的资

产的价格是否达到一定的障碍水平(即事先约定的水平)有关。

Base Correlation 基础相关系数 对于一个 X 值，由该相关系数所求出的由 0 ~ $X\%$ 的 CDO 份额价值与市场价值一致。

Basel Committee 巴塞尔委员会 负责全球银行监管的国际性委员会。

Basis 基差 商品即期价格与期货价格之间的差别。

Basis Point 基点 在描述利率时，一个基点等于1%的1%(即0.01%)。

Basis Risk 基差风险 当对冲时由于将来基差的不定性所引起的风险。

Basis Swap 基差互换 互换交易两方的利率计算分别与两个不同的浮动利率有关。

Basket Credit Default Swap 篮筐式信用违约互换 具有多个参考实体的信用违约互换。

Basket Option 篮筐式期权 收益依赖资产交易组合价值的期权。

Bear Spread 熊市差价 执行价格为 K_1 的看跌期权短头寸与执行价格为 K_2 的看跌期权长头寸的组合，其中 $K_2 > K_1$(熊市差价也可以由看涨期权来组成)。

Bermudan Option 百慕大式期权 期权持有者在期权期限内的一些指定的时间点上可以行使期权。

Beta 贝塔 用于度量一个资产系统风险的测度。

Bid-Ask Spread 买入索取价差价 见买入卖出价差价(Bid-Offer Spread)。

Bid-Offer Spread 买入卖出差价 卖出(或索取)价格与买入价格的差别。

Bid Price 买入价 交易商准备买入某资产所付的价格。

Binary Credit Default Swap 两点式信用互换 在此合约中，当参考实体违约时会触发一个固定数量的收益。

Binary Option 两值期权 具有不连续收益形式的期权。例如，现金或空手期权(Cash-or-Nothing Option)以及资产或空手期权(Asset-or-Nothing Option)。

Binomial Model 二项式模型 用于描述资产在一系列相继小时间区间内价格变化的模型。假设在一个小时间区间内价格变化只有两种可能。

Binomial Tree 二叉树 在二项式模型假设下描述资产变化的树型结构。

Bivariate Normal Distribution 二元正态分布 由两个相关并且分别服从正态分布的变量所组成的联合分布。

Black's Approximation 布莱克近似 由 Fisher Black 提出的用于对标的资产为支付股息股票的期权定价的近似方法。

Black's Model 布莱克模型 用于欧式期货期权定价的模型，这是布莱克-斯科尔斯模型的推广，当资产价格在到期日服从对数正态分布时，这种欧式期权定价模型有着广泛的应用。

Black-Scholes-Merton Model 布莱克-斯科尔斯-默顿模型 一种用于股票欧式期权的定价模型，由 Fisher Black、Myron Scholes 和 Robert Merton 建立。

Bond Option 债券期权 标的资产为债券的期权。

Bond Yield 债券收益率 使得债券资金流的贴现总和等于债券市场价格的贴现利率。

Bootstrap Method 票息剥离方法 由市场数据来计算零息收益率的一种方法。

Boston Option 波士顿期权 见延迟付款期权(Deferred Payment Option)。

Box Spread 盒式差价 由一个由看涨期权组成的牛市差价和一个由看跌期权组成的熊市差价所组成的期权组合。

Break Forward 断点远期 见延迟付款期权(Deferred Payment Option)。

Brownian Motion 布朗运动 见维纳过程(Wiener Process)。

Bull Spread 牛市差价 执行价格为 K_1 的看涨期权的长头寸与执行价格为 K_2 的看涨期权的短头寸的组合，其中 $K_2 > K_1$(牛市差价也可以由看跌期权来组成)。

Butterfly Spread 蝶式差价 此交易由执行价格为 K_1 的看涨期权的长头寸，执行价格为 K_3 的看涨期权的长头寸，以及两倍数量的执

行价格为 K_2 的看涨期权的短头寸组合而成，其中$K_3 > K_2 > K_1$，$K_2 = 0.5(K_1 + K_3)$，（蝶式差价也可以由看跌期权来组成）。

Calendar Spread **日历差价** 日历差价可以由一个具有某一执行价格与一定期限的看涨期权短头寸和具有同样执行价格，但具有较长期限看涨期权长头寸来构成（日历差价也可以由看跌期权来构成）。

Calibration **校正** 由市场上交易活跃的产品价格来计算隐含参数的方法。

Callable Bond **可赎回债券** 债券上条款注明发行者可在债券期限内的某些指定时间以约定的价格将债券购回。

Call Option **看涨期权** 在将来时刻以指定价格买入资产的权利。

Cancelable Swap **可取消互换** 互换的一方可以在指定的日期上终止互换交易。

Cap **上限** 见利率上限（Interest Rate Cap）。

Cap Rate **上限利率** 决定利率上限收益的利率。

Capital Asset Pricing Model **资本资产定价模型** 关于资产预期收益与资产的 Beta 系数之间的关系的模型。

Caplet **上限单元** 利率上限的组成成分。

Case-Shiller Index **Case-Shiller 指数** 美国的住房价格指数。

Cash Flow Mapping **现金流映射** 一种为了计算 VaR 而将产品拆解为一套标准零息债券的方法。

Cash-or-Nothing Call Option **现金或空手看涨期权** 当标的资产价格高于执行价格时，期权收益等于固定的现金数量，否则期权收益为 0。

Cash-or-Nothing Put Option **现金或空手看跌期权** 当标的资产价格低于执行价格时，期权收益等于某一固定的现金数量，否则期权收益为 0。

Cash Settlement **现金交割** 以现金方式而不是以实物形式将交易进行交割的方式。

CAT Bond **CAT 债券** 债券的券息以至于本金都可能在某种灾难（catastrophic）保险赔偿超出一定数量后而被扣除。

Cooling Degree Days, CDD **降温天数** 平均温度超出华氏 65 的数量与 0 的最大值，这里平均温度是指最高温度与最低温度的平均（子夜到子夜）。

CDO 见债务抵押债券（Collateralized Debt Obligation）。

CDO Squared **CDO 平方** 该债券的抵押证券组合由 CDO 份额组成，其信用风险的分配再以份额形式被分派到债券中。

CDX NA IG 由 125 家北美公司构成的资产组合。

CDS 见信用违约互换（Credit Default Swap）。

Central Clearing Party **中心结算商** 场外交易的中心结算机构。

Cheapest-to-Deliver Bond **最便宜交割债券** 芝加哥期货交易所的债券期货中可以用于交割的最便宜债券。

Cholesky Decomposition **乔里斯基分解** 一种对多元正态分布进行抽样的方法。

Chooser Option **选择人期权** 期权持有人在将来某时刻行使期权时可以选择拥有看涨期权或看跌期权。

Class of Options **期权分类** 见期权分类（Option Class）。

Clean Price of Bond **债券除息价格（洁净价）** 债券的报价，买入债券的价格（带息价格）等于这一报价加上应计利息。

Clearinghouse **结算中心** 交易所设定的，保证交易双方履行交易所衍生产品交易义务的实体（也被称为结算机构）。

Clearing Margin **结算保证金** 结算中心所要求的保证金数量。

CMO 见房产抵押债券（Collateralized Mortgage Obligation）。

Collar **双限** 见利率双限（Interest Rate Collar）。

Collateralization **抵押品策略** 在衍生产品交易中一方向另一方提供抵押品的运作方式。

Collateralized Debt Obligation **债务抵押债券** 一种将信用风险打包的方式，这是一个由某种交易组合而派生出来几种不同债券的形

式，违约的摊派服从事先指明的规则。

Collateralized Mortgage Obligation 房产抵押债券 这是一个由房屋贷款派生出的债券形式。债券投资者被分成若干类，本金的偿还以事先指明的规则被分配给不同的投资者。

Combination 组合 同一标的资产的看涨和看跌期权组合。

Commodity Futures Trading Commission 商品期货交易管理委员会 此委员会的职责是对美国商品期货交易进行监管。

Commodity Swap 商品互换 互换交易一方的现金流与商品价格有关。

Compound Correlation 复合相关系数 由CDO份额所隐含的相关系数。

Compound Option 复合期权 期权上的期权。

Compounding Frequency 复利频率 用于计算利率的约定方式。

Compounding Swap 复合利率互换 互换的利息不在中间交换，而是复合到最后进行交换。

Conditional Value at Risk，C-VaR 条件VaR 在$(100-X)\%$的盈利/亏损分布的条件下，在N天内的损失期望值，N为展望期，$X\%$为置信水平。

Confirmation 交易确认书 在场外市场用于确认双方口头交易的书面合约。

Constant Elasticity of Variance (CEV) Model 常方差弹性模型 在一个短时间内，此模型所描述变量变化的方差与变量本身的大小成正比。

Constant Maturity Swap，CMS 固定期限互换 互换协议的一方的利率为某一固定期限的互换利率，另一方为浮动利率或固定利率。

Consumption Asset 消费资产 用于消费而不是投资的资产。

Contango 期货溢价 期货价格高于将来即期价格的期望值。

Continuous Compounding 连续复利 利率报价的一种方式，当报价复利区间变得越来越小时，其极限形式就是这里的连续复利。

Control Variate Technique 控制变量技术 这种技术可用于改善数值计算的精度。

Convenience Yield 便利收益率 用于计量拥有某种资产而带来的便利，这种便利是期货合约的长头寸持有者所不拥有的。

Conversion Factor 转换因子 在芝加哥交易所中交易的期货合同中用于计算交割债券数量的因子。

Convertible Bond 可转换债券 一种由公司发行的并可以在债券期限某时刻转换为一定数量股权的债券。

Convexity 曲率 测定债券价格同收益率之间曲线函数的曲率。

Convexity Adjustment 曲率调整 这一术语被应用之处很多，例如它可以用于描述将期货利率转换为远期利率的调节量，它还可以用于将对某些产品利用Black模型定价时对于远期利率的调节。

Copula 一种定义服从已知分布的变量之间相关系数的方法。

Cornish-Fisher Expansion Cornish-Fisher展开 概率分布的百分位数与其矩之间的近似关系。

Cost of Carrying 持有成本 存储成本加上购买资产融资费用再减去资本的收益。

Counterparty 交易对手 金融交易的另一方。

Coupon 券息 债券所付的利息。

Covariance 协方差 描述两个变量之间的线性关系(等于变量的相关系数乘以它们的标准差)。

Covered Call 备保看涨期权 持有欧式期权短头寸与持有资产长头寸的组合。

Crashophobia 暴跌恐惧症 人们对类似于1987年股票大跌的恐惧症，有人认为这一现象造成了市场参与者提高深度虚值看跌期权的价值。

Credit Contagion 信用蔓延 一家公司的违约导致其他公司也会违约的倾向。

Credit Default Swap 信用违约互换 信用违约互换的买入方可以在债券违约时以面值的价格将债券卖给信用互换的卖出方。

Credit Derivative 信用衍生产品 收益与某家

公司或多家公司信用有关的衍生产品合约。

Credit Rating 信用等级 债券信用的一种度量。

Credit Ratings Transition Matrix 信用评级转移矩阵 此数表给出了某公司在某时间内由某一信用等级转换为另一信用等级的概率。

Credit Risk 信用风险 在衍生产品交易中因为交易对手违约而造成的风险。

Credit Spread Option 信用差价期权 期权收益与两个资产收益率之差有关。

Credit Value Adjustment 信用调节量 对衍生产品价值的调节，以反映交易对手的风险。

Credit Value at Risk 信用风险价值度 对应于某一置信区间，信用损失不能超出的数量。

Cross Hedging 交叉对冲 采用不同的资产来对冲另一资产所产生的风险暴露。

Cumulative Distribution Function 累积分布函数 变量小于 x 的概率作为自变量 x 函数。

Currency Swap 货币互换 某种货币的本金以及利息同另外一种货币的本金以及利息进行互换的合约。

Day Count 计天方式 为了计算利息而设定的用于计算天数的方法。

Day Trade 短线交易 在当天进入并在同一天平仓的交易。

Default Correlation 违约相关性 用于计量两个公司同时违约的趋势。

Default Intensity 违约密度 见风险率(Hazard Rate)。

Default Probability Density 违约概率密度 度量在将来短暂区间内的无条件违约概率。

Deferred Payment Option 延迟付款期权 期权费用被推迟到期权的到期日付出。

Deferred Swap 延期互换 在将来开始的互换交易，也被称为远期互换(Forward Swap)。

Delivery Price 交割价格 在远期合约中同意(可能在一段时间之前)收入或付出的价格。

Delta 衍生产品价格变化同标的资产价格变化的比率。

Delta Hedging Delta 对冲 为了使衍生产品交易组合价格与标的资产价格微小变化无关的一种对冲机制。

Delta-Neutral Portfolio Delta 中性交易组合 Delta 为 0 的交易组合，这种交易组合的价格同标的资产价格的微小变化无关。

DerivaGem 在作者网页上可以下载的用于计算期权价格的软件。

Derivative 衍生产品 由某种资产而派生出来的产品。

Deterministic Variable 确定性(非随机)变量 变量在将来的值是已知的。

Diagonal Spread 对角差价 两个具有不同期限与不同执行价格的看涨期权组合(对角差价也可以由看跌期权来组成)。

Differential Swap 交叉货币度量互换 互换交易中将一种货币下的浮动利率与另一种货币下的浮动利率相交换，两种利率均应用同一本金。

Diffusion Process 扩散过程 在此模型下，资产以连续形式变化。

Dirty Price of Bond 带息价格 债券的现金价格。

Discount Bond 折扣债券 见零息债券(Zero Coupon Bond)。

Discount Instrument 折扣产品 不提供券息的产品，例如短期国债。

Diversification 分散化 将投资组合分布于不同资产的投资方式。

Discount Rate 贴现率 由短期债券或其他产品收益占面值的百分比所得出的年收益率。

Dividend 股息 股票发行人给出的现金收益。

Dividend Yield 股息收益率 票息与股票价格的百分比。

Dollar Duration 绝对额久期 债券的修正久期与债券价格的乘积。

Down-and-In Option 下跌-敲入期权 标的资产价格下跌到一定水平之后，这一期权才会存在。

Down-and-Out Optionn 下跌-敲出期权 标的资产价格下跌到一定水平之后，这一期权将不再存在。

Downgrade Trigger 降级触发 合约中的一种

条款，它指明当某方的信用评级低于一定水平时，合约将终止，并以现金交割。

Drift Rate　漂移变化率　一个随机变量每单位时间的增长速度。

Duration　久期　用以度量债券的平均寿命，这一测度也是债券价格百分比变化同债券收益率变化比率的近似。

Duration Matching　久期匹配　将金融机构资产久期与负债久期进行匹配的一种过程。

Dynamic Hedging　动态对冲　为了对冲期权头寸，需要不断调节持有的标的资产数量的对冲过程。对冲目的一般是为了保证交易组合 Delta 中性。

Early Exercise　提前行使　在到期前行使期权。

Efficient Market Hypothesis　有效市场假设　资产价格反映了相关信息的一种假设。

Electronic Trading　电子交易　使得买方与卖方得到匹配的电子计算机系统。

Embedded Option　内含期权　产品中不可分割的期权部分。

Empirical Research　实证研究　基于历史数据的研究方式。

Employee Stock Option　雇员股票期权　公司授予其雇员在本公司股票上的看涨期权。

Equilibrium Model　均衡模型　一种由经济模型来导出的利率变化模型。

Equity Swap　股权互换　股票(或股票组合)收益与固定利率或浮动利率进行交换的合约。

Equity Tranche　股权份额　首先承担损失的份额。

Eurocurrency　欧洲货币　一种脱离其发行国的货币系统控制的货币。

Eurodollar　欧洲美元　存到美国之外银行的美元。

Eurodollar Futures Contract　欧洲美元期货合约　关于欧洲美元的期货合约。

Eurodollar Interest Rate　欧洲美元利率　欧洲美元存款利率。

European Option　欧式期权　只能在期权到期日才能被行使的期权。

EWMA　指数加权移动平均。

Exchange Option　互换期权　期权持有者有权以一种资产来换取另一种资产。

Ex-dividend Date　除息日　当公布票息时，除息日也被指明，在除息日之前买入股票的投资者会收到股息。

Exercise Limit　行使限额　期权持有人在任意 5 个连续的交易日可行使期权的最大限额。

Exercise Multiple　行使倍数　在雇员期权被行使时股票价格与执行价格的比。

Exercise Price　执行价格　在期权合约中资产可以被买入或被卖出的固定价格(此价格也被称为敲定价格(Strike Price))。

Exotic Option　特种期权　非标准期权。

Expectations Theory　预期理论　该理论认为远期利率等于未来的即期利率期望值。

Expected Shortfall　预期亏损　见条件风险价值度(Conditional Value at Risk)。

Expected Value of a Variable　变量的期望值　变量的取值被其出现概率加权后得出的加权平均值。

Expiration Date　到期日　合约期限的终止日。

Explicit Finite Difference Method　显式有限差分方法　通过求解微分方程来对衍生产品定价的一种方法。衍生产品在时间 t 的价格与其在时间 $t+\Delta t$ 的三个价格存在一种关系，这一方法在实质上就是三叉树方法。

Exponentially Weighted Moving Average Model　指数加权移动平均模型　对于历史数据施与某种指数权重来进行预测的模型，有时这种模型被用于 VaR 的过程中方差以及协方差的计算。

Exponential Weighting　指数加权　这种加权方式与数据的新旧有关，对于 t 时刻的加权权重下等于 λ 乘以 $t-1$ 时刻的权重，这里 $\lambda<1$。

Exposure　风险暴露　对手违约带来的损失最大值。

Extendable Bond　可展期债券　债券持有人有权延迟债券的期限。

Extendable Swap　可延期互换　互换的一方有权延长互换的期限。

Factor　因子　不定性的起源。

Factor Analysis **因子分析** 这一方法与主成分分析法(Principal Component Analysis)相似，其目的是由许多变量的相关变化中提取少数，但可解释这些变化的因素。

FAS 123 美国关于雇员期权的会计准则。

FAS 133 美国关于用于对冲产品的会计准则。

FASB 财务会计准则委员会。

Financial Intermediary **金融媒介** 将经济环境中对不同实体的资金流动提供协助的银行或其他金融机构。

Finite Difference Method **有限差分法** 对微分方程的一种求解方法。

Flat Volatility **单一波动率** 当对上限定价时，采用同一波动率来对所有的上限单元定价时的波动率。

Flex Option **灵活期权** 交易所内的，交易员可提供的非标准化条款期权。

Flexi Cap **Flexi 上限** 在此上限(Cap)交易中，可行使的上限单元数量被限制。

Floor **下限** 见利率下限(Interest Rate Floor)。

Floor-Ceiling Agreement **下限-上限协议** 见双限(Collar)。

Floorlet **下限单元** 利率下限交易中对应于一段时间区间的组成元素。

Floor Rate **下限利率** 利率下限交易中阐明的利率。

Foreign Currency Option **外汇期权** 有关汇率的期权。

Forward Contract **远期合约** 合约约定买方和卖方在将来某指定的时刻以指定价格买入或卖出某种资产。

Forward Exchange Rate **远期汇率** 汇率的远期合约价格。

Forward Interest Rate **远期利率** 由今天市场利率所得出的应用于将来某时间段的利率。

Forward Price **远期价格** 远期合约中使得合约价格为 0 的交割价格。

Forward Rate **远期率** 由今天的零息利率所隐含出的用于将来时间段的利率。

Forward Rate Agreement, FRA **远期利率合约** 交易双方达成的在将来某时刻以某种固定利率对于一定面值来计息的协议。

Forward Risk-Neutral World **远期风险中性世界** 当资产的风险市场价格等于其波动率时，这样的世界被称为远期风险中性世界。

Forward Start Option **远期开始期权** 将来某时刻开始的平值期权。

Forward Swap **远期互换** 见延期互换(Deferred Swap)。

Futures Commission Merchants **期货佣金经纪人** 执行客户指令的期货交易商。

Futures Contract **期货合约** 一种约定双方在将来某时刻以指定价格买卖资产的合约，此合约每天都要进行结算。

Futures Option **期货期权** 期货上的期权。

Futures Price **期货价格** 期货合约中当前的交割价格。

Futures-Style Option **期货式期权** 关于期权收益的期货合约。

Gamma Delta 的变化与资产价格变化的比率。

Gamma-Neutral **Gamma 中性** Gamma 为 0 的交易组合。

GARCH Model **GARCH 模型** 一种预测波动率的模型，在此模型中方差具有回归均值的特性。

Gaussian Copula Model **高斯 Copula 模型** 一种定义两个或多个变量相关性的模型，在某些信用衍生产品定价中，该模型被用于定义违约时间的相关性结构。

Gaussian Quadrature **高斯求积公式** 一种在正态分布变量上的积分方式。

Generalized Wiener Process **广义维纳过程** 在此随机过程中，变量在时间段 t 内的变化服从正态分布，并且均值和方差均与 t 成正比。

Geometric Average **几何平均** n 个数字乘积的 n 次方根。

Geometric Brownian Motion **几何布朗运动** 常常用于描述资产变化的随机过程，其中标的资产对数的变化服从广义维纳过程。

Girsanov's Theorem **Girsanov 定理** 这一定

理说明，当我们进行测度转换时（例如，从现实世界转换到风险中性世界），变量的漂移率会有所变化，而波动率不变。

Greeks 希腊值 Delta、Gamma、Vega、Theta 以及 Vega 等对冲参数。

Haircut 折扣 当计算资产抵押品时采用的折扣。

Hazard Rate 风险率 一种用于度量在没有前期违约条件下一段短时期内违约概率的测度。

HDD 升温天数，一天平均温度超出华氏 65°的数值与 0 的极大值，这里平均温度为一天最高温度与最低温度的平均值（子夜到子夜）。

Hedge 对冲 用于减小风险的交易。

Hedge Fund 对冲基金 这类基金所受限制要远少于共同基金，它们可以利用衍生产品，采用卖空交易策略，但是不能向公众发行证券。

Hedger 对冲者 进入对冲交易的个人。

Hedge Ratio. 对冲比率 对冲产品数量与被对冲头寸的比率。

Historical Simulation 历史模拟 基于历史数据的模拟方式。

Historic Volatility 历史波动率 由历史数据估计的波动率。

Holiday Calendar 假期日历 用于定义假期的日历，这一日历的目的是为了确定互换的付款日期。

IMM Dates IMM 日期 3 月份、6 月份、9 月份和 12 月份的第三个星期三。

Implicit Finite Difference Method 隐式有限差分 通过求解微分方程来对衍生产品定价的方法。在该方法中，衍生产品在 $t+\Delta t$ 时刻的价格与其在 t 时刻的 3 个价格之间满足一定的关系。

Implied Correlation 隐含相关系数 利用高斯 Copula 模型或其他模型由信用衍生产品价格隐含出的相关系数。

Implied Distribution 隐含分布 由期权价格所隐含出的将来资产价格的分布。

Implied Tree 隐含树形 用于描述资产价格未来走向并与所观察到的市场期权价格一致的树形结构。

Implied Volatility 隐含波动率 使 Black-Scholes 模型（或类似模型）的价格等于其市场价格的波动率。

Implied Volatility Function (IVF) Model 隐含波动率函数模型 模型的设计保证了模型价格与市场欧式期权价格一致。

Inception Profit 起始盈利 由衍生产品的卖出价格高于理论价格所产生的盈利。

Index Amortizing Swap 指数递减互换 见指数本金互换（Index Principal Swap）。

Index Arbitrage 指数套利 此套利策略涉及交易指数内所含有的股票和股指期货。

Index Futures 指数期货 股指或其他指数上的期货合约。

Index Option 指数期权 股指或其他指数的期权。

Index Principal Swap 指数本金互换 互换中的本金随着时间的变化而减小，本金减小的速度与利率水平有关。

Initial Margin 初始保证金 在最初交易期货时所需要的现金保证金。

Instantaneous Forward Rate 瞬时远期利率 将来一个非常短的时间段的远期利率。

Interest Rate Cap 利率上限 在利率高于一定水平时，这种期权会产生收益，这里对应的利率为需要定期设定的浮动利率。

Interest Rate Collar 利率双限 一个利率上限和下限的组合。

Interest Rate Derivative 利率衍生产品 收益与将来利率有关的衍生产品。

Interest Rate Floor 利率下限 在利率低于一定水平时，这种期权会产生收益，这里对应的利率为需要定期设定的浮动利率。

Interest Rate Option 利率期权 收益与将来利率有关的期权。

Interest Rate Swap 利率互换 固定利率与浮动利率的互换合约，双方用于计算利息的本金值相同。

International Swap and Derivatives Association 国际互换和衍生产品协会 该协会是为了场

外交易而设定，这一协会颁布了用于场外交易的标准协议。

In-the-Money Option **实值期权** 这种期权或者是(a)资产价格大于执行价格的看涨期权，和(b)资产价格低于执行价格的看跌期权。

Intrinsic Value **内涵价值** 对于看涨期权，此价值等于资产价格超出执行价格的值与0的最大值，对于看跌期权，此价值等于执行价格超出资产价格的值与0的最大值。

Inverted Market **反向市场** 在反向市场中期货价格随期限的增大而减小。

Investment Asset **投资资产** 一种被相当数量的个人拥有并用于投资的资产。

IO 纯息债券。

ISDA 见国际互换和衍生产品协会(International Swap and Derivatives Association)。

Itô Process **伊藤过程** 在一个短的时间段 Δt 内，某随机过程所描述的随机变量变化服从正态分布。变化的期望值和方差与 Δt 成比例，但不一定为常数。

Itô's Lemma **伊藤引理** 由描述某一变量的随机过程来导出描述该变量的函数的随机过程的数学结论。

ITraxx Europe **ITraxx 欧洲** 由125个欧洲投资级公司构成的组合。

Jump-Diffusion Model **跳跃-扩散模型** 在扩散过程中(例如，几何布朗运动)附加有价格跳跃的模型。

Kurtosis **峰度** 用于检验尾部肥瘦的测度。

LEAPS 期限较长的股票或股指期权。

LIBID 伦敦同业银行借款利率，即银行对于借入欧洲货币的利息率(也就是银行愿意以这一利率从其他银行借入资金)。

LIBOR 伦敦同业银行拆出利率，即银行对于存入欧洲货币的利息率(也就是银行愿意以这一利率将资产借给其他银行)。

LIBOR Curve **LIBOR 曲线** Libor零息利率作为期限的函数。

LIBOR-in-Arrears Swap **LIBOR 后置互换** 在此交易中，利率观察日与付款日等同(利率的计算不是取决于前一阶段所观察到的利率)。

Limit Move **涨跌停变动** 交易所限定的在一交易时间区间内价格变化的最大限额。

Limit Order **限价指令** 只在达到某指定价格或更优惠价格时才执行的指令。

Liquidity Preference Theory **流动性偏好理论** 这一理论指出远期利率会高于将来即期利率的期望值。

Liquidity Premium **流动性溢价** 远期利率超出将来即期利率期望的数量。

Liquidity Risk **流动性风险** 一个资产的卖出价格不能达到其理论价格的风险。

Local **自营经纪人** 在交易大厅为自己账户，而不是为其他客户进行交易的交易员。

Lognormal Distribution **对数正态分布** 一个变量服从对数正态分布是指这一变量的对数服从正态分布。

Long Hedge **长头寸(多头)对冲** 涉及进入期货长头寸(多头)的对冲策略。

Long Position **长头寸(多头)** 买入某资产的交易。

Lookback Option **回望期权** 在到期日期权收益与资产价格与在一段时间内所取得的最大值或最小值有关。

Low Discrepancy Sequence **低偏差序列** 见伪随机序列(Quansi-Random Sequences)。

Maintenance Margin **维持保证金** 当交易员的保证金低于一定水平时，交易员会被要求增加保证金，以使得保证金恢复到最初保证金的水平。

Margin **保证金** 期货或期权交易员必须维持的现金存款(或其他形式的证券)数量。

Margin Call **保证金催付** 当保证金账号存款低于维持保证金水平时，这时所做出的增加额外保证金的要求。

Market Maker **做市商** 给出买入与卖出两种报价的交易员。

Market Model **市场模型** 被交易员广泛采用的模型。

Market Price of Risk **风险市场价格** 投资者检测风险收益替换关系的测度。

Market Segmentation Theory **市场分割理论**

此理论认为短期利率和长期利率相互无关。

Marking to Market 按市场定价 对产品重新定价时，反映市场变量当前市场价格的做法。

Markov Process 马尔科夫过程 随机过程所描述的变量在将来一个较短的时间段内的变化只与变量在时间段开始时的取值有关，而与其历史值无关。

Martingale 鞅 漂移率为 0 的随机过程。

Maturity Date 到期日 合约的终结时间。

Maximum Likelihood Method 极大似然方法 一种选择参数的方法，由这一方法所得出的参数可以保证出现观察值的概率达到最大。

Mean Reversion 均值回归 市场变量(例如波动率或利率)回归到长期平均水平的倾向。

Measure 测度 有时也被称为概率测度，它定义了风险的市场价格。

Mezzanine Tranche 中层份额 损失发生在股权份额之后，但在高级份额之前的份额。

Modified Duration 修正久期 一种对标准久期的修正，其目的是为了更准确地描述债券价格变化同收益率变化的比率关系，修正久期考虑了收益率报价的复利频率。

Money Market Account 货币市场账户 在最初投资为 1 美元，在时刻 t 该投资在很短的时间区间内的增长率等于该时间区间上的无风险利率。

Monte Carlo Simulation 蒙特卡罗模拟 一种对市场变量进行随机抽样而为衍生产品定价的过程。

Mortgage-Backed Security 房产抵押贷款证券 此债券持有人的现金流来自与某一住房抵押贷款组合。

Naked Position 裸露期权 一个不与标的资产长头寸结合的看涨期权短头寸。

Netting 净额结算 在对手违约时能够使得具有正价值的合约与负价值的合约相互抵消的能力。

Newton-Raphson Method Newton-Raphson 方法 一种用于对非线性方程的迭代求解法。

No-Arbitrage Assumption 无套利假设 假定在市场上没有套利机会的假设。

No-Arbitrage Interest Rate Model 无套利利率模型 一种描述利率变化的模型，模型所产生初始利率期限结构与所观察到的市场利率期限结构一致。

Nonstationary Model 非平稳模型 此模型中的波动率参数为时间的函数。

Nonsystemic Risk 非系统风险 能够被分散的风险。

Normal Backwardation 正常期货溢价 期货价格低于将来即期价格的期望值。

Normal Distribution 正态分布 统计上标准的铃状分布。

Normal Market 正常市场 期货价格随着期限增大而增长的市场。

Notional Principal 名义本金 用于计算利率互换付款量的本金数量，这里的本金是一种“面值”(notional)形式，因为这一本金有可能被用于也有可能不被支付。

Numeraire 计价单位 该参数定义了证券价格的计量单位。例如，如果 IBM 的股票为计价单位，那么所有的证券均以 IBM 股票计量。假如 IBM 股票的价格为 80 美元，某证券的价格为 50 美元，那么当 IBM 股票为计价单位时，这一证券的价格为 0.625。

Numerical Procedure 数值方法 在没有解析公式时所采用的计算方法。

Option Clearing Corporation，OCC 期权结算中心 见结算中心(Clearinghouse)。

Offer Price 卖出价 交易商给出的资产卖出价格(也被称为索取价格(Ask Price))。

Open Interest 未平仓合约 期货市场上所有的长头寸数量(等于市场上所有的短头寸数量)。

Open Outcry 公开喊价 交易员在交易大厅相见，以公开喊价的形式报出价格的一种交易方式。

Option 期权 买入或卖出资产的权利。

Option-Adjusted Spread 期权调整差价 此差价附加于政府债券收益率之上来使得利率衍生产品价格等于其理论价格。

PDG

Option Class 期权种类 对于某一股票的不同期权类型(看涨或看跌)。

Option Series 期权系列 具有相同期限和执行价格的某个期权种类的所有期权。

Order Book Official 指令登记员 见指令登记经纪人(Board Broker)。

Out-of-the-Money Option 虚值期权 这种期权是(a)资产价格低于执行价格的看涨期权,或者是(b)资产价格高于执行价格的看跌期权。

Overnight Indexed Swap 隔夜指数互换 互换中的一个区间的固定利率(例如一个月)与这一区间上的隔夜利率的平均值进行交换。

Over-the-Counter Market 场外交易市场 交易员通过电话交流的市场,这里的交易员通常是代表金融机构,企业或资金管理公司。

Package 组合期权 由标准欧式看涨期权、标准欧式看跌期权、远期合约以及标的资产本身构成的证券组合。

Parallel Shift 平行移动 收益曲线上每一点移动量均等同的变化形式。

Par Value 面值 债券的本金。

Par Yield 面值收益 使得债券价格等于本金的券息。

Parallel Shift 平行移动 收益率曲线上的所有点的变化均等。

Parisian Option 巴黎期权 当资产价格比障碍值高或低的时间超出一段预先预定的时间长度时,期权才被敲入或敲出。

Path-Dependent Option 依赖路径期权 期权的收益不仅只是与资产的终端值有关,并且与资产价格变化的路径有关。

Payoff 收益 在期权或其他衍生产品到期时所实现的现金收入。

Plain Vanilla 简单 用于描述标准交易的术语。

P-Measure P 测度 现实世界的测度。

PO 纯本金债券。

Poisson Process 泊松过程 描述事件发生次数的一种随机过程,在时间段 Δt 内,事件发生的概率为 $\lambda \Delta t$,其中 λ 为过程的密度。

Portfolio Immunization 组合免疫 使得资产组合与利率变化比较不太敏感的一种方法。

Portfolio Insurance 证券组合保险 此交易策略保证交易组合的价值不低于一定的水平。

Position Limit 头寸限额 交易员(或一组交易员)所能持有的头寸限额。

Premium 期权付费 期权的价格。

Prepayment Function 提前偿付函数 通过此函数由其他变量来估计住房贷款本金提前偿付的数量。

Principal 本金 债券产品的面值。

Principal Components Analysis 主因子分析 一种由大量相关因子中找出少数因子来描述其大部分变化的分析方法(与因子分析法(Factor Analysis)类似)。

Principal Protected Notes 保本型证券 产品回报取决于风险资产的表现,但最终回报不会为负,即投资者本金受到保护。

Program Trading 程序交易 交易指令由计算机自动产生并由计算机向交易所自动发出交易指令。

Protective Put 保护看跌期权 看涨期权与标的资产的组合。

Pull-to-Par 收敛于面值现象 债券价格在到期时收敛于面值的现象。

Put-Call Parity 看跌-看涨期权平价关系式 具有同样执行价格与期限的欧式看涨期权和欧式看跌期权所满足的关系式。

Put Option 看跌期权 在将来某时刻以某指定价格卖出某资产的权利。

Puttable Bond 可提前退还债券 持有此债券的投资者在将来某时刻有权以预先指定价格将债券卖给债券发行人。

Puttable Swap 可赎回互换 互换协议的一方有权提前中止互换协议。

Q-Measure Q 测度 风险中性测度。

Quanto 期权的收益由某种货币决定,但付出收益的货币品种却为另一种货币。

Quasi-random Sequences 伪随机序列 蒙特卡罗模拟所采用的数值序列,该序列表示不同结果的代表值的样本,而并非随机抽样。

Rainbow Option 彩虹期权 期权收益与两个

或多个标的资产变量有关。

Range Forward Contract **远期范围合约** 看涨期权长头寸与看跌期权短头寸的组合，或者看涨期权短头寸与看跌期权长头寸的组合。

Ratchet Cap **执行价格调整上限** 利率上限中一个计利区间的上限利率等于前一计利区间的利率加上一个溢差。

Real Option **实物期权** 期权涉及商品实物(而不是金融产品)，商品实物可以是土地、工厂或设备等。

Rebalancing **再平衡** 对交易头寸的调整，其目的一般是为了保证 Delta 中性。

Recovery Rate **回收率** 违约时债券收回价值作为面值的百分比。

Reference Entity **参考实体** CDS 中指明的信用保护实体。

Repo **再回购** 再回购协议的简称，这种协议的一方以卖出资产并保证在今后以稍高价格购回的形式借入资金。

Repo Rate **再回购利率** 在回购协议中采用的利率。

Reset Date **重置日(定息日)** 在互换和上限/下限协议中，对一个区间上利率的设定时间。

Reversion Level **回归水平** 市场变量(例如波动率)回归到的水平。

Rho 衍生产品价格变化同利率变化的比率。

Rights Issue **优先权证** 对现有证券持有人发行在将来以某固定价格购买新发行股票的权利。

Risk-Free Rate **无风险利率** 不承担任何风险的收入的利率。

Risk-Neutral Valuation **风险中性定价** 在期权和其他衍生产品定价中假设世界为风险中性，风险中性定价给出的价格不只是对于风险中性世界成立，在所有世界，其价格均正确。

Risk-Neutral World **风险中性世界** 在这一世界中，投资者对所承担风险不索取额外回报。

Roll Back **倒推** 见倒推归纳(Backwards Induction)。

Scalper **投机者** 此类投资者持有债券的时间非常短暂。

Scenario Analysis **情形分析** 一种分析市场变量的不同变化情形对于组合价值影响的分析过程。

SEC 美国证券交易委员会。

Securitization **证券化** 将一投资组合资产的风险进行分配的过程。

Settlement Price **结算价格** 在交易日结束前合约价格的平均交易价格，此价格用于按市场定价。

Short Hedge **短头寸(空头)对冲** 此对冲采用期货的短头寸(空头)。

Short Position **短头寸(空头)** 交易员卖出自己并不拥有的证券。

Short Rate **短期利率** 适用于短暂时间区间的利率。

Short Selling **卖空交易** 由其他投资者处借入资产并在市场上变卖的交易形式。

Short-Term Risk-Free Rate **短期无风险利率** 见短期利率(Short Rate)。

Shout Option **喊价期权** 在该期权中，期权持有者在期权到期前的某一个指定时刻有权锁定收益的最小值。

Simulation **模拟** 见蒙特卡罗模拟(Monte Carlo Simulation)

Specialist **专家** 在交易所负责管理限价指令(limit order)的管理人员，这些专家不向其他交易人员公布限价指令信息。

Speculator **投机者** 市场上持有某个头寸的个人，通常他/她对于资产价格的上涨或下跌进行下赌。

Spot Interest Rate **即期利率** 见零息利率(Zero Coupon Interest Rate)。

Spot Price **即期价格** 即期交割的资产价格。

Spot Volatilityies **即期波动率** 采用不同波动率对于一个区间上限定价，并以此取得对整个利率上限定价的波动率曲线。

Spread Transaction **差价交易** 期权的收益等于两个市场变量的差值。

Stackand Roll **滚动对冲** 将短期期货叠在一起向前滚动来对冲长期风险暴露的方式。

Static Hedge **静态对冲** 头寸在设定后无须调整的对冲策略。

Static Options Replication **静态期权复制** 一种对交易组合进行对冲的方式，这一对冲过程涉及寻求另一交易组合来使得其在某边界上的值与被对冲的交易组合在同一边界上的值近似相等。

Step-up Swap **本金逐步增加互换** 此互换中的本金随时间的变化以某种既定的方式递增。

Sticky Cap **黏性上限** 在这一利率上限中，某一计利区间的上限利率等于前一计利区间封顶后的利率加上一个溢差。

Stochastic Process **随机过程** 描述随机变量将来可能变化的数学方程。

Stochastic Variable **随机变量** 将来价值不确定的变量。

Stock Dividend **股票式股息** 股票的股息以额外附加股票的形式付出。

Stock Index **股指** 用于跟踪股票组合的指数。

Stock Index Futures **股指期货** 股票指数上的期货产品。

Stock Index Option **股指期权** 股指上的期权。

Stock Option **股票期权** 股票上的期权。

Stock Split **股票拆股** 每一份既存股票被转换为更多的股票。

Storage Costs **储存费用** 储存某种商品的费用。

Straddle **跨式期权** 一个看涨期权的长头寸与一个看跌期权的长头寸的交易组合，这里的看涨期权和看跌期权具有同样的执行价格与到期日。

Strangle **异价跨式期权** 一个看涨期权长头寸与一个具有相同到期日的看跌期权长头寸的交易组合，这里的看涨期权和看跌期权具有不同的执行价格。

Strap **带式组合** 两个看涨期权长头寸与一个看跌期权长头寸的交易组合，这里的看涨期权和看跌期权具有同样的执行价格与到期日。

Stress VaR **压力风险价值度** 利用受压市场数据来计算出的风险价值度。

Stress Testing **压力测试** 用于检验极端市场变化对于组合价值的影响。

Strike Price **执行(敲定)价格** 期权合约中所指明的资产买入或卖出的价格(也被称为执行价格(Exercise Price)。

Strip **序列组合** 一个看涨期权长头寸与两个看跌期权长头寸的交易组合，这里的看涨期权和看跌期权具有同样的执行价格与到期日。

Strip Bonds **剥离债券** 长期国债中与本金分离的券息所产生的零息债券。

Subprime Mortgage **次级住房抵押贷款** 向信用历史较差或无信用历史的贷款人所发放的住房抵押贷款。

Swap **互换协议** 在将来以某指定的形式交换现金流的合约。

Swap Rate **互换利率** 保证利率互换价格为0的固定互换利率。

Swaption **互换期权** 一种在将来某时刻以某一固定利率进入利率互换的权力。

Swing Option **摆动期权** 这些合约通常阐明期权持有人以某指定价格每天接受电力的最低数量以及在每月所接收电力的最高数量，期权持有人可以变化(摆动)在每月买入电力的快慢，但一般来讲合约对期权持有人的变化次数有一定限制。

Synthetic CDO **合成 CDO** 由卖出信用违约互换而构成的 CDO。

Synthetic Option **合成期权** 由交易标的资产而构成的期权。

Systematic Risk **系统风险** 不能被分散的风险。

Tailing the Hedge **尾随对冲** 为了反映每天的结算而对对冲期货合约的数量进行调整的方式。

Tail Loss **尾部损失** 见预期亏损(Expected Shortfall)。

Take-and-Pay Option **且取且付期权** 见摆动期权(Swing Option)。

Term Structure of Interest Rates **利率期限结构** 利率与其期限的变化关系。

Terminal Value **终端值** 在合约到期时产品的价值。

Theta 随着时间的推移，期权或衍生产品的价值变化率。

Time Decay **时间衰减** 见 Theta。

Time Value **时间价值** 由于今天与到期日之间的时间而产生的期权价值(等于期权价值减去内涵价值)。

Timing Adjustment **时间调整** 对某一变量的远期价格进行调整以便反映衍生产品收益发生的时刻。

Total Return Swap **总收益互换** 在这一互换协议中，资产(比如债券)收益与 LIBOR 加上一个溢差进行交换，资产收益包括收入(比如券息)以及资产价格的升值。

Tranche **份额** 具有不同风险特征的证券的一部分，例如 CDO 的份额。

Transaction Costs **交易费用** 进行交易而产生的费用(佣金以及取得的价格与产品中间价格的差值，产品中间价格等于买入与卖出价的平均)。

Treasury Bill **短期政府债券** 政府发行的用于融资的短期无券息证券。

Treasury Bond **长期政府债券** 政府发行的用于融资的长期有券息证券。

Treasury Note **中期国库券** 见 Treasury Bond (中期国库券的期限小于 10 年)。

Treasury Note Futures **中期国库券期货** 中期国库券上的期货。

Tree **树形** 为了用于给期权以及其他衍生产品定价而建立的描述市场变量的树形结构。

Trinomial Tree **三叉树** 在树形结构上的每个节点均有三支分叉。类似于二叉树，三叉树形也可用于对衍生产品定价。

Triple Witching Hour **三重合时刻** 当股指期货、股指期权以及股指期货期权同时到期的时间。

Underlying Variable **标的变量** 决定期权以及其他衍生产品价格的变量。

Unsystematic Risk **非系统风险** 见非系统风险(Nonsystematic Risk)。

Up-and-In Option **上升-敲入期权** 标的资产价格上升到一定水平之后，这一期权将会终止。

Up-and-Out Option **上升-敲出期权** 标的资产价格上升到一定水平之后，这一期权会得以消失。

Uptick **价格升档** 价格的增加。

Value at Risk, VaR **风险价值度** 在一定置信水平之下，损失不能超出的数量。

Variance-Covariance Matrix **方差-协方差矩阵** 用于表达不同市场变量之间方差和协方差的矩阵。

Variance-Gamma Model **方差-Gamma 模型** 一种纯价格跳跃模型，其中小的价格跳跃经常发生，大的价格跳跃不经常发生。

Variance Rate **方差率** 波动率的平方。

Variance Reduction Procedures **方差缩减程序** 一种减小蒙特卡罗模拟法中误差的过程。

Variance Swap **方差互换** 将一段时间内资产价格所实现的方差率与某一事先约定的方差率进行交换的合约。

Variation Margin **变动保证金** 当产生保证金催付时，将保证金账户的资金提高到初始保证金水平所需要的额外保证金。

Vega 期权或其他衍生产品变化同波动率变化的比率。

Vega-Neutral Portfolio **Vega 中性交易组合** Vega 为 0 的交易组合。

Vesting Period **等待时间** 在这段时间内，期权不能被行使。

VIX Index **VIX 指数** 关于 S&P 500 股指波动率的指数。

Volatility **波动率** 用于检验资产收益不定性的测度。

Volatility Skew **波动率倾斜** 用于描述非对称波动率微笑的术语。

Volatility Smile **波动率微笑** 隐含波动率作为执行价格的函数曲线。

Volatility Surface **波动率曲面** 隐含波动率随执行价格与期限的变化表。

Volatility Swap **波动率互换** 在此互换协议中，一个将计利区间内价格变化的实际波动率与某以固定波动率进行交换，计算双方现金流的本金相同。

Volatility Term Structure 波动率期限结构 隐含波动率随期限的变化。

Warrant 认股权证 由公司或金融结构所发行的期权，公司经常会发行关于自身股票上的认股权证。

Waterfall 瀑布现金流 将标的资产组合所产生的现金流进行分配的规则。

Weather Derivative 气候衍生产品 收益与气候有关的衍生产品。

Wiener Process 维纳过程 在一个短时间段 Δt 内，随机过程所描述的变量变化服从正态分布，变量变化期望值为0，方差等于 Δt。

Wild Card Play 万能牌规则 在交易结束后的某时间段以交易封仓价格(closing price)将期货进行交割的权利。

Writing the Option 期权承约 卖出一个期权。

Yield 收益率 由产品提供的回报率。

Yield Curve 收益率曲线 见利率期限结构(Term Structure of Interest Rate)。

Zero-Coupon Bond 零息债券 没有券息的债券。

Zero-Coupon Interest Rate 零息利率 无息债券所对应的收益率。

Zero-Coupon Yield Curve 零息收益率曲线 零息利率与期限之间的函数关系。

Zero Curve 零曲线 见零息收益曲线(Zero-Coupon Yield Curve)。

Zero Rate 零息利率 见零息利率(Zero-Coupon Interest Rate)。



附录 A

DerivaGem 软件

DerivaGem 软件增加了若干功能，通过消除所有的 *.dll 文件，当前版本已被简化。用户可以直接接触每个函数的源程序，软件现已支持 Mac 和 Linux 系统。用户可以利用 DerivaGem 软件对 CDS 和 CDO 进行定价。

初始设定

使用软件最困难的步骤往往是第一步，以下是 DerivaGem 软件 2.01 版一个循序渐进的初始设定过程：

1. 将本书所附的磁盘放入电脑的 CD/DVD 驱动器之中，并打开 DG201.xls 文件。⊖

2. Office 2007 的用户，应在 Excel 开启时点击屏幕右上方（F 列上方）的选择功能（Options），点击 Enable this content。如果你用的不是 Office 2007，应将 Macros（宏）的安全等级设定为 Medium（中级）或者 Low（低级）（用户可在 Excel 中点击 Tools（工具），选择 Macros（宏），然后选择 Security（保密），最后选择适当的安全等级）。

3. 在页面的底部选择 Equity_FX_Index_Futures 工作页。

4. 将标的资产选定为 Currency，期权类型选定为 Binomial American，选择 Put 键，不要选择 Imply Volatility 一项。

5. 你现在可以对美式货币看跌期权进行定价，定价需要六个输入值：汇率、波动率、国内无风险利率、国外无风险利率、期限（以年为计）、执行价格和时间步长。在计算单元 D6、D7、D8、D19、D20 和 D21 中分别输入 1.61、12%、8%、9%、1.0、1.60 和 4。

6. 按回车键，并点击 Calculate 键。D25 的数值将是 0.07099，D26 和 D30 是希腊值，在接下一页，我给出了屏幕输出。

7. 点击 Display Tree 之后，你可以看到用于期权定价的二叉树。这正是第 20 章的图 20-6。

接下来的步骤

熟悉了初始设定后，对于其他类型的期权定价，你不应该再有很大困难。为了计算隐含波动率，需要点击 Imply Volatility 一项，并同时在计算单元中 D25 中输入期权价值，最终的波动率会显示在单元 D7 上。

软件可以显示不同的图形。为了显示图形，需要设定横轴的自变量、自变量取值区间和纵轴的应变量，设定完毕后，点击 Draw Graph，并点击回车键。

⊖ 该书的中文版没有附带光盘，读者可在作者的网页上下载 DerivaGem 软件 http://www.rotman.utoronto.ca/~hull。

使用软件时，需注意以下几点：

1. 对于美式和欧式股票期权，用户总共可以在一个输入表格中输入标的资产的 10 个股息，输入股息格式：第一列为股息时间(从今天算起以年为计量)，第二列为股息量，股息必须按时间的前后顺序给出。

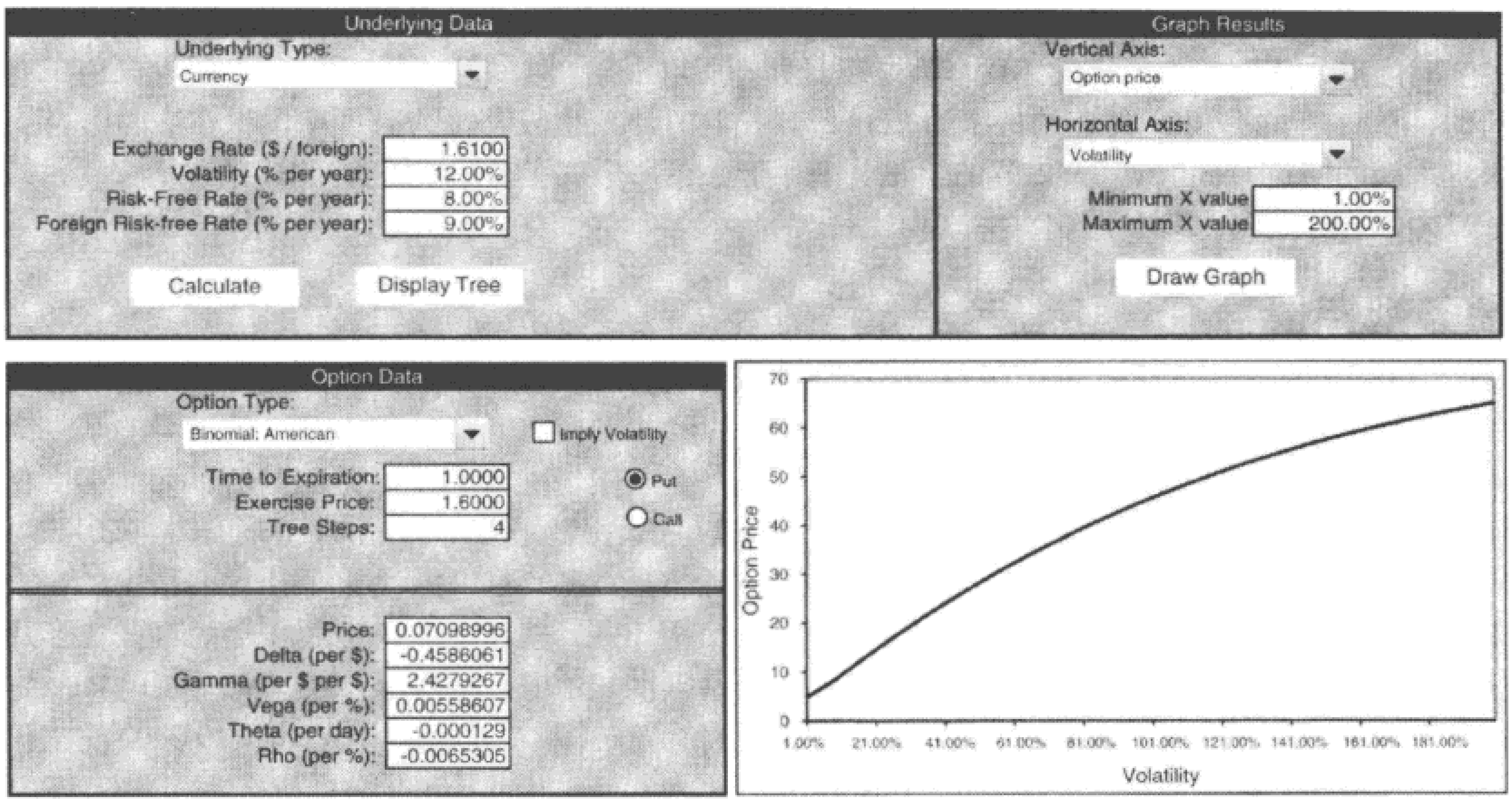
2. 美式期权定价树的最大步数为 500 步，图像最多可以展示 10 步的定价树。

3. 标准看涨和看跌期权的希腊值是由对输入值进行扰动产生的，计算中没有采用解析公式。

4. 对于亚式期权，当前平均(Current Average)由期权开始算起，对于一个新交易(距离期权开始时间为 0)，该变量没有用于计算。

5. 对于回望期权，截止到目前的极小(Minimum to Date)用于看涨期权计算和截止到目前的极大(Maximum to Date)用于看跌期权计算，对于一个新交易，这些数量应被设定为标的产品的当前值。

6. 利率为连续复利。



债券期权

债券期权(Bond_Option)工作页的操作和股票、外汇、股指、期货期权的操作大体类似，用户可以选择的定价模型包括布莱克模型(见 28.1 节)、短期利率的正态分布模型(见式(30-13))和短期利率的对数正态分布模型(见式(30-18))。第一个模型只能用于欧式期权，另外两个模型可以用于美式或欧式期权，券息为每年券息率，券息时间频率可以是 Quarterly(每季度)、Semi-Annual(每半年)和 Annual(每年)。在名为 Term Structure 的数表中，用户需要输入零息收益曲线，在第一列中输入期限(以年为计)，在第二列输入要连续复利的利率，期限应该以年计算，并按大小顺序排列。DerivaGem 采用与图 4-1 类似的分段线性零息收益曲线的假设。用户应注明执行价格是一个洁净价格(clean price)还是一个带息价格(dirty price)(见 28.1 节)。债券价格报价以 100 美元为本金量。

上限和互换期权

上限和互换期权(Cap and Swap Options)工作页的操作和股票、外汇、股指、期货期权的操作大体类似，用户可以利用这一页来对利率上限/下限和互换期权定价。28.2 节和 28.3 节分别解释了如何利用布莱克模型对于上限/下限和互换期权进行定价，关于短期利率的正态模型和对数正态模型分别由式(30-13)和式(30-18)给出。利率期限结构的输入方式和债券期权类似，付款时间频率可以是每季度、每半年和每年。DerivaGem 从产品到期日开始以倒推的方式得出期权的付款日期，最初的计利区间可能是非标准的，其长度可能介于正常计利区间的 0.5 ~ 1.5 倍。

信用违约互换

信用违约互换(CDS)工作页可以根据 CDS 溢差来计算违约率，反之亦然。用户需要输入(连续复利)利率的期限结构以及 CDS 溢差的期限结构或者违约率的期限结构。第一个违约率对应于零时刻到期限结构第一个时间点，第二个违约率对应的时间间隔为期限结构的第一个时间点到第二个时间点，依此类推。这里违约率为连续复利，所以根据 t 时刻的违约率 $h(t)$，假设先前没有违约，在时刻 t 到 $t+\Delta t$ 的违约概率为 $h(t)\Delta t$。我们的计算中假设违约只可能发生在支付日与支付日之间的中点时间，见 23.2 节的实例计算(注意在那个实例中，年复利的违约率为 2%，即 2.02% 的连续复利违约率)。

债务抵押债券

债务抵押债券(CDO)工作页根据用户输入的份额相关性计算 CDO 份额的报价，反之亦然(即根据份额的报价计算相关性)。用户可以输入份额的附着点和离开点；报价可以是以溢差基点为单位或者涉及一个前端支付(up-front payment)。后一种情况下，溢差基点是固定的，而前端支付额(以份额本金的百分比)可以是用户输入的也可以是隐含的(比如，iTraxx European 或 CDX NA IG 的股权份额的固定溢差为 500 个基点)。积分点个数(见式(24-12))决定了计算的精度，在大多数情况下，10 个积分点足以满足精度要求(最大值为 30)。软件中会以份额本金的百分比形式显示预期损失(ExpLoss)，并且以每年每 10 000 个基点的比率显示预期支付的贴现值(PVPmts)。这样，溢差等于 ExpLoss * 10 000/PVPmts；前端支付为 ExpLoss-(Spread * PVPmts/10 000)。工作页可以根据用户输入的报价来推算出份额的复合相关性(compound correlation)或基底相关性(base correlation)。对于基底相关性，必须将第一个份额的附着点设为 0%，一个份额的离开点是另一个份额的附着点。

希腊值的定义方式

在"Equity_FX_Index_Futures"工作页中，计算出的希腊值分别为

Delta：当资产价格增长 1 美元时，期权价格相应的变化量；

Gamma：当资产价格增长 1 美元时，期权 Delta 相应的变化量；

Vega：当波动率增长 1% 时(例如，波动率由 20% 变为 21%)，期权价格相应的变化量；

Rho：当利率增长 1% 时(例如，利率由 5% 变为 6%)，期权价格相应的变化量；

Theta：日历日往前提一日时，期权价格的变化量。

在"Bond_Options"和"Caps_and_Swap_Options"工作表中，计算出的希腊值分别为：

DV01：当收益曲线往上平移一个基点时，期权价格相应的变化量；

Gamma01：当收益曲线往上平移一个基点时，DV01 相应的变化量；

Vega：当波动率增长 1% 时(例如：波动率由 20% 变为 21%)，期权价格相应的变化量。

应用工具

在熟悉了期权计算器(DG201. xls)后，就可以开始使用应用工具了，该应用工具基本由期权计算器的函数构成，可以直接接触源程序。通过这个应用工具，可以产生期权价格表和图形，并且进一步来研发新的应用。Excel 的用户应该开启 DG201 function. xls，Open Office 的用户应开启 DG201 functions. ods。以下是通过应用工具开发的一些应用样本，它们被包含于 DG201 applications. xls 和 Open Office 的 DG201 application. ods 之中。

二叉树收敛性(Binomial Convergence)：这一应用实例用于检验第 12 章及第 20 章所讨论的二叉树的收敛性。

A. 希腊值：这一应用实例将第 18 章所讨论的希腊值图形化。

B. Delta 对冲：这一应用实例用于检验表 18-2 及表 18-3 中的 Delta 对冲的表现。

C. Delta 及 Gamma 对冲：这一应用实例用于检验 Delta 及 Gamma 对冲对于两值期权的表现。

D. 风险价值度：这一应用实例采用三种不同的方法来计算有同一标的的三个期权所组成的交易组合的风险价值度。

E. 障碍期权复制：这一应用实例进行静态期权复制计算(见 25. 16 节)。

F. 三叉树收敛性：这一应用实例用于检验三叉树的收敛性。

注意，Open Office 版本没有包含以上 E、F 和 G。

附录 B

世界上的主要期权期货交易所

交易所	简称	网址	交易所	简称	网址
澳大利亚股票交易所	ASX	www. asx. com. au	西班牙固定利得及不定利得金融期货交易所	MEFF	www. meff. es
巴西商品及期货交易所	BMF	www. bmfbovespa. com. br			
孟买证券交易所	BSE	www. bseindia. com	墨西哥衍生产品交易所	MEXDER	www. mexder. com
波士顿期权交易所	BOX	www. bostonoptions. com	明尼阿波利斯谷物交易所	MGE	www. mgex. com
马来西亚股票交易所	BM	www. bursamalaysia. com			
芝加哥期权交易所	CBOE	www. cboe. com	蒙特利尔交易所	ME	www. me. org
中国金融期货交易所	CFFEX	www. cffex. com. cn	纳斯达克 OMX		www. nasdaqomx. com
芝加哥商品交易所集团		www. cmegroup. com	孟买国家证券交易所	NSE	www. nseindia. com
大连商品交易所	DCE	www. dce. com. cn	纽约泛欧交易所		www. nyse. com
欧洲期货交易所	EUREX	www. eurexchange. com	大阪证券交易所	OSE	www. ose. or. jp
香港期货交易所	HKFE	www. hkex. xom. hk	上海期货交易所	SHFE	www. shfe. com. cn
洲际交易所	ICE	www. theice. com	新加坡交易所	SGX	www. ses. com. sg
国际债券交易所	ISE	www. iseoptions. com	东京谷物交易所	TGE	www. tge. or. jp
堪萨斯城交易所	KCBT	www. kbct. com	东京金融交易所	TFX	www. tfx. co. jp
伦敦金属交易所	LME	www. lme. co. uk	郑州商品交易所	ZCE	www. zce. cn

在最近几年，世界上若干家衍生产品交易所纷纷进行合并。例如，芝加哥交易所和芝加哥商品交易所两家合并为一，成立了芝加哥商品交易所集团(CME Group)，同时包括纽约商品交易所；Euronext 和 NYSE 两家交易所合并成立纽约泛欧交易所(NYSE Euronext)，同时拥有美国股票交易所、太平洋交易所、伦敦国际金融期货交易所和两家法国的交易所；澳大利亚股票交易所与悉尼期货交易所合并为一成为澳大利亚证券交易所；洲际交易所购买了纽约交易所、国际石油交易所和温尼伯商品交易所；EUREX 现由德国的 Borse AG 公司及瑞士 SWX 交易所共同拥有，并且收购了国际证券交易所。毫无疑问，交易所合并的原因在于规模经济效应，规模大的交易所会降低交易费用。

附录 C

$x \leqslant 0$ 时 $N(x)$ 的取值

下表列出了对应于 $x \leqslant 0$ 时 $N(x)$ 的取值，此表应该与插值并用。例如

$$N(-0.1234) = N(-0.12) - 0.34 \times [N(-0.12) - N(-0.13)]$$
$$= 0.4522 - 0.34 \times (0.4522 - 0.4483) = 0.4509$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-3.0	0.0014	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-4.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

附录 D

$x \geqslant 0$ 时 $N(x)$ 的取值

下表列出了对应于 $x \geqslant 0$ 时 $N(x)$ 的取值，此表应该与插值并用。例如

$$N(0.6278) = N(0.62) + 0.78 \times [N(0.63) - N(0.62)]$$
$$= 0.7324 + 0.78 \times (0.7357 - 0.7324) = 0.7350$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

金融学

课程名称	书号	书名、作者及出版时间	版别	定价
行为金融学	978-7-111-34808-5	行为金融（福布斯）（2011年）	外版	62
投资管理	978-7-111-30107-3	投资分析与组合管理（英文版·第9版）（赖利）（2010年）	外版	98
投资管理	978-7-111-22595-9	现代投资组合理论与投资分析（第7版）（埃尔顿）（2007年）	外版	68
投资管理	978-7-111-21204-5	现代投资组合理论与投资分析（英文版·第7版）（埃尔顿）（2007年）	外版	80
商业银行经营管理学	978-7-111-34584-8	商业银行管理（第8版）（罗斯）（2011年）	外版	78
商业银行经营管理学	978-7-111-35539-7	商业银行管理（英文版·第8版）（罗斯）（2011年）	外版	88
金融学（货币银行学）指导或案例	即将出版	货币金融学（第2版）学习指导（米什金）（2011年）	外版	28
金融学（货币银行学）	978-7-111-23245-2	货币、金融体系与经济（英文版·第5版）（哈伯德）（2008年）	外版	65
金融学（货币银行学）	978-7-111-34261-8	货币金融学（第2版）（米什金）（2011年）	外版	75
金融学（货币银行学）	978-7-111-36279-1	货币金融学（克鲁肖）（2011年）	外版	49
金融学（货币银行学）	978-7-111-22274-3	货币银行学：货币、银行业和金融市场（托马斯）（2008年）	外版	78
金融学（货币银行学）	978-7-111-26584-9	金融学导论：市场、投资与财务管理（第13版）（梅利歇尔）（2009年）	外版	75
金融市场学	978-7-111-26909-0	货币、金融市场与金融机构（第10版）（基德维尔）（2009年）	外版	78
金融市场学	978-7-111-26674-7	金融市场学（第10版）（罗斯）（2009年）	外版	79
金融市场学	978-7-111-26790-4	金融市场学（英文版·第10版）（罗斯）（2009年）	外版	88
金融市场学	978-7-111-29552-5	金融市场与机构（第8版）（马杜拉）（2010年）	外版	65
金融市场学	978-7-111-25441-6	金融市场与金融机构（第5版）（米什金）（2008年）	外版	69
金融市场学	978-7-111-31493-6	金融市场与金融机构基础（第4版）（法博齐）（2010年）	外版	79
金融市场学	978-7-111-32325-9	金融市场与金融机构基础（英文版·第4版）（法博齐）（2010年）	外版	78
金融市场学	978-7-111-26841-3	现代金融市场：价格、收益及风险分析（布莱克威尔）（2009年）	外版	58
金融风险管理	978-7-111-30699-3	风险管理与金融机构（第2版）（约翰·赫尔）（2010年）	外版	56
金融风险管理	978-7-111-35863-3	风险管理与金融机构（英文版·第2版）（约翰·赫尔）（2011年）	外版	69
兼并、收购与公司重组	978-7-111-35538-0	兼并、收购和公司重组（第2版）（阿扎克）（2011年）	外版	62
国际金融案例	978-7-111-22673-4	国际金融案例（德赛）（2007年）	外版	48
（证券）投资学习题	978-7-111-29851-9	投资学习题集（第7版）（博迪）（2010年）	外版	35
（证券）投资学	978-7-111-26944-1	投资学（第7版）（博迪）（2009年）	外版	89
（证券）投资学	978-7-111-27013-3	投资学（英文版·第8版）（博迪）（2009年）	外版	108
（证券）投资学	978-7-111-23031-1	投资学：分析与管理（第10版）（琼斯）（2008年）	外版	69
（证券）投资学	978-7-111-30587-3	投资学：以Excel为分析工具（第3版）（霍顿）（2010年）	外版	38
（证券）投资学	978-7-111-30395-4	投资学基础（英文版·第9版）（梅奥）（2010年）	外版	82
行为金融学	978-7-111-31106-5	行为金融学（饶育蕾）（2010年）	本版	36
投资银行学	978-7-111-33063-9	投资银行：理论与案例（马晓军）（2011年）	本版	32
投资银行学	978-7-111-24899-6	投资银行学（张志元）（2009年）	本版	36
投资管理	978-7-111-29977-6	投资管理（李学峰）（2010年）	本版	36
投资管理	978-7-111-21926-0	投资管理（庄新田）（2007年）	本版	32
商业银行经营管理学	978-7-111-19856-5	商业银行经营管理学（刘毅）（2006年）	本版	32
金融学（货币银行学）	978-7-111-20910-2	货币银行学（精品课）（钱水土）（2007年）	本版	32
金融学（货币银行学）	978-7-111-30153-0	金融学（精品课）（董金玲）（2010年）	本版	30
金融学（货币银行学）	978-7-111-35641-7	金融学概论（精品课）（丁志国）（2011年）	本版	48
金融学（货币银行学）	978-7-111-35022-4	金融学概论（精品课）（苗训诚）（2011年）	本版	42
金融投资专业英语	978-7-111-26455-2	金融投资专业英语（杜朝运）（2009年）	本版	25
金融市场学	978-7-111-28226-6	金融市场学（韩国文）（2009年）	本版	48
兼并、收购与公司重组	978-7-111-34929-7	并购与重组：跨世纪的十大经典重组（毛蕴诗）（2011年）	本版	38
国际结算	978-7-111-34376-9	国际结算（徐进亮）（2011年）	本版	38
风险投资学	978-7-111-29299-9	风险投资与创业板（房四海）（2010年）	本版	38
（证券）投资学	978-7-111-29863-2	投资学（朱相平）（2010年）	本版	38
（证券）投资学	978-7-111-35146-7	投资学原理及应用（贺显南）（2011年）	本版	29
（证券）投资学	978-7-111-21343-7	证券投资学（葛红玲）（2007年）	本版	35
（证券）投资学	978-7-111-23293-3	证券投资学原理（精品课）（韩德宗）（2008年）	本版	36

教师服务登记表

尊敬的老师：

您好！感谢您购买我们出版的____教材。

机械工业出版社华章公司为了进一步加强与高校教师的联系与沟通，更好地为高校教师服务，特制此表，请您填妥后发回给我们，我们将定期向您寄送华章公司最新的图书出版信息！感谢合作！

个人资料（请用正楷完整填写）

教师姓名		□先生 □女士	出生年月		职务		职称：□教授 □副教授 □讲师 □助教 □其他	
学校			学院				系别	
联系电话	办公： 宅电： 移动：			联系地址及邮编				
				E-mail				
学历		毕业院校		国外进修及讲学经历				
研究领域								

主讲课程	现用教材名	作者及出版社	共同授课教师	教材满意度
课程： □专 □本 □研 □MBA 人数： 学期：□春□秋				□满意 □一般 □不满意 □希望更换
课程： □专 □本 □研 □MBA 人数： 学期：□春□秋				□满意 □一般 □不满意 □希望更换

样书申请			
已出版著作		已出版译作	
是否愿意从事翻译/著作工作 □是 □否		方向	
意见和建议			

填妥后请选择以下任何一种方式将此表返回：（如方便请赐名片）

地 址：北京市西城区百万庄南街1号 华章公司营销中心 邮编：100037

电 话：(010) 68353079 88378995 传真：(010)68995260

E-mail:hzedu@hzbook.com marketing@hzbook.com 图书详情可登录http://www.hzbook.com网站查询

Options Futures and Other Derivatives (8th Edition)

高等院校金融学专业课程教材

经济学：私有和公共选择12e
詹姆斯 D. 格瓦特尼，佛罗里达州立大学
Understanding Economics 12e，James D. Gwartney

国际经济学6e
丹尼斯 R. 阿普尔亚德，戴维森学院
International Economics 6e，Dennis R. Appleyard

投资学7e
滋维·博迪，波士顿大学
Investments 7e，Zvi Bodie

公司理财8e
斯蒂芬 A. 罗斯，MIT斯隆管理学院
Modern Financial Management 8e，Stephen A.Ross

期权、期货及其他衍生产品8e
约翰·赫尔，多伦多大学
Options,Futures and Other Derivatives 8e，John C. Hull

商业银行管理8e
彼得 S. 罗斯，德克萨斯A&M大学
Bank Management & Financial Services 8e，Peter S.Rose

金融市场与金融机构4e
弗兰克 J. 法博齐，耶鲁管理学院
Foundations of Financial Markets and Institutions 4e，Frank J. Fabozzi

跨国公司金融12e
大卫·艾特曼，加州大学洛杉矶分校
Multinational Business Finance 12e，David Eiteman

衍生工具与风险管理7e
唐·钱斯，路易斯安那州立大学
An Introduction to Derivatives and Risk Management 7e，Don M.Chance

现代投资组合理论与投资分析7e
埃德温 J. 埃尔顿，纽约大学
Modern portfolio theory and investment analysis 7e，Edwin J.Elton

兼并、收购和公司重组2e
恩里克·阿扎克，哥伦比亚大学
valuation for mergers,buyouts and restructuring 2e，Enrioue R. Arzac

行为金融
威廉·福布斯，英国拉夫堡大学商学院
Behavioural Finance ，William Forbes

汇率与国际金融5e
劳伦斯·科普兰，卡迪夫大学投资管理研究机构
Exchange Rates and International Finance 5e，Laurence Copeland

创业金融2e
理查德 L. 史密斯，克莱蒙特研究大学
Entrepreneurial Finance 2e，Richard L. Smith

客服热线：
(010) 88379210, 88361066
购书热线：
(010) 68326294, 88379649, 68995259
投稿热线：
(010) 88379007
读者信箱：
hzjg@hzbook.com

华章网站 http://www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com

PEARSON
www.pearsonhighered.com

上架指导：金融
ISBN 978-7-111-35821-3
9 787111 358213
定价：98.00元